UNIWERSYTET PAPIESKI JANA PAWŁA II W KRAKOWIE

WYDZIAŁ FILOZOFICZNY

Cantora i Dedekinda filozofie matematyki
Analiza porównawcza

Karolina Tytko

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem:
prof. UPJPII, dr. hab. Pawła Polaka (promotor) oraz
dr Romana Krzanowskiego (promotor pomocniczy)

Kraków, 2024

Opis bibliograficzny pracy:

Karolina Tytko, *Cantora i Dedekinda filozofie matematyki. Analiza porównawcza*, praca doktorska napisana pod kierunkiem prof. UPJPII, dr. hab. Pawła Polaka oraz dr. Romana Krzanowskiego, WF UPJPII, 2024, 355 s.

Abstrakt

Niniejsza praca jest próbą rozwinięcia nurtu badań praktyki matematycznej i wskazania sposobu jej połączenia z filozofią uprawianą w ośrodku krakowskim, a szczególnie z „filozofią w nauce" Michała Hellera. Zaprezentowane ramy metodologiczne, zastosowane do analiz zawartych tutaj są dodatkowo interpretowane z wykorzystaniem koncepcji trzech światów Karla Poppera.

Rozprawa opiera się na analizie porównawczej działalności dwóch wybitnych matematyków XIX wieku: Georga Cantora i Richarda Dedekinda. Działalność badana jest poprzez pryzmat tekstów źródłowych z zakresu podstaw matematyki. Dyskutowana jest radykalna opozycja platonizm *versus* konstruktywizm, wynikająca z dotychczasowych interpretacji stanowisk tych uczonych. Dzięki zastosowaniu metodologii badań praktyki matematycznej zaproponowane zostały ramy interpretacyjne, akcentujące podobieństwa istniejące w filozofii Cantora i Dedekinda. Charakteryzują się one cechami pragmatycznego realizmu ontologicznego, jak i konstrukcjonizmu epistemologicznego. Analiza metodologii badawczych obu matematyków wskazała natomiast na różnicę w zakresie strukturalizmu metodologiczno-epistemicznego, jak i ukazano źródła tej różnicy.

Zastosowano rekonstrukcję bazującą na metodologii badania praktyki matematycznej, analizę porównawczą oraz syntezę. Wykorzystano materiały źródłowe: 38 i literaturę uzupełniającą: 279.

Słowa kluczowe

Georg Cantor, Richard Dedekind, filozofia w matematyce, praktyka matematyczna, konstrukcja liczb rzeczywistych, teoria mnogości, arytmetyka liczb naturalnych, ontologiczny realizm, epistemologiczny konstrukcjonizm, strukturalizm matematyczny.

Spis treści

1 Wstęp

Rozwój filozofii matematyki podążający od dziewiętnastowiecznego radykalnego platonizmu poprzez klasyczne już prądy XX wieku, takie jak formalizm, logicyzm czy intuicjonizm, współcześnie idzie w wielu kierunkach. Szczególnie interesującym wydają się badania w obrębie filozofii praktyki matematycznej. Te współczesne badania wydają się mieć punkty wspólne z filozofią uprawianą w ośrodku krakowskim, a szczególnie z „filozofią w nauce" Michała Hellera. Niniejsza praca jest próbą rozwinięcia nurtu badań praktyki matematycznej i wskazania, w jaki sposób może zostać połączony z lokalną tradycją badawczą. Zaprezentowane ramy metodologiczne zastosowane tutaj do analiz są dodatkowo interpretowane z wykorzystaniem koncepcji trzech światów Karla Poppera.

Powyższe zadanie zostanie zrealizowane na przykładzie analizy porównawczej działalności dwóch wybitnych matematyków XIX wieku: Georga Cantora i Richarda Dedekinda. Dzięki tej analizie możliwe będzie pogłębienie filozoficznych analiz dotyczących działalności i dzieła tych słynnych uczonych. W ten sposób wskażemy użyteczność i celowość wprowadzenia proponowanego tu podejścia metodologicznego.

1.1 O czym jest praca

Niniejsza praca poświęcona jest badaniom z zakresu filozofii matematyki. Z uwagi na swój przedmiot ma charakter interdyscyplinarnej analizy – wybranych tekstów matematycznych z zakresu podstaw matematyki autorstwa Cantora i Dedekinda. Na tej podstawie są rekonstruowane, a następnie porównywane odpowiednie aspekty filozofii matematyki tychże matematyków. Praca ta łączy więc podejście klasyczne filozofii matematyki z podejściem proponowanym przez Michała Hellera oraz z podejściem filozofii praktyki matematycznej (w skrócie PMP – ang. *Philosophy of Mathematical Practice*). Perspektywa taka pozwala patrzeć szerzej na połączenie między filozofią i matematyką – nie tylko jak na możliwość budowy (czasem odizolowanego) systemu filozoficznego dla matematyki.

Rozwijając propozycję Hellera, aby badać różne filozoficzne refleksje uwikłane w naukę, na przykładzie praktyki badawczej konkretnych matematyków (w tym przypadku Cantora i Dedekinda), wkraczamy na teren współczesnej propozycji, jaką jest nurt badania praktyki matematycznej przez filozofów. Mimo że głównym tematem pracy nie jest sama filozofia współczesnej praktyki matematycznej (PMP), korzystamy z jej narzędzi badawczych, aby dzięki temu w sposób pogłębiony zbadać klasyczne dziewiętnastowieczne teksty matematyczne, uwzględniając samą praktykę i na tej podstawie zrekonstruować najbardziej prawdopodobne (chociaż nie zawsze świadome) założenia i przesłanki filozoficzne obydwu wybitnych matematyków[1].

Niniejsza rozprawa pod względem treści matematycznych skupia się, po pierwsze na problemie niewymierności (mówiąc precyzyjniej: problemie skonstruowania kontinuum punktowego) rozwiązanym przez obu matematyków. Porównane będą różnice oraz podobieństwa, zarówno matematyczne, jak i filozoficzne, związane z odmiennymi konstrukcjami zbioru liczb rzeczywistych u obu matematyków. Uwzględnimy również współczesne wersje tych konstrukcji, aby dokładniej przeanalizować formalny status nieskończenie małych w obu konstrukcjach wspomnianych matematyków.

W kontekście teorii mnogości rozpatrywać będziemy niekoniecznie odmienne, aczkolwiek różniące się prezentacje podstawowych jej zakresów. W przypadku Cantora, będą to wybrane prace i fragmenty, które dotyczyły najważniejszych, wybranych aspektów teorii mnogości (m.in. powstanie zbiorów nieskończonych, liczby pozaskończone – kardynalne i porządkowe, Hipoteza Kontinuum, jak również ponowne odniesienie do wielkości nieskończenie małych).

W przypadku Dedekinda, skupimy się na jego najważniejszym dziele, w którym opisał zarówno zarys podstaw teorii mnogości, jak i zbudował w oparciu o nie arytmetykę liczb naturalnych (głównie skupimy się na żmudnej i precyzyjnej konstrukcji całej struktury teoriomnogościowej, jak i na abstrakcyjnym, strukturalistycznym łańcuchu – *Kette*, stanowiącym podstawę zbioru prosto nieskończonego). W kontekście teorii mnogości nie będziemy zasadniczo korzystali ze współczesnych badań, jednak w kilku miejscach posłużymy się wybranymi aspektami współczesnej teorii mnogości.

Weźmiemy również pod uwagę deklarowane meta-założenia (o źródle matematycznej wiedzy), cele praktyki matematycznej (stosowalność matematyki), jak i metody badawcze (oparte na ich matematycznym oglądzie) obydwu matematyków i zestawimy je w analizie porównawczej. Istotny będzie ponadto kontekst badań prowadzonych nad teorią mnogości – tak zakres czasu, kiedy te badania były prowadzone odpowiednio przez każdego z

[1] Założenia odnośnie PMP, jak i opis samej praktyki czerpane będą głównie z: J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†*, „Philosophia Mathematica” 27, (2019) nr 1, 1–32, doi: 10.1093/philmat/nkz002.

matematyków, jak i określone aspekty stosunku wyników tych badań do problemów ówczesnej matematyki.

Wprawdzie niniejsza praca jest próbą wglądu w praktykę matematyczną Cantora i Dedekinda, jednak należy przy tym zaznaczyć, że nie jest w tym kontekście najważniejszy aspekt porównywania ich dokonań ze współczesnymi ujęciami wybranych problemów matematycznych. Samo pojęcie praktyki matematycznej objaśnimy dalej, niemniej jednak już teraz można wspomnieć, że skupimy się na aspektach tworzenia i wprowadzania matematycznych treści, a także na podstawowym sposobie istnienia tych treści (obiektów).

Porównanie analizowanych problemów matematycznych ze współczesnymi ujęciami jest stosowane jedynie przy wybranych aspektach, na przykład w przypadku problemu konstrukcji liczb rzeczywistych. Celem tego zabiegu jest ukazanie, jak zauważalne i znaczne różnice we współczesnych wersjach konstrukcji Cantora i Dedekinda mają się do ich ówczesnych zapatrywań na kwestię wielkości nieskończenie małych (systemów niestandardowych). W pozostałych kwestiach, przedstawiając współczesne ujęcia bądź notację, robimy to jedynie częściowo, tylko w takim zakresie, aby uspójnić obraz ich praktyki matematycznej, nie zaś, aby wyciągać stąd dalsze wnioski. Jest to temat na osobną rozprawę.

W niniejszej rozprawie poddane zostaną analizie następujące prace. W przypadku Dedekinda sytuacja jest dość prosta, ponieważ będziemy analizować głównie dwie jego prace:

– pracę *Stetigkeit und irrationale Zahlen* z 1872 roku, w której skonstruował on zbiór liczb rzeczywistych[2],

–jak również pracę *Was sind und was sollen die Zahlen?* z 1888 roku, w której wprowadził teorię mnogości oraz bezpośrednio w oparciu o nią podał model liczb naturalnych[3].

W przypadku Cantora sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana, ponieważ pracował on nad teorią mnogości znacznie dłużej. Będziemy więc analizować głównie wybrane fragmenty następujących prac:

[2] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1872, 315–334.

[3] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1888, 335–391.

– pracę *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* z 1872 roku w dużej części, w której przedstawiona jest zarówno konstrukcja *R*, jak i pierwsze analizy zbiorów pochodnych oraz zbiorów I i II gatunku[4],

– fragmenty pracy z 1874 roku, w której przedstawiona jest kwestia różnoliczności zbiorów nieskończonych[5],

– fragmenty pracy z 1878 roku, przedstawiające kontynuację rozważań odnośnie do różnoliczności zbiorów nieskończonych, jak i pierwszą wersję Hipotezy Kontinuum (według przypisu Zermelo)[6],

– fragmenty prac z 1879/1880, gdzie przedstawione są szerzej kwestie zbiorów pochodnych (w tym symbol iloczynu nieskończonościowego) oraz zbiorów I i II gatunku, definicja zbioru pustego, a także pomniejsze definicje mnogościowe[7],

– fragment pracy z 1882 roku przedstawiający definicję zbioru oraz podejście do kwestii nieskończenie małych wielkości[8],

– fragmenty prac z 1883 roku, nawiązujące do przeformułowania symboli nieskończonościowych na liczby oraz przedstawiające zasady generowania liczb porządkowych[9],

– fragment pracy z 1884 roku, przedstawiający nieudaną próbę udowodnienia Hipotezy Kontinuum[10],

– fragment pracy z 1890 roku, przedstawiający kwestię ogólniejszej zasady różnoliczności zbioru oraz zbioru potęgowego (uogólnioną Hipotezę Kontinuum)[11],

---

[4] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1872, 92–102.

[5] G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1874, 115–118.

[6] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1878, 119–133.

[7] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1 (Mathematische Annalen 15 (1), 1–7)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1879, 139–145; G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1880, 145–148.

[8] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1882, 149–157.

[9] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 (Mathematische Annalen 21 (1), 51–58)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1883, 157–165; G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1883, 165–209.

[10] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten (6)*, „Mathematische Annalen" 23, (1884), 453-488(210-246), doi: https://doi.org/10.1007/BF01446598.210-146.

[11] G. Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1890, 278–282.

– a także fragmenty prac z lat 1895 oraz 1897, w których Cantor odnosił się do różnych opracowanych wcześniej problemów, jak przypisanie notacji alefów do liczb porządkowych, definicja zbioru, definiowanie klasy zbiorów czy ponowne zdefiniowanie liczby kardynalnej.

Oprócz wymienionych prac odnosimy się do dostępnych opracowań oraz wybranych fragmentów zachowanych listów, a także wszelkich prac pomocnych w opracowywaniu opisanych wcześniej zagadnień.

Opisane analizy mają na celu zrekonstruowanie trzech istotnych aspektów filozofii matematyki Cantora i Dedekinda. Chodzi o konstrukcjonizm epistemologiczny, realizm ontologiczny, a także związany z nimi strukturalizm (u Cantora będzie to jedynie strukturalizm ontologiczny, u Dedekinda dodatkowo strukturalizm metodologiczno-epistemologiczny). Konstrukcjonizm epistemologiczny będzie oparty na niezbędności aktywnych i twórczych procesów umysłowych podmiotu matematycznego (jednak nie w oderwaniu od „wiedzy zastanej") w kontekście konstruowania bardziej skomplikowanych struktur; natomiast realizm oparty na założeniu o niezbędności minimalnego wymogu istnienia abstrakcyjnych obiektów, które są wytworem oraz przedmiotem dyskursu zarówno indywidualnej praktyki, jak i wiedzy obiektywnej (tj. praktyki społeczno-historycznej).

Założenia (czy też aspekty) filozoficzne, zrekonstruowane w oparciu o analizę praktyki matematycznej, będą porównane na dwa sposoby:

– założenia i przesłanki zrekonstruowane dla Cantora zostaną porównane z tymi zrekonstruowanymi dla Dedekinda,

– a także założenia i przesłanki zrekonstruowane dla obydwu matematyków w perspektywie PMP zostaną porównane z założeniami przypisywanymi tym matematykom, na podstawie ich deklaracji lub poza-matematycznych wypowiedzi, z perspektywy tradycyjnej filozofii matematyki.

Oprócz analizy matematycznych tekstów, rekonstrukcji oraz analizy porównawczej filozoficznych założeń i przesłanek, podjęta zostanie próba scharakteryzowania wybranych aspektów metodologii praktyki naukowej obu matematyków (w oparciu o ich naukowe decyzje i podejmowane kierunki badań, w kontekście ówczesnego środowiska naukowego i obowiązujących w tym środowisku paradygmatów). Przeanalizujemy w tym celu ich założenia o źródle wiedzy matematycznej, podejście do wykorzystania i stosowania teorii mnogości, a także opiszemy wybrane aspekty ich matematycznego oglądu podstaw matematyki.

1.2 Uzasadnienie wyboru tematyki rozprawy

Niniejsza praca ma na celu pierwszą w literaturze analizę porównawczą założeń filozoficznych dwóch wybitnych matematyków XIX wieku: Georga Cantora i Richarda Dedekinda. Motywacją do powstania pracy był postulat Michaiła Hellera, dotyczący konieczności poszerzenia zakresu pytań i kwestii badawczych filozofii matematyki. Hellerowski program rozwinięty zostanie poprzez oryginalne odwołanie do analizy praktyki matematycznej wspomnianych uczonych w zakresie podstaw matematyki (konstrukcji liczb rzeczywistych, teorii mnogości oraz arytmetyki liczb naturalnych)[12].

Praca ta ma na celu ukazanie nowej perspektywy analizy historii matematyki dzięki zastosowaniu Hellerowskiej koncepcji *filozofii w nauce*, tutaj występującej pod postacią *filozofii w matematyce*. Do zbudowania tej perspektywy należy wykorzystać koncepcję filozofii praktyki matematycznej, co pozwoli bardziej precyzyjnie i adekwatnie ukazać historyczną doniosłość prac Cantora i Dedekinda oraz wzbogaci krąg tradycyjnych rozważań filozofii matematyki, wiązanych z dokonaniami wspomnianych wybitnych twórców. Rozprawa jest w zasadzie rozbudowanym studium przypadku (*case study*) dwóch indywidualnych praktyk matematycznych oraz wybranych konsekwencji filozoficznych prac omawianych matematyków. Takie studium jest ważne również w kontekście rozwoju współczesnej wiedzy o matematyce, wpisując się w nurt badań rozwoju wiedzy matematycznej. Znany badacz tego nurtu, Paolo Mancosu, podkreślał, że – stosunkowo mało jest w filozofii matematyki przypadków *case studies*, które są skupione na konkretnych problemach matematycznych, rozwiązywanych przez konkretne matematyczne podmioty[13]. Niniejsza rozprawa ma na celu choćby częściowe wypełnienie tej luki, opierając się na analizie przykładach historycznych, która przeprowadzona zostanie na bazie tekstów źródłowych.

W ramach nurtu badań praktyki matematycznej niniejsza praca ma także na celu nowe ujęcie podstawowych aspektów rozwoju matematycznej wiedzy, wytwarzanej przy założeniu kontekstu indywidualnej praktyki matematycznej konkretnego matematyka (choć osadzonej w

---

[12] Powstały prace, które pośrednio zawierają odniesienia jednocześnie do aspektów matematycznych lub filozoficznych Cantora i Dedekinda oraz opisujące ich relację. Są to: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Kraków 2007; J. Ferreirós, *On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*, „Historia mathematica" 20, (1993), 343–363; W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number*, w: *Frege: Importance and Legacy*, red. M. Schim, Berlin 1996, 70–113. W żadnej z nich jednak nie ma przeprowadzonej całościowej, szczegółowej analizy porównawczej między ich założeniami filozoficznymi, zrekonstruowanymi w dodatku w oparciu o analizę ich praktyki matematycznej.

[13] P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford 2008, 2.

danym, konkretnym kontekście historyczno-kulturowym), ale stającej się od momentu opracowania językowego elementem Popperowskiej wiedzy obiektywnej, w pewnym sensie niezależnej od aktualnie działających podmiotów poznawczych. To z kolei zaś może stanowić podstawę dla badań w zakresie tradycyjnej filozofii matematyki, mających na celu załagodzenie klasycznej radykalnej dychotomii platonizm-konstruktywizm, odpowiadającej w praktyce matematycznej przeciwstawieniu dwóch przeciwstawnych koncepcji praktyki matematycznej: odkrywanie obiektów istniejących niezależnie od człowieka *versus* dowolne tworzenie obiektów matematycznych, istniejących jedynie w umyśle podmiotu tworzącego. PMP proponuje bowiem bardziej pragmatyczne podejście, które uzależnia powstawanie obiektów matematycznych od konkretnych, umysłowych czynności konstrukcyjnych podmiotu w odpowiedzi na konkretne matematyczne problemy[14], jednakże od momentu ich tekstowego i językowego wprowadzenia, obiekty te stają się intersubiektywnie komunikowalne oraz istniejące niezależnie, oraz poza umysłem ich twórcy[15].

Wybór na podstawę niniejszego studium praktyki badawczej dwóch matematyków działających w XIX wieku nie jest przypadkowy. Okres ten był przełomowy dla rozwoju matematyki oraz filozofii matematyki. Decydowały o tym zmieniające się paradygmaty, metody i kierunki działań w obu tych dyscyplinach naukowych[16]. W okresie tym matematyka – w kontekście struktury działalności akademickiej i podziału dyscyplin naukowych – wciąż pozostawała silnie powiązana z filozofią, nawet jeśli były to związki instytucjonalne[17], to odgrywały one sporą rolę. Obrazuje to w pewnym sensie również wpis na pierwszej stronie rozprawy doktorskiej Cantora: „*dissertatio inauguralis quam consensu et auctoritate amplissimi philosophorum ordinis*"[18].

Granica paradygmatów, o jakiej wyżej mowa, była granicą między podejściem intuicyjnym a formalnym. Fundamentalnym kierunkiem była rygoryzacja analizy – dążono do

[14] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*

[15] P. Błaszczyk, *On the Mode of Existence of the Real Numbers*, w: *Logos of Phenomenology and Phenomenology of the Logos*, red. A. T. Tymieniecka, t. 88, Dordrecht 2005, 139.

[16] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*, Princeton, Oxford 2017, 21–23; P. Polak, *The Paradigm Shift in the 19th-century Polish Philosophy of Mathematics*, „Studia Historiae Scientiarum" 21, (2022), 217–235, doi: 10.4467/2543702XSHS.22.006.15972.

[17] P. Polak, *Skąd wziął się krakowski styl uprawiania filozofii przyrody?*, w: *Wyzwania racjonalności. Księdzu Michałowi Hellerowi współpracownicy i uczniowie*, red. S. Wszołek, R. Janusz, Kraków 2006, 439–449.

[18] G. Cantor, *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1867, 1–31.

tego, aby twierdzenia, dowody i teorie przedstawiane były w matematyce przy pomocy środków arytmetycznych i logicznych, w przeciwieństwie do wcześniej wykorzystywanych intuicyjno-obserwacyjnych metod geometrycznych[19]. O ile do XIX wieku używano często odniesień do samej czynności konstruowania obiektów matematycznych, tak w XX wieku zaczęto korzystać z niewiążącego pojęcia „istnienia", aby opisać badane czy poddawane operacjom obiekty[20]. XIX wiek to również stulecie powstania teorii mnogości[21], jak i strukturalizmu metodologicznego[22]. Głównymi kierunkami filozoficznymi, jakie narodziły się na przełomie XIX i XX wieku, były logicyzm, formalizm i intuicjonizm (niektórzy wskazują również na predykatywizm)[23]. Powstały one w odpowiedzi na postulat stworzenia filozofii wolnej od uzasadnień platonicznych[24]. O ile pierwsze dwa kierunki związane były z niepodważalnymi prawami logiki, niezależnymi od aktów psychologicznych, tak intuicjonizm tłumaczył powstawanie wiedzy intuicją podmiotu matematycznego.

Podejście niniejszej pracy niejako związuje kwestie powstawania i rozwoju wiedzy z procesami psychologicznymi, przyznaje obiektom matematycznym pewien rodzaj pragmatycznego realizmu, nie odrzucając jednocześnie praw logiki, czy szerzej – pewnego

rodzaju racjonalności, niezbędnej dla powstania matematyki.

1.3 Cele niniejszej rozprawy

Celem niniejszej rozprawy jest uzyskanie wniosków z zakresu filozofii matematyki, na bazie analizy porównawczej stanowisk Cantora i Dedekinda, na kształt tych, które Heller uzyskał w ramach filozofii przyrody, porównując wybrane dokonania Newtona i Leibniza. Chodzi o Hellerowską analizę założeń filozoficznych Newtona oraz Leibniza, oraz przesłanek filozoficznych, jakie są uwikłane w teorie przez nich stworzone. Najważniejszym obszarem badań Hellera były analizy filozoficznego problemu czasu i przestrzeni, wskazujące że filozofie

[19] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 21–23.

[20] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 74–75.

[21] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 55, 58.

[22] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 154.

[23] L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta.

[24] Jak pisze Horsten: „Ogólny światopogląd filozoficzny i naukowy dziewiętnastego wieku skłaniał się ku empirii: platoniczne aspekty racjonalistycznych teorii matematyki szybko traciły poparcie". L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

przyrody, jakie były deklarowane zarówno przez Leibniza, jak i Newtona, nie są tożsame z filozofiami przyrody, uwikłanymi w ogólną teorię względności, jak również w mechanikę Newtonowską[25].

Należy zaznaczyć, że analizy Hellerowskie nie są całkowicie analogiczne do prowadzonych tu analiz. Po pierwsze, odmienny jest przedmiot analiz – nie zajmujemy się naukami empirycznymi, a matematyką. Po drugie, nie bierzemy pod uwagę całych filozofii matematyki, związanych z doktrynami warunkującymi niejako samą naukę – czy to deklarowanymi przez naukowców, czy też uwikłanych w naukową teorię. Uwzględniamy jedynie filozoficzne aspekty wybranych obszarów działalności Cantora i Dedekinda. Aspekty te dotyczą – z jednej strony – procesu poznawczego, a z drugiej strony – pytań o istnienie matematycznych obiektów. Rozważamy te aspekty zarówno w bezpośrednim kontekście ich matematycznej praktyki i wprowadzonych elementów teorii matematycznych, jak i na tle przypisywanych tym matematykom postaw względem matematyki (tj. procesów poznawczych oraz istnienia matematycznych obiektów), w oparciu o ich poza-matematyczne wypowiedzi lub poza-matematyczne ich interpretacje.

Celem niniejszej pracy jest wskazanie różnicy między tymi dwoma rodzajami założeń i przesłanek filozoficznych.

Ma to na celu ukazanie, że chociaż każdy podmiot matematyczny wnosi niepowtarzalny wkład w rozwój matematycznej wiedzy, matematyka w całości jako już wytworzona i istniejąca w perspektywie historyczno-społecznej (a więc matematyczne teorie, język, założenia, cele i kierunki rozwoju – mowa o matematyce klasycznej) jest stosunkowo mało zależna od działań i postaw poszczególnych jednostek, a wraz z nią również pewne podstawowe przesłanki epistemologiczne oraz ontologiczne, jak również metodologiczne.

Heller twierdzi, że taka sytuacja jest możliwa dzięki obecności pewnych doktryn filozoficznych w samej teorii matematycznej, niezależnych przekonań twórcy tej teorii (a niekiedy – jak pisze Heller – nawet wbrew takim przekonaniom)[26]. Na potrzeby niniejszej pracy należy rozszerzyć to stwierdzenie, uznając, że przesłanki, a nawet doktryny filozoficzne mogą być również zakorzenione w danej praktyce matematycznej, rozpatrywanej w konkretnej

[25] M. Heller, *How is philosophy in science possible?*, „Philosophical Problems in Science (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce)" (2019) nr 66, 237–240.

[26] M. Heller, *How is philosophy in science possible?...*, *dz. cyt.*, 240.

perspektywie historyczno-społecznej. Metodologicznym celem rozprawy jest wypracowanie metody analizy filozoficznej opartej na koncepcji „filozofii w nauce", która pozwala na pogłębienie badań z zakresu historii i filozofii matematyki.

1.4 Hipotezy badawcze i definicje najważniejszych pojęć

Hipotezy badawcze

Niniejsza praca dąży do uzasadnienia dwóch głównych tezy, powiązanych z następującymi hipotezami szczegółowymi:

Teza I: Radykalne rozróżnianie Cantor-platonik i Dedekind-konstruktywista nie jest jedyną możliwą interpretacją ich stanowisk filozoficznych oraz bywa osłabiane.

W zakresie tradycyjnej filozofii matematyki Dedekind jest klasyfikowany przeważnie jako konstruktywista, konceptualista, zaś Cantor przeważnie jako platonik (skrajny realista)[27]. Porównując założenia filozoficzne obu uczonych, oparte na analizie ich praktyki matematycznej (nie zaś na ich pozamatematycznych stwierdzeniach), nie otrzymujemy tak wyraźnego, a nawet analogicznego rozróżnienia pomiędzy nimi, jak to opisane powyżej. Udowadniając powyższe, otrzymamy kolejny argument za przydatnością stosowania i pracowania w ramach opisywanej przez Hellera „filozofii w nauce", oraz proponowanej współcześnie PMP.

Teza II: W praktyce matematycznej Cantora i Dedekinda możemy zaobserwować znaczne i bardziej fundamentalne różnice niż w rekonstruowanych w niniejszej pracy ich stanowiskach epistemicznych oraz ontologicznych.

Teza I jest związana z następującymi hipotezami szczegółowymi:

Teza a: U Cantora można zrekonstruować określone elementy konstrukcjonizmu poznawczo-metodologicznego, związanego z ontologicznym strukturalizmem w jego praktyce matematycznej.

Będziemy chcieli pokazać, że pewne elementy praktyki matematycznej Cantora wskazują na konstrukcjonizm, jako naturalną część jego praktyki matematycznej, dyktowaną ontologią konstruowanych struktur. Wskażemy zwłaszcza na fakt, iż stopień abstrakcji i

[27] Por. np. z: J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Kraków-Tarnów 2000; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 2001, 255–258.

złożoności tych struktur nie pozwala na uchwycenie ich w bezpośredni i całkowity sposób, w apriorycznej naoczności.

Teza b: U Dedekinda można rozpoznać przejawy filozoficznej postawy strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, będącego przyczyną, a nie skutkiem użycia elementów konstrukcjonistycznych.

Będziemy przede wszystkim wskazywać, iż przypisywany tu Dedekindowi konstrukcjonizm (jako alternatywa dla przypisywanego mu konstruktywizmu[28]) nie wynikał z podstawowych i fundamentalnych dla niego założeń, lecz był konsekwencją podejścia strukturalistycznego i metody teoriomnogościowego modelowania (tzw. strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego) w jego matematycznej praktyce.

Teza c: Tezy a oraz b nie wykluczają dwuwymiarowego, pragmatycznego realizmu ontologicznego matematycznych obiektów (zarówno podstawowych, jak i konstruowanych z nich struktur), wewnętrznego względem praktyki indywidualnej Cantora i Dedekinda, jak i wewnętrznego względem perspektywy społeczno-historycznej.

Rozważony zostanie podstawowy realizm matematycznych obiektów, względem praktyki matematycznej tak Cantora, jak i Dedekinda. Realizm ten będzie odnosił się zarówno do obiektów podstawowych, jak i do konstruowanych z nich struktur (tzw. strukturalizm nieeliminacyjny). Co więcej, będzie również w pewien sposób związany z ontologią matematycznej wiedzy obiektywnej, tj. istniejącej intersubiektywnie względem perspektywy społeczno-historycznej.

Definicje najważniejszych pojęć

Poniżej zdefiniujemy kilka najistotniejszych pojęć, na których opieramy główną strukturę analiz pracy. Definicje te nie stanowią wyczerpujących opisów tych pojęć, tj. nie uwzględniają wszystkich możliwych podejść, w jakich się pojęcia te w filozofii używa, lecz mają na celu przybliżyć ich, najbardziej istotne dla struktury rozprawy, aspekty i uniknąć niezamierzonych interpretacji. Dyskusja w rozprawie będzie się zatem opierała na przedstawionych niżej aspektach tych pojęć.

[28] Różnica pomiędzy konstrukcjonizmem a konstruktywizmem zostanie dalej zdefiniowana i dokładnie omówienia w trakcie analiz, jednak już teraz można stwierdzić, iż jej istotą jest stosunek obydwu do ontologii matematyki. W ramach konstrukcjonizmu lepiej można pogodzić kwestie epistemiczne z ontologicznymi.

Platonizm

W niniejszej pracy platonizm jest pojęciem ograniczonym do kierunku, jaki sam deklarował Cantor oraz jaki się mu przypisuje, głównie na podstawie jego tekstu z 1883 roku[29], ale również w oparciu o jego liczne komentarze filozoficzno-teologiczne.

Najistotniejsze aspekty platonizmu Cantora to istnienie każdej rzeczy (tu mamy na myśli obiekty-byty matematyczne) na dwa sposoby – tak jak istnieją idee oraz tak jak istnieją pojęcia, w dwóch porządkach – intrasubiektywnym (immamentnym) i transsubiektywnym (transcendentnym)[30]. Jak zauważa Jerzy Dadaczyński[31], Cantor używał w swojej filozoficzno-teologicznej argumentacji zarówno pojęcia idei Platońskich, jak i pojęcia idei Spinozjańskich (co Dadaczyński analizuje), traktując je jako tożsame lub zamienne pojęcia, zatem nie będzie nas interesowało szczegółowe rozróżnienie tychże. Najistotniejszy jest fakt, iż dla każdego pojęcia ze sfery intrasubiektywnej (odpowiadającej Intelektowi), istnieje odpowiadająca mu również rzeczywistość transsubiektywna (odpowiadająca „światowi zewnętrznemu" – tj. temu, co nie należy do Intelektu)[32], niezależna od poznającego podmiotu matematycznego.

W niniejszej pracy zajmujemy się zarówno ontologicznymi, jak i epistemologicznymi aspektami filozofii matematyki Cantora i Dedekinda, dlatego w definicji platonizmu Cantora należy ująć to, co wiąże się również z epistemologią w jego wydaniu.

---

[29] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*; J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1*, „Studia Philosophiae Christianae" 39, (2003) nr 1, 10.

[30] „Wir können in zwei Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen; genau genommen sind es aber dieselben zwei Beziehungen, in welchen allgemein die Realität von irgend welchen Begriffen und Ideen in Betracht gezogen werden kann"; oraz „es sei mir gestattet, diese Art der Realität unsrer Zahlen ihre intrasubjektive oder immanente Realität zu nennen... Diese zweite Art der Realität nenne ich die transsubjektive oder auch transiente Realität der ganzen Zahlen". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 181.

[31] J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1..., dz. cyt.*, 13.

[32] „Bei der durchaus reaiistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es fur mich keinem Zweifel, daß diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden in dem Sinne, daß ein in der ersten Hinsicht als existent zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 181.

Otóż najważniejsza kwestia, nierozerwalnie związana z platońską ontologią matematyki w ujęciu Cantora: to aprioryzm poznania matematycznego przez podmiot[33]. Po drugie, ważną rzeczą jest ujęcie poznania matematycznego jako poprawnego definiowania pojęciowego[34]. Po trzecie, owo definiowanie pojęć nie oznacza ich tworzenia, ponieważ jest jedynie „budzeniem ich do życia"[35]. Można stwierdzić, że w ogólnych ramach deklarowany przez Cantora platonizm opierał się na ogólnej jego definicji[36].

W niniejszej pracy poddamy dyskusji brak zasadności używania mocnych, zewnętrznych względem praktyki matematycznej argumentów dotyczących ontologii tworzonej matematyki, przy jednoczesnym wskazaniu na niezbędność intencjonalnych, umysłowych procesów konstrukcyjnych, w kontekście wprowadzanych matematycznych struktur. Innymi słowy, wskażemy, że z punktu widzenia rzetelności naukowej, matematyka, jak i praktyka matematyczna nie są wystarczającymi argumentami na istnienie niezależnych od działalności człowieka obiektów matematycznych, które w praktyce mają być według tego założenia odkrywane (chociaż należy zaznaczyć, iż nie stanowi to też argumentu przeciwko takiemu stanowi rzeczy)[37]. Pomocniczo wskażemy, że struktury matematyki XIX wieku różnią

---

[33] „Erst seit dem neueren Empirismus, Sensualismus und Skeptizismus, sowie dem daraus hervorgegangenen Kantischen Kritizismus glaubt man die Quelle des Wissens und der Gewißheit in die Sinne oder doch in die sogenannten reinen Anschauungsformen der Vorstellungswelt verlegen und auf sie beschranken zu müssen; meiner Überzeugung nach liefern diese Elemente durchaus keine sichere Erkenntnis, weil letztere nur durch Begriffe und Ideen erhalten werden kann". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*, 207.

[34] Podmiot po pierwsze posiada konkretną wiedzę bazową poprzez gotowe i wypróbowane już pojęcia, po czym konstruuje następne w oparciu o nie (określając relacje pomiędzy nową nazwą a już istniejącymi oraz wyliczając jej własności). Konstruowane pojęcia powinny być wewnętrznie niesprzeczne oraz odróżnialne od innych, gotowych już pojęć. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*, 182, 207.

[35] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*, 207.

[36] Ø. Linnebo, *Platonism in the Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2018.

[37] Najbardziej adekwatnym stanowiskiem, jakie może stanowić podstawę dla podejścia przyjętego w niniejszej pracy (lub go po części wyjaśniać), oprócz pragmatycznego podejścia PMP, skoncentrowanego na praktyce matematycznej, jest stanowisko Piotra Błaszczyka. W jednym z artykułów opisuje on propozycję przedstawienia przedmiotów matematyki, jako przedmiotów intencjonalnych w sensie Ingardena. W niniejszej pracy co prawda nie zajmujemy się budową formalną ontologii obiektów matematycznych, niemniej jednak proponowane tu konstrukcjonizm epistemologiczny oraz pragmatyczny realizm nie wykluczają opracowanej przez Błaszczyka szczegółowej struktury ontologicznej. W obu przypadkach następuje zawężenie obszaru filozofii matematyki do tego, co można bezpośrednio zbadać i zaobserwować. Por. P. Błaszczyk, *On the Mode of Existence of the Real Numbers...*, *dz. cyt.*

się znacznie stopniem złożoności od tych, jakie przytaczał sam Platon[38] – nie wystarczy sama naoczność, intuicja, aby móc je zdefiniować.

Realizm ontologiczny

W związku z tym, iż u Cantora osłabiamy jego deklarowany platonizm, natomiast u Dedekinda podważamy przypisywany mu, towarzyszący konstruktywizmowi, konceptualizm, punktem odniesienia dla rekonstruowanej ontologii obydwu matematyków powinien być również pewnego rodzaju realizm. Niniejszym spróbujemy go zdefiniować w jak najogólniejszej formie.

Należy zaznaczyć, iż proponowany realizm powinien być rozpatrywany w ścisłym kontekście praktyki matematycznej, jednakże z drugiej strony – jest on również propozycją podtrzymującą tradycyjną perspektywę filozofii matematyki.

Pojęciem istotnym dla zrozumienia tego rodzaju ontologii jest pojęcie obiektu. Obiekt – jak definiował go Gottlob Frege – może być przedmiotem pojedynczego matematycznego stwierdzenia, sądu (natomiast pojęcie jego predykatem)[39]. Należy zaznaczyć, że nie bierzemy pod uwagę późniejszych rozważań ontologicznych Fregego.

PMP zakłada, że nie istnieją sądy „znikąd"[40], dlatego należy zauważyć, iż stwierdzenia muszą być wynikiem konkretnej praktyki matematycznej (zarówno indywidualnej, jak i społeczno-historycznej). Mimo że Chateaubriand zauważa problem, że dany matematyczny przedmiot raz może być obiektem, a raz predykatem[41], przyjmujemy że – z uwagi na pragmatyczne aspekty praktyki matematycznej – każdy przedmiot, który może być obiektem w danej praktyce matematycznej, jest względem niej obiektem istniejącym. Stąd dla każdej konkretnej praktyki i konkretnego matematyka można stworzyć konkretną listę (bardziej podstawową lub rozszerzoną) tego, co stanowi przedmiot jego dyskursu (co jest obiektem jego

[38] Janusz Mączka tak charakteryzuje postawę Platona względem poznania matematycznego: „Ponieważ formy matematyczne ujmujemy bezpośrednio za pomocą intuicji (matematyk 'ogląda', 'widzi' idee), możliwe staje się dzięki takiemu ujęciu stwierdzenie istnienia tych obiektów. Krócej: ponieważ obiekty matematyczne są pewnego rodzaju ideami, dlatego nie jest potrzebny dowód ich istnienia. W matematyce nie ma 'konstruowania', jest 'uzmysławianie'". J. Mączka, *Platonizm w matematycznych pracach Whiteheada*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXI, (1997), 34.

[39] G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, New York 1953, 77.

[40] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*

[41] O. Chateaubriand, *The Ontology of Mathematical Practice*, „Notae Philosophicae Scientiae Formalis" 1, (2012) nr 1, 84.

matematycznej praktyki). Taką listę możemy też ułożyć w danym momencie czasowym dla praktyki historyczno-społecznej.

Nie zajmujemy się bardziej szczegółowym opisem tego, w jaki dokładnie sposób, w jakim czasie oraz w jakiej rzeczywistości istnieją obiekty matematyczne. Określamy jedynie podstawowy i niezbędny dla praktyki matematycznej realizm, wskazujemy na możliwość oraz pragmatyczną potrzebę uwzględnienia takiego rodzaju istnienia. Nie jest to broniony przez niektórych myślicieli[42] platonizm, jaki wymaga w praktyce matematycznej zetknięcia się z obiektami lub rzeczywistością, niewytworzonymi w żadnych aktach konstrukcyjnych poznającego umysłu.

Nie oznacza to również, iż każdy istniejący obiekt w danej praktyce matematycznej jest w tejże praktyce skonstruowany. Wręcz przeciwnie, wskazane zostaną obiekty bezpośrednio przejęte ze zbioru wiedzy obiektywnej zarówno u Cantora, jak i u Dedekinda. Jednakże zakładamy, iż obiekty już istniejące w perspektywie historyczno-społecznej musiały zostać skonstruowane i (lub) wprowadzone wcześniej w konkretnej, indywidualnej praktyce matematycznej. Niemniej jednak, aby uznać dany obiekt za obiekt istniejący względem praktyki któregoś z analizowanych w tej pracy matematyków, musi on być przedmiotem ich matematycznych stwierdzeń (sądów). W tym sensie podział sądów ontologicznych na wewnętrzne oraz zewnętrzne nabiera kształtu, bo definiuje sądy zewnętrzne jako sądy poza-matematyczne (oraz przypisuje treści platonicznych stwierdzeń egzystencjalnych zewnętrzny, poza-matematyczny realizm).

Ostatecznie przychylamy się do stanowiska, że obiekty matematyczne, wytworzone w indywidualnej praktyce matematycznej lub względem niej w abstrakcyjny sposób istniejące, stają się jednocześnie obiektywnie istniejącymi[43] obiektami (również w sposób abstrakcyjny) względem społeczno-historycznej praktyki matematycznej[44]. Stanowi to odpowiedź na

[42] Z. Król, *O platonizmie w teorii mnogości*, „Roczniki Filozoficzne" LI, (2003) nr 3, 225–252; Z. Król, *Platonizm w matematyce a platonizm w naukach matematyczno-przyrodniczych*, w: *Filozofia przyrody dziś. Philosophy of nature today*, red. W. Ługowski, I. K. Lisiejew, Warszawa 2011.

[43] W takim sensie, w jakim Popper traktuje istnienie świata 3. Zob. K.R. Popper, *Wiedza obiektywna*, tłum. A. Chmielewski, Warszawa 1992.

[44] Jessica Carter wyjaśnia możliwość abstrakcyjnego istnienia obiektów tym, że można o nich z powodzeniem mówić, konstruować je oraz badać w praktyce matematycznej. Wskazuje ona, że obiekty matematyczne są wprowadzane przez matematyków w celu rozwiązywania konkretnych problemów oraz konstruowane przy pomocy dostępnych metod. Zgadza się to z przyjętym w niniejszej pracy podejściem. Por. J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice*, „Philosophia Mathematica" 12, (2004) nr 3, doi: 10.1093/philmat/12.3.244.

związane z tym podejściem dyskusje o statusie uzyskanej wiedzy jako subiektywnej lub obiektywnej. Sądzimy, że dobrym uzupełnieniem podejścia PMP jest Popperowska ontologia trzech światów. Pozwala ona z klasycznej perspektywy filozoficznej wyjaśnić propozycje PMP oraz pogodzić procesy konstrukcyjne podmiotów z podzielnym szeroko poglądem o obiektywnym istnieniu obiektów matematycznych.

W niniejszej pracy przyjmujemy dwuwymiarową ontologię obiektów matematycznych: stwierdzamy pewne rozróżnienie między obiektami świata III (zawartymi np. w tekstach, wyprodukowanymi i stanowiącymi podstawę dla wiedzy dziedziczonej) oraz obiektami świata II (przejmowanymi z zasobu świata III – dziedziczonymi, uczestniczącymi w indywidualnych procesach poznawczych, oraz obiektami z nich – lub na ich podstawie – konstruowanymi). Chcemy tak opisać to, że dany obiekt matematyczny jest najpierw konstruowany przez konkretny podmiot (nie odnosimy się tu do kwestii różnorakich wpływów zewnętrznych na ten proces). Następnie w jakimś stopniu może się on stać obiektem istniejącym w pewnym stopniu niezależnie względem perspektywy (praktyki) społeczno-historycznej, zaś dalej może znowu stać się obiektem rozważanym przez inny podmiot, w jego indywidualnej praktyce matematycznej.

Realizm ontologiczny rozważany w niniejszej pracy będzie realizmem względem indywidualnej praktyki matematycznej obu uczonych. Podążając za propozycjami filozofii praktyki matematycznej, uwzględniamy perspektywę społeczno-historyczną jako nieodłączną kwestię rozwoju matematycznej wiedzy, przejawiającej się m.in. na przykładzie elementów wiedzy dziedziczonej u obydwu matematyków.

W nazwie tego realizmu będziemy używać czasem określeń – jednocześnie albo wymiennie – „dwuwymiarowy" oraz „pragmatyczny". Pojęciem dwuwymiarowości podkreślamy to, że indywidualna praktyka matematyczna jest miejscem, które łączy dwie perspektywy rozumienia matematycznej wiedzy (obiektów): po pierwsze, istotne jest tu odpowiednie rozumienie społeczno-historyczne celowości i funkcji danego obiektu matematycznego, a po drugie – również istotny jest aspekt takiego rozumienia celowości i funkcji przejętego i rozważanego obiektu, który odpowiada przyjętej metodologii rozwiązywania problemów, zwłaszcza konstrukcji nowych obiektów. Jeśli chodzi o pojęcie pragmatyczności, będzie tu chodziło o to, że przyjmujemy istnienie obiektów zarówno względem indywidualnej praktyki matematycznej, jak i względem perspektywy (praktyki) społeczno-historycznej, ponieważ te obiekty są przedmiotami tych praktyk (tj. można je definiować, rekonstruować oraz konstruować przy ich pomocy kolejne)[45].

Konstruktywizm konceptualistyczny

Stanowisko to przypisywane jest Dedekindowi w perspektywie tradycyjnej filozofii matematyki, m.in. w polskim środowisku naukowym[46]. Odnosi się ono do tych momentów w jego matematycznej pracy, gdy używał on określeń, opisujących proces, aktywność twórczą umysłu, wskazując na możliwość tworzenia (a tak naprawdę zredefiniowania w modelu formalnym) liczb rzeczywistych oraz naturalnych[47].

Na przykład Jan Łukasiewicz, podkreślając rolę „twórczej działalności człowieka", powoływał się na słynne stwierdzenie Dedekinda, który (w kontekście redefiniowania liczb naturalnych w teoriomnogościowym modelu zbioru prosto nieskończonego) pisał, że „liczby są wolnym tworem umysłu"[48]. Z kolei Roman Murawski wskazywał, że wobec konstrukcji liczb rzeczywistych Dedekind użył na określenie tworzenia liczb rzeczywistych pojęcia *erschaffen*, tożsamego z pojęciem użytym w Księdze Rodzaju do opisu stwarzania świata przez Boga[49]. Niekiedy zaś wprost przyznaje się Dedekindowi miano konstruktywisty[50], a nawet konceptualisty[51].

---

[45] Por. J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice…*, *dz. cyt.*

[46] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym…*, *dz. cyt.*; J. Łukasiewicz, *O nauce*, w: *Poradnik dla samouków*, Warszawa, Kraków 1915, XV–XXXIX; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów…*, *dz. cyt.*

[47] Odpowiednio w dwóch dziełach: R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen…*, *dz. cyt.*; oraz R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?…*, *dz. cyt.*

[48] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?…*, *dz. cyt.*, 359–360; J. Łukasiewicz, *O nauce…*, *dz. cyt.*

[49] R. Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki*, „Przestrzenie Teorii" 3–4, (2004), 257.

[50] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym…*, *dz. cyt.*; J. Dadaczyński, *Ontologia matematyki wczesnego Hilberta (The Early Hilbert's Ontology of Mathematics)*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 26, (2018) nr 4, 75–88, doi: 10.14394/filnau.2018.0025; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów…*, *dz. cyt.*

[51] R. Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki…*, *dz. cyt.*, 257.

U Dedekinda dyskutowane będzie stanowisko odmienne od Cantorowskiego zarówno pod kątem ontologii, jak i epistemologii. Dedekindowi przypisuje się założenia, które stwierdzają, iż podmiot konstruuje („w wolny sposób”) matematykę w swoim umyśle. Co więcej, tak stworzone obiekty istnieją jedynie w umyśle tego podmiotu, w postaci pojęć.

Tym więc, co oprócz aspektów konceptualistycznych będziemy w kontekście konstruktywizmu analizować, będzie również kwestia rozumienia, co dokładnie kryje się pod pojęciem „tworzenia” matematycznej wiedzy. Będzie chodziło zwłaszcza o to, że chociaż będziemy przypisywali Dedekindowi podstawowy konstrukcjonizm – czyli po części zgadzali się z faktem, iż indywidualna matematyczna praktyka może pociągać za sobą wymóg aktywnego, twórczego wkładu danego matematyka – będziemy wskazywać iż tradycyjny konstruktywizm pociąga za sobą problemowe rozumienie tworzenia wiedzy, jako oderwanej od tej, która już istnieje. Jako alternatywę dla tradycyjnego konstruktywizmu. Zaproponujemy konstrukcjonizm epistemiczny, który powinien pogodzić obydwie perspektywy – tj. kwestię konstruowania matematyki przez indywidualnego matematyka, jak i kwestię realizmu wewnętrznego względem praktyki indywidualnej, jak również względem perspektywy społeczno-historycznej.

Konstrukcjonizm poznawczy

Aby wyjaśnić stosowane tu pojęcie konstrukcjonizmu poznawczego (lub epistemicznego), należy przyjrzeć się w tym celu różnicom między pojęciem konstrukcjonizmu a konstruktywizmu.

Konstruktywizm w filozofii matematyki jest kojarzony przeważnie z konstruktywistycznymi nurtami samej matematyki – jak np. intuicjonizm Luitzena Brouwera. Jest to kierunek przyjmujący radykalne założenia, ingerujące w matematykę klasyczną, tj. w samą praktykę matematyczną. Zakłada on poprawność jedynie metod konstruktywnych w matematyce, przez co odrzucane jest np. prawo wyłączonego środka, Aksjomat Wyboru, jak również rezygnuje się z nieskończoności aktualnej[52].

Konstrukcjonizm, jaki proponujemy w niniejszej pracy dla lepszego scharakteryzowania epistemologii praktyki matematycznej zarówno Cantora, jak i Dedekinda,

[52] D. Bridges, E. Palmgren, H. Ishihara, *Constructive Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, U. Nodelman, 2022; R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.

rozumiany jest w nieco inny sposób. Nie jest kierunkiem utożsamiającym praktykę matematyczną ze wspomnianymi metodami konstrukcyjnymi, dlatego nie jest on tożsamy z kierunkami będącymi podstawą konstruktywnych matematyk[53].

Proponowany tutaj konstrukcjonizm epistemiczny (wraz z proponowanym realizmem ontologicznym) wprowadzony został w celu podjęcia próby przełamania dychotomii platonizm-konstruktywizm, obowiązującej w nurcie klasycznej filozofii matematyki[54].

Jak zauważa Jessica Carter, matematyczne obiekty są wprowadzane przez matematyków w konkretnym celu (w celu rozwiązywania problemów) oraz konstruowane przy pomocy gotowych metod[55]. Przy czym – jak się okaże – nie zawsze wprowadzenie nowego obiektu musi być (świadomym) celem matematyka przeprowadzającego umysłową konstrukcję. Pojęcie konstrukcjonizmu poznawczego jest więc związane z pojęciem umysłowej konstrukcji stosowanej w praktyce matematycznej, ta zaś jest związana z kolei z intencjonalnością[56] (występującą w kontekście stanów psychologicznych) oraz intuicją[57] (związaną głównie z propozycją Kanta, ale analizowaną w świetle propozycji Marcusa Giaquinto).

Konstrukcjonizm proponowany tutaj nie zakłada istniejących poza poznającym podmiotem idei, które biernie poznajemy. Przychyla się bardziej do propozycji Kanta, podkreślając konstrukcyjną pracę matematycznego podmiotu, jaką wykonuje on w trakcie swej praktyki matematycznej. Umysłowa konstrukcja, jak i pewnego rodzaju naoczność (intuicja) oraz intencja (matematyczny zamiar, kształtowany przez założenia i cele) jej towarzyszące, będą stanowiły podstawę do analizowania aspektów epistemologii Cantora oraz Dedekinda.

---

[53] Inne rozróżnienia pomiędzy konstruktywizmem a konstrukcjonizmem wskazuje Marcin Zwierżdżyński: M.K. Zwierżdżyński, *Konstruktywizm a konstrukcjonizm*, „PRINCIPIA" LVI, (2012), 117–135, doi: 10.4467/20843887PI.11.007.0583.

[54] J. Mączka, *Platonizm w matematycznych pracach Whiteheada*..., *dz. cyt.*, 34–35.

[55] J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*

[56] G.E.M. Anscombe, *Intention*, Oxford 1976; P. Jacob, *Intentionality*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2019; J.R. Searle, *The intentionality of intention and action*, „Cognitive Science" 4, (1980), 47–70; J.R. Searle, *Intentionality: An Essay in the Philosophy of Mind*, Cambridge 1983.

[57] Skorzystamy w tym celu głównie z propozycji Giaquinto odnośnie do wizualizacji obiektów matematycznych, w tym struktur (pewnego ich umysłowego uchwycenia). M. Giaquinto, *Cognition of Structure*, w: P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford 2008, 43–64; M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics*, w: P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford 2008, 22–42; M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, Metaphysics Research Lab, Stanford University 2020.

Mówiąc o umysłowej konstrukcji, mamy na myśli ogólny, niezbędny w praktyce matematycznej proces, który nie zakłada istnienia gotowych do odnalezienia i zobaczenia idei, obiektów matematycznych, ale rodzaj aktywności umysłowej, polegającej na intencjonalnym (tj. zawierającym założenia i cele) oraz logicznym rozumowaniu i tworzeniu matematycznych treści. Przy założeniu, iż towarzyszy temu zarówno kontekst intuicji indywidualnego podmiotu, jak i wiedzy już istniejącej w sposób obiektywny.

Mówiąc o intuicji, nie mamy na myśli Kantowskich czystych naoczności czasu i przestrzeni, a raczej zdolność pewnego oglądu matematycznych obiektów i struktur. Chociaż nie jest naszym celem wykluczenie kategorii czystych naoczności proponowanych przez Kanta, nie zagłębiamy się szczegółowo w takie kwestie, jak możliwy jest dostęp intuicji do matematycznych obiektów czy też jak dokładnie przebiega proces konstrukcji wszystkich pojęć lub struktur[58]. Wprawdzie podejście to inspirowane jest filozofią Kanta, jednak jak widać nie bierzemy pod uwagę wszystkich elementów jego propozycji, mając na względzie w szczególności fakt, iż – jak się zauważa[59] – Kant nie wiedział o wielu matematycznych kwestiach, które dopiero dziś są rozwiązywane bądź tworzone. Innymi słowy, próbujemy w pewnym zakresie (o ile jest to potrzebne dla realizacji celów tej rozprawy) dostosować pomysł Kanta do współczesnej wiedzy o procesach tworzenia wiedzy matematycznej opisywanej w ramach PMP.

Jeśli zaś chodzi o pojęcie intencji (czy intencjonalności), mamy tu na myśli przede wszystkim składnik stanów psychologicznych, jaki opisuje Jacob Pierre w kontekście kierowania uwagi na przedmiot oglądu[60], jak również chodzi o pewien matematyczny zamiar (czy zbiór pewnych zamiarów), związany z konkretnymi matematycznymi problemami i próbą odpowiedzi na nie, jak to ujmuje Jessica Carter[61]. Przy czym oba aspekty tego pojęcia związane

[58] Kwestie te dyskutowane były np. przez Poincarégo, który chociaż opowiadał się za najważniejszymi elementami propozycji Kanta, zmodyfikował niektóre wyjaśnienia. H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris 1900. Można jego postawę próbować wytłumaczyć tym, iż kładł on nacisk na różnorodność matematyki i praktyk w jej obrębie – stąd jego uzupełnienie kategorii czasu i przestrzeni o „wrodzoną" intuicję ciągłości czy nieokreślonej bliżej iteracji. Niemniej jednak, temat ten wymaga odrębnego opracowania.

[59] L. Shabel, *Kant's Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, Metaphysics Research Lab, Stanford University 2021.

[60] P. Jacob, *Intentionality...*, *dz. cyt.*

[61] J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice...*, *dz. cyt.*

są z procesami (stanami) psychologicznymi (oraz z samą intuicją), ale można je przedstawić przy pomocy formalnej definicji i klasyfikacji J.R. Searle'a[62].

Tym jednak, co odróżniać będzie proponowany tu konstrukcjonizm od nurtu matematycznego konstruktywizmu (np. intuicjonizmu), będą wskazane elementy wiedzy zastanej (lub dziedziczonej czy też przejmowanej). W odróżnieniu bowiem od propozycji tradycyjnej filozofii matematyki, gdzie istnieje możliwość skupienia się wyłącznie albo na – indywidualnym – podmiocie matematycznym (jak robi np. Brouwer), albo na przedmiocie matematycznym i sposobie jego istnienia (jak się to robi np. w platonizmie ontologicznym), PMP umożliwia przyjęcie szerszej perspektywy. W odróżnieniu od konstruktywizmu, gdzie podkreśla się znaczenie jedynie indywidualnej konstrukcji umysłowej (gdzie istnienie matematycznego przedmiotu warunkowane jest konstruowaniem go w umyśle idealnego matematyka)[63], dla konstrukcjonizmu będzie również istotny kontekst historyczno-społeczny, który wykluczy interpretację twórczości matematycznej jako „tworzenie czegoś z niczego". Chociaż matematyczne obiekty są konstruowane w sposób intencjonalny[64], rozwój matematyki jako teorii jest ściśle połączony z odniesieniem do całokształtu dorobku praktyki matematycznej z perspektywy historyczno-społecznej (rozumianej również jako nietrywialna suma praktyk indywidualnych)[65], a więc umysłowe tworzenie matematycznych treści w

---

[62] J.R. Searle, *The intentionality of intention and action..., dz. cyt.*; J.R. Searle, *Intentionality: An Essay in the Philosophy of Mind..., dz. cyt.*

[63] R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics..., dz. cyt.*

[64] Być może w niniejszej pracy należałoby założyć, iż matematyczne obiekty to – przynajmniej w formalnej strukturze ontologii – obiekty intencjonalne Ingardena, w taki sposób w jaki opracował to Błaszczyk (P. Błaszczyk, *On the Mode of Existence of the Real Numbers..., dz. cyt.*). Niemniej jednak, z różnych względów, zaznaczamy na razie jedynie, iż perspektywa niniejszej pracy może być kompatybilna z propozycją Błaszczyka (zarówno odnośnie do proponowanego tu konstrukcjonizmu epistemicznego, jak i pragmatycznego realizmu ontologicznego), jednak są to propozycje różniące się w zakresie opracowywanych treści. Bardziej zaawansowane badania, pokazujące uzupełnianie się tych propozycji, mogą wymagać szczegółowych analiz przedmiotowych, jak również badań porównujących np. matematykę ze sztuką (sposobów i celów wprowadzania obiektów tak matematyki, jak i sztuki).

[65] Można w tym miejscu odnieść się do podejścia konstrukcjonizmu społecznego, jakie jest przedstawione np. w: J. Rytilä, *Social constructivism in mathematics? The promise and shortcomings of Julian Cole's institutional account*, „Synthese" 199, (2021) nr 3, 11517–11540, doi: 10.1007/s11229-021-03300-7. Chociaż konstrukcjonizm (ani konstruktywizm) społeczny nie jest przedmiotem badań niniejszej rozprawy, nie sposób nie wziąć pod uwagę perspektywy historyczno-społecznej, jaka wpływała na kontekst badawczy obydwu, analizowanych w niniejszej pracy matematyków. Wydaje się, że dodatkowym argumentem za przyjęciem tutaj pojęcia konstrukcjonizmu poznawczego dla określenia procesu poznawczego nowych, wprowadzanych treści w indywidualnej praktyce matematycznej, jest to, jak konstrukcjonizm społeczny jest definiowany. Mirja Hartimo i Jenni Rytilä piszą, że w konstrukcjonizmie społecznym „nie skupiamy się na ontologii grup społecznych czy kolektywnej intencjonalności, ale na ontologii społecznej bytów zależnych od wspólnych praktyk", ponieważ „obiekty matematyczne są konstrukcjami społecznymi w tym sensie, że są zamierzonymi lub niezamierzonymi produktami praktyk matematycznych". M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic: From Phenomenology of Practice to Social Ontology of Mathematics*, „Topoi" 42, (2023) nr 1, 290, doi: 10.1007/s11245-022-09859-1. Dodatkowo

konkretnej, indywidualnej praktyce matematycznej, nie jest dowolne i nieograniczone – odnosi się i wpisuje w konkretne ramy problemowe i znaczeniowe (co akcentuje się coraz częściej we współczesnej filozofii matematyki)[66].

Strukturalizm

W analizach epistemologii oraz ontologii praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda odwoływać się będziemy do pojęcia strukturalizmu. Pierwszym powodem jest znaczny rozwój tego kierunku i jego różnorodna obecność we współczesnej filozofii matematyki[67], drugim zaś sam kształt i treść dziewiętnastowiecznej matematyki, gdzie złożone struktury zaczęły odgrywać coraz większą rolę (w niniejszej pracy analizujemy na przykład struktury liczbowe oraz teoriomnogościowe).

Należy rozróżnić dwa aspekty tego kierunku – jeden będzie aspektem metodologiczno-epistemicznym, drugi zaś aspektem ontologicznym. Poniżej opiszemy je bardziej szczegółowo.

Strukturalizm epistemologiczno-metodologiczny

W kontekście tego rodzaju strukturalizmu, skorzystamy z propozycji przypisywanej głównie Dedekindowi[68]. Chodzi o takie podejście do uprawiania matematyki, które zakłada przede wszystkim prymat działalności polegającej na opracowywaniu i analizowaniu struktur, tj. takich matematycznych obiektów, które są złożone z pewnych elementów (podstawowych lub podstruktur), oraz relacji między nimi. Jak piszą José Ferreirós i Erich Reck, omawiany strukturalizm „jest to styl pracy, który uzyskuje wyniki w danej gałęzi matematyki,

---

konstrukcjonizm, w odróżnieniu od konstruktywizmu, bierze pod uwagę ontologię matematyki. Piszą one, że: „Konstrukcjonizm społeczny jako pogląd metafizyczny uwzględnia te lekcje, oferując opis ontologii matematycznej, która uznaje zarówno znaczenie praktyk ludzkich, czynników historycznych i społecznych, jak i doświadczenie, że matematyka dotyczy abstrakcyjnych rzeczy, które istnieją na zewnątrz jednostki matematyk". M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic...*, *dz. cyt.*, 291.

[66] E. Piotrowska, *Dokąd zmierza filozofia matematyki?*, „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria R. 25" 98, (2016) nr 2, 565–578.

[67] E. Reck, G. Schiemer, *Structuralism in the Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.

[68] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions*, w: *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, red. E. H. Reck, G. Schiemer, New York 2020; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.

wydobywając je z natury odpowiednich struktur (jako zilustrowane w nich), a często z pewnych wzajemnych relacji między strukturami różnego rodzaju”[69].

U Dedekinda wskazuje się, iż wpływ na przypisywany mu epistemiczno-metodologiczny strukturalizm miało jego doświadczenie w zakresie uprawiania algebry wyższej (zwłaszcza teorii Galois), wtedy bardzo abstrakcyjnej dziedziny matematyki, nazywanej też ogólną arytmetyką z rachunkiem symbolicznym[70]. Chociaż odnośnie do budowy jego modeli liczbowych (N i R) wskazuje się na fakt, iż chciał oprzeć te modele na logicznych prawach, a więc przypisuje mu się w pewnych kręgach miano logicysty[71], oraz obala się subiektywny konstruktywizm poprzez wskazanie na klasyczność teorii Dedekinda oraz możliwość interpretacji jego słów o tworzeniu liczb w umyśle w świetle propozycji Kanta[72], w niniejszej pracy zaproponujemy nieco inne, poszerzone wyjaśnienie metodologii oraz epistemologii Dedekinda.

Propozycja ta również będzie uwzględniała strukturalizm jako podstawę metodologii i epistemologii praktyki matematycznej Dedekinda, ale dodatkowo pozwoli na bardziej uniwersalne rozumienie abstrakcji i konstrukcji w jego wydaniu. Otóż wskażemy, iż Dedekind stworzył modele liczbowe (N i R), przy pomocy narzędzi teoriomnogościowych tak, jak się modeluje zjawiska świata zewnętrznego (przyrody, mechaniki) przy pomocy narzędzi matematycznych[73].

Za takim stanowiskiem argumentować będą: świadomość celów, konsekwencja, skupienie na najistotniejszych, niezbędnych aspektach danej struktury oraz zbieranie ich w całość, a wreszcie kategoryczność (również potencjalna, czy spełniana pod pewnymi warunkami) modeli, rozpatrywana jako skuteczność (a więc poprawność) danego modelu. Jednocześnie będziemy chcieli przeanalizować, na ile takie podejście mogło charakteryzować

---

[69] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions..., dz. cyt.*, 59.

[70] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions..., dz. cyt.*, 66.

[71] J. Ferreirós, *Sets and Maps as a Foundation for Mathematics*, w: J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel 1999, 255.

[72] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions..., dz. cyt.*, 77.

[73] E.A. Bender, *An Introduction to Mathematical Modeling*, New York/Chichester/Brisbane/Toronto 1942.

Cantora, przy uwzględnieniu jego założeń filozoficznych, oraz obserwowanej praktyki matematycznej (jednak w jego przypadku wskazywać będziemy raczej na brak zasadności dla przypisywania tej metody).

Strukturalizm ontologiczny

Zgodnie z założeniami, oprócz strukturalizmu metodologiczno-epistemologicznego, w analizach ontologicznych używać będziemy nie tylko pojęcia realizmu ontologicznego, ale wprowadzimy również pojęcie ontologicznego strukturalizmu. Uważa się, iż uznanie przez Dedekinda strukturalnej budowy matematycznych obiektów wiąże się wynikami kategoryczności jego propozycji[74], konieczne jest zatem podjęcie badań w tym kierunku.

Podstawą strukturalizmu ontologicznego będzie rozszerzenie pojęcia obiektu tak, aby móc uwzględnić nie tylko obiekty podstawowe, przyjmowane *a priori* (wypróbowane już i należące do wiedzy obiektywnej), ale również wszelkiego rodzaju struktury, o których wypowiadają się w swojej praktyce matematycznej zarówno Cantor, jak i Dedekind.

Strukturalizm matematyczny – jak niektórzy wskazują – „to pogląd, że przedmiotem badań każdej gałęzi matematyki jest struktura lub struktury. Slogan łączony z tym kierunkiem brzmi: ‘matematyka jako nauka o strukturach’. [...] Problemy filozoficzne związane ze strukturalizmem dotyczą natury struktur i ich miejsc”[75]. W tym sensie podejście strukturalistyczne akcentuje relacje między obiektami czy też relacyjne obiekty jako struktury.

Wskazuje się na przynajmniej dwa różne podejścia do ontologii w strukturalizmie – podejście *in re*[76], gdzie zdania o strukturach są generalizacjami, tj. nie dotyczą bezpośrednio matematycznych obiektów, lecz takiej klasy przykładów, które spełniają pewne warunki (innymi słowy, gdy nie ma przykładów, nie ma potrzeby mówić o danej strukturze – przy czym w tym podejściu zakładana jest nieskończona ontologia bazowa neutralnych obiektów), oraz

[74] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions...*, *dz. cyt.*, 83.

[75] R. Audi (red.), *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, New York 1999, 453; I. Bondecka-Krzykowska, *Strukturalizm jako alternatywa dla platonizmu w filozofii matematyki*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 45, (2004) nr 1, 19.

[76] G. Hellman, *Structuralism without structures*, „Philosophia Mathematica” 4, (1996) nr 3, 100–123; C.D. Parsons, *The structuralist view o f mathematical objects*, „Synthese” 84, (1990), 303–346.

podejście *ante rem*[77], gdzie zakłada się istnienie struktur, nawet bez ich konkretnych przykładów. Podejście do ontologii w niniejszej pracy jest pragmatycznym połączeniem obu powyższych – zamierzamy uwzględniać zarówno ontologię (istnienie) obiektów podstawowych – tj. ontologii bazowej, jak i obiektów będących – nawet złożonymi – strukturami, przy czym odróżniamy również struktury konkretne (np. zbiór N lub R) od ich modeli.

Za Jessicą Carter będziemy wskazywać, iż same struktury nie wyczerpują możliwości ontologicznych, jakie da się zaobserwować w ramach praktyki matematycznej[78]. Tak jak zostało już wcześniej opisane, nie zamierzamy formułować takich filozoficznych sądów, które mogłyby ingerować lub ograniczać matematyczną praktykę. Stąd powyższa dychotomia może być zminimalizowana ze względu na pragmatyzm praktyki matematycznej oraz próbę podtrzymania różnorodności jej podejść. Realizm możemy przyznawać zarówno obiektom bazowym, strukturom, podstrukturom, jak i modelom konkretnych struktur – w zależności od przyjętego w praktyce matematycznej stanowiska, odnośnie do przedmiotu naszych badań i wypowiedzi.

Oprócz zdefiniowanych wyżej pojęć, najistotniejszych dla niniejszej pracy, wypada krótko opisać jeszcze samą koncepcję praktyki matematycznej. Poruszymy ten temat w następnym podrozdziale, bo jest on związany ściśle z metodologią i założeniami PMP.

1.5 Metody i założenia badawcze

W pracy wykorzystuje się przede wszystkim metodę analizy (w tym analizy porównawczej) wybranych tekstów matematycznych Cantora i Dedekinda oraz interdyscyplinarnej rekonstrukcji i syntezy[79] wniosków, dotyczących charakterystyki praktyki matematycznej obu naukowców i ich filozoficznych założeń.

Dalej przedstawimy dwa aspekty – szeroko rozumianej – filozofii matematyki, jakie stanowią podstawowe założenia, jak i bardziej szczegółowo charakteryzują metodę, celowość

---

[77] Por. S. Shapiro, *Structure and ontology*, „Philosophical Topics" XVII, (1989) nr 2, 145–170; S. Shapiro, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, New York 1997.

[78] J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice*, „Synthese" 163, (2008), 119–131, doi: 10.1007/s11229-007-9169-6.

[79] Por. Z rozdziałami: 5.3.7. Metoda analizy i krytyki piśmiennictwa (źródeł) oraz 5.3.8. Metoda analizy i konstrukcji logicznej, w: J. Apanowicz, *Metodologia ogólna*, Gdynia 2002, 72–74.

i zakres badawczy niniejszej pracy. Pierwszym aspektem jest „filozofia w nauce" (tu „w matematyce) Hellera, oraz najistotniejsze elementy PMP.

Filozofia w matematyce Hellera

Najistotniejszą i podstawową motywacją podejscia metodologicznego tej pracy jest inspiracja wprowadzonym przez Hellera podziałem filozofii odnoszącej się do nauk – na *filozofię nauki* oraz *filozofię w nauce*[80]. Choć w swoim artykule Heller nawiązuje do nauk empirycznych, podejście to, na potrzeby niniejszej rozprawy, zastosujemy w sposób analogiczny do matematyki. Można uzasadnić to faktem, iż tradycją jest, łączenie matematyki z naukami empirycznymi, a także korzystanie z określonych metod i podejść zaczerpniętych z filozofii nauk empirycznych, w ramach filozofii matematyki[81]. Dodatkowo, warto wskazać na naukowe efekty, jakie uzyskiwane są dzięki uprawianiu owej filozofii w fizyce[82] przez Hellera czy też filozofii w matematyce[83] przez Dadaczyńskiego.

W swoim artykule *Jak możliwa jest „filozofia w nauce"?* Heller oponuje przeciwko ścisłemu izolacjonizmowi między filozofią a naukami empirycznymi[84]. W niniejszej pracy przeciwstawiamy się takiemu rozdzielaniu filozofii od matematyki. Heller przedstawia trzy najistotniejsze grupy problemów filozoficznych, mających ścisły związek z problemami nauk empirycznych, tj. będące problemami z zakresu *filozofii w nauce*. Są to:

1. wpływ założeń (szerzej idei) filozoficznych na genezę i rozwój teorii naukowych;

[80] M. Heller, *Jak możliwa jest „filozofia w nauce"?*, „Studia Philosophiae Christianae" 22, (1986) nr 1, 7–19.

[81] L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[82] Niektóre z jego najnowszych prac to: A. Rolph i in., *Spacetime as a quantum circuit*, „arXiv" 2101.01185, (2021), doi: 10.1007/jhep04(2021)207; V. Svensson i in., *A quantum information perspective on meson melting*, „arXiv" 2206.10528, (2022), doi: 10.48550/ARXIV.2206.10528; B. Withers i in., *Hydrodynamic Gradient Expansion Diverges beyond Bjorken Flow*, „arXiv" 2110.07621, (2022), doi: 10.1103/physrevlett.128.122302.

[83] Por. np. z: J. Dadaczyński, *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Kraków-Tarnów 2006.

[84] Nie zgadza się on z podejściem niektórych filozofów przyrody, zwłaszcza neotomistów (np. K. Kłósak, *Z teorii i metodologii filozofii przyrody*, Poznań 1980; S. Mazierski, *Prolegomena do filozofii przyrody inspiracji arystotelesowsko-tomistycznej*, Lublin 1969.), którzy zbyt ostro i radykalnie rozdzielają płaszczyznę poznawczą w filozofii od płaszczyzny poznawczej w poszczególnych naukach, a także uważają, że metody i język stosowane w filozofii i w tych naukach nie są na siebie przekładalne. Michał Heller uważa, że właśnie dzięki przechodzeniu pewnych granic (tu między filozofią a naukami szczegółowymi) możemy poznawać coraz lepiej świat i tworzyć kolejne paradygmaty. Poza tym przypomina, iż wyróżniona przez niego filozofia w nauce istniała, odkąd istniały same nauki empiryczne. M. Heller, *Jak możliwa jest „filozofia w nauce"?*,*dz. cyt.*, 8–9.

2. filozoficzne problemy uwikłane w teorie naukowe (tj. ściśle związane, przenikające się kwestie filozoficzne z kwestiami naukowymi);
3. a także różnorakie, filozoficzne refleksje, odnośnie do założeń naukowych (jak również naukowych wyników i wniosków)[85].

W kontekście tych trzech, wyżej opisanych punktów, aby włączyć swoją pracę w ramy szerszego programu badawczego[86], będącego konsekwencją wyodrębnienia takiej dziedziny filozofii, jaką jest *filozofia w nauce*, należy rozważyć, które z tych punktów oraz w jaki sposób mogą być podstawą analiz niniejszej pracy.

Po drugie, należy rozważyć, jak kwestie analizowane w ramach *filozofii w nauce* można pogodzić z pojęciem praktyki matematycznej, opisywanej przez założenia i cele filozofii praktyki matematycznej, która jest drugim filarem opisującym podejście i założenia przyjęte tutaj. Założenia filozoficzne, które zamierzamy porównywać, wyłaniane będą na drodze analizy, szeroko pojętej praktyki matematycznej zarówno Cantora, jak i Dedekinda[87].

Odnośnie do pierwszego, wydaje się, że mając na względzie cele i przedmiot niniejszej pracy w oparciu o wyszczególnione przez Michała Hellera zakresy badawczej problematyki, można wziąć pod uwagę poniższe kwestie:

(1) wpływ deklarowanych założeń filozoficznych Cantora i Dedekinda na tworzone przez nich teorie, jak również na ich praktykę matematyczną (głównie metodologię;

(2) próby wyodrębnienia filozoficznych zagadnień z badanych zagadnień matematycznych (chodzi tutaj o podstawowe aspekty ontologii oraz epistemologii, zawartych w matematycznych treściach);

[85] M. Heller, *Jak możliwa jest „filozofia w nauce”?,dz. cyt.*, 9.

[86] Zaproponowanym właśnie przez ks. prof. Michała Hellera.

[87] Można wspomnieć, że takie podejście do filozofii matematyki jest zbieżne np. z podejściem Paula Bernaysa czy Williama Taita, którzy twierdzą, iż nie można powiedzieć o filozofii matematyki za wiele bez wiedzy na temat czynności (czy ich celu), jakie może podmiot w ramach uprawiania matematyki wykonywać. Wbrew ich niektórym twierdzeniom (uważając naturalną postawę ontologiczną – którą reprezentuje Arthur Fine w dyskusji o realizmie w filozofii nauki – za ograniczoną perspektywę poznawczą) nie uważamy, iż jest to jedyna i ostateczna perspektywa, z jakiej należy przyglądać się matematyce oraz jej filozofii. Por. P. Bernays, *Platonism in mathematics (Sur le platonisme dans les mathématiques. L'Enseignement Mathematique 1935 (34), 52-69)*, w: *Philosophy of Mathematics Selected Readings*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, tłum. C. D. Parsons, Cambridge 1983, 258–271; W. Tait, *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and its History*, Oxford 2005.

(3) aż wreszcie ogólne filozoficzne refleksje, dotyczące wybranych matematycznych założeń[88] .

Aby lepiej wpisać się analizami niniejszej pracy, we współczesny nurt filozofii praktyki matematycznej – który uwzględnia bardziej to, co wiąże się z faktycznym powstawaniem i rozwojem wiedzy matematycznej[89] niż z zagadnieniem samych w sobie matematycznych obiektów i tego, jak uzyskujemy do nich dostęp[90] – należy spojrzeć bardziej całościowo na proponowane punkty. Jest to zgodne z antyizolacjonistycznym postulatem Hellera odnośnie do poszerzenia zakresu pytań i kwestii badawczych w relacji filozofia-matematyka, który to postulat jest również podnoszony przez przedstawicieli PMP.

Punktem wyjścia są teksty Cantora i Dedekinda z zakresu podstaw matematyki. Jednak brane są dodatkowo pod uwagę ich podejścia do różnych kwestii związanych z tworzeniem tych tekstów. Stąd zarówno 2, jak i 3 podpunkt są najistotniejszymi zakresami badawczymi, jakie będą eksplorowane. Z tym tylko zastrzeżeniem, że nie będziemy badać jedynie założeń filozoficznych uwikłanych w same teorie matematyczne, ale przede wszystkim w proces poznawczy potrzebny do ich powstania. Tak samo nie będziemy analizować filozoficznie samych w sobie założeń matematycznych, ale założenia wspomnianych matematyków, jak również rozszerzymy zakres analizowanych założeń matematycznych o deklarowane cele, jak i wyniki tych uczonych.

Podsumowując, będziemy rozpatrywać kwestie filozofii w matematyce, jednak związane z ogólnie pojętą praktyką matematyczną[91]. Skupimy się w tym kontekście na konkretnych aspektach charakterystyk naukowych[92] tych dwóch wielkich matematyków.

[88] Szerzej propozycja Hellera jest opisana również przez Pawła Polaka w: P. Polak, *Philosophy in science: A name with a long intellectual tradition*, „Philosophical Problems in Science (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce)" (2019) nr 66, 251–270.

[89] Nieoderwanej skądinąd zarówno od matematycznego podmiotu (czyli człowieka), jak i wpływających na niego różnorakich czynników zewnętrznych (z otaczającego go świata).

[90] L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[91] Dalej pojęcie to będzie bardziej opisane, jednak teraz można zaznaczyć, że pojęcie praktyki matematycznej będzie szersze niż pojęcie samej, wypracowanej teorii. Będziemy starali się zawrzeć w nim również odniesienia do określonych założeń, celów i metod podmiotów matematycznych (tj. Cantora i Dedekinda), jakie mogły kształtować daną teorię.

[92] Analizując praktykę matematyczną dwóch wielkich naukowców, zamierzamy wydobyć z tych analiz również całokształt tego, w jaki sposób oraz w jakim celu dana teoria była „tworzona" przez danego naukowca. To podejście może nawiązywać do stylu matematycznego, który określa całokształt przeprowadzonych analiz oraz wyciągniętych z nich wniosków, odnoszących się do poszczególnych podmiotów matematycznych.

Naszym celem jest wyciągnięcie wniosków filozoficznych odnośnie zarówno do praktyki, jak i teorii matematycznej – tj. odnośnie do rozwoju matematycznej wiedzy[93]. W związku z tym należy dookreślić szczególnie pojęcie praktyki matematycznej.

Praktyka matematyczna

Filozofia praktyki matematycznej jest stosunkowo nowym kierunkiem, poszerzającym zakres badań filozofii matematyki. Niektórzy upatrują jego początku w propozycji Imre Lakatosa, który w latach siedemdziesiątych XX wieku zakomunikował[94], iż powinien nastąpić pewien przełom, tj. poszerzenie zakresu zadawanych pytań naukowych, czy też przeniesienie ich punktu ciężkości z samej kwestii już wyabstrahowanego przedmiotu matematycznego, również na kwestię procesu, a także kontekstu jego powstawania – śladem ogólnej filozofii nauki – w zakresie filozofii matematyki. Chociaż na początku ten kierunek badań nie stał się jednym z oficjalnie opracowywanych zagadnień (stanowił nieznaczny margines w grupie wszystkich zagadnień klasycznej filozofii matematyki), ostatnimi laty ów margines zaczął zdobywać coraz większą popularność, a także zaczął przenikać dotychczasową, klasyczną filozofię matematyki, znajdując z jej kierunkami coraz więcej punktów wspólnych[95].

Ostatnie dwadzieścia lat przyniosło wiele publikacji w tym zakresie. Najwcześniejsze prace zwracały uwagę na fakt, iż filozofowie matematyki powinni bardziej skupiać się na tym, co rzeczywiście „robią" matematycy, a nie na tym, co o tym w metamatematyczny czy filozoficzny sposób sądzą[96]. Była to w zasadzie swoista argumentacja przemawiająca za nową metodologią badań i próbą wyjaśnienia jej zasadności oraz sensu. Obecnie pojawiają się również prace z (filozofii) praktyki matematycznej, które nie tylko zawierają zestawienia

[93] Już teraz zaznaczmy, iż bliskie naszemu podejściu jest stanowisko Raymonda Louisa Wildera, który pisał: „O ile bowiem nasza matematyka jest częścią kultury, znajduje się ona [...] 'poza nami'. O ile jednak kultura nie może istnieć inaczej niż jako produkt umysłów ludzkich, matematyka jest [...] 'wytworem człowieka'". Por. R.L. Wilder, *The cultural basis of mathematics*, w: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Providence 1950, 259–260.

[94] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, New York 1979.

[95] Kwestie filozofii praktyki matematycznej, powstawania i rozwoju teorii matematycznych oraz wyjaśniania i rozumienia matematycznego stały się lepiej widoczne i zostały powiązane z bardziej tradycyjnymi pytaniami z filozofii matematyki (np. w: P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*). Zwraca się na przykład uwagę na uspołecznienie i kulturowy kontekst matematyki, co pozwala ją postrzegać jako mniej wyidealizowaną i elitarną, ale podkreśla się jej „jedność w różnorodności". Por. E. Piotrowska, *Dokąd zmierza filozofia matematyki?*..., *dz. cyt.*, 577.

[96] Por. na przykład z: D. Corfield, *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge 2003. David Corfield pokazuje, jak analizować w szczegółowy sposób konkretną praktykę matematyczną, przedstawia różne przykłady takich analiz.

najważniejszych prac czy omówienie najważniejszych tematów (jak np. dowodów, wizualizacji, wyjaśniania czy rozumienia matematycznego), ale również wskazują na przydatność praktyki matematycznej w edukacji[97].

Jessica Carter podkreśla, iż pojęcie praktyki matematycznej posiada wiele znaczeń oraz interpretacji, w zależności od tego, jaki problem jest badany oraz jakie są przyjęte założenia filozoficzne[98]. Można pytać o naturę matematycznych obiektów, o to, co o nich wiemy, o tworzenie matematycznych treści, uczenie się ich lub wykorzystywanie w innych dziedzinach nauki. Carter wyróżnia trzy główne kierunki w podejściach badawczych PMP: podejście oparte na ludzkich agentach (w tym socjologiczne i pragmatyczne), podejście historyczne (zawierające analizy różnego rodzaju związków między historią, filozofią oraz matematyką) oraz podejście epistemologiczne (uwzględniające ontologię, epistemologię oraz prace z zakresu podstaw matematyki)[99].

Biorąc pod uwagę analizy niniejszej pracy, najbliższe są one podejściu epistemicznemu PMP, które z kolei jest najbliższe zagadnieniom tradycyjnej filozofii matematyki. Podejście to porusza takie kwestie, jak ontologia (natura) matematycznych obiektów oraz to, jak powstaje o nich wiedza (aspekt epistemologiczny)[100]. Te właśnie kwestie stanowią przedmiot rozprawy (rekonstruowany konstrukcjonizm poznawczy, realizm ontologiczny oraz strukturalizm). Jednakże oprócz tego, w pewnym sensie również perspektywą prowadzonych badań będzie dodatkowo perspektywa ludzkich agentów[101], jako że praca skupia się na dwóch konkretnych matematykach.

Mając na uwadze powyższe, pojęcie praktyki matematycznej można zdefiniować za pomocą tego, jak pisze Carter:

> „Ogólnie rzecz biorąc, praktyka jest ujmowana przez parę składającą się z ‘agentów’ i ‘matematyki’, co można zapisać jako (A,M). Składnik ‘agenci’ składa się z agentów, rzeczywistych lub wyidealizowanych, oraz ich działań i przekonań. ‘Matematyka’

---

[97] Y. Hamami, R.L. Morris, *Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators*, „ZDM Mathematics Education” 52, (2020), 1113–1126, doi: https://doi.org/10.1007/s11858-020-01159-5.

[98] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*, 6.

[99] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*, 6.

[100] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*, 24.

[101] Inaczej ludzkich przedstawicieli, ang. „human agents”. Por. J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*

odnosi się do treści matematyki – teorii, twierdzeń, dowodów, modeli matematycznych itp. Ogólnie rzecz biorąc, ‘praktyka’ składa się z relacji między agentami a tym, co składa się na matematykę”[102].

Można powiedzieć, że tym, co odmienne dla klasycznej filozofii matematyki i PMP (tj. tym, co uzupełnia podejście filozofii klasycznej), jest fakt, iż w PMP nie buduje się systemu wyidealizowanej wiedzy bezkontekstowej. Jest to zawsze wiedza konkretnego podmiotu (konkretnego człowieka), związana z historyczno-społecznym, już istniejącym, obiektywnie dostępnym dorobkiem.

W niniejszej pracy kluczowym pojęciem dla zrozumienia proponowanego konstrukcjonizmu epistemologicznego, jak i realizmu ontologicznego, specyficznego dla podstaw matematyki Cantora i Dedekinda jest pojęcie konstrukcji matematycznej, rozumianej jako pewna czynność wchodząca w zakres indywidualnej praktyki matematycznej.

Niedefiniowanym tutaj fundamentem tej czynności będzie samo (racjonalne, ogólnie pojęte) rozumowanie, któremu – w założeniu – towarzyszyć powinna matematyczna intuicja, jak i intencja (czy szerzej pojęta intencjonalność). Oczywiście samo pojęcie rozumowania może być przedmiotem odrębnych analiz, nie są jednak one celem rozprawy.

Pojęcie intuicji, chociaż nawiązuje w pewnym sensie do Kanta, Brouwera (a więc do propozycji radykalnie konstruktywistycznych w filozofii matematyki, jak intuicjonizm), definiujemy raczej jako pewną naoczność matematycznych obiektów (w tym również złożonych struktur) – zarówno tych, które są już skonstruowane i obecne w zbiorze wiedzy obiektywnej, jak i dopiero konstruowanych w indywidualnej praktyce matematycznej. Aby dokładniej przybliżyć, co pojęcie intuicji może oznaczać, wykorzystujemy propozycję myślenia wizualnego autorstwa Marcusa Giaquinto [103].

Należy przy tym podkreślić, że rozważane tutaj pojęcie intuicji jest stosunkowo szerokie[104]. Chociaż odnosi się do intuicji według Kanta (*Anschauung*)[105], Giaquinto nie

[102] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†...*, *dz. cyt.*, 24.

[103] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics...*, *dz. cyt.*

[104] Bardziej zaawansowane badania w tym temacie, również w odniesieniu do praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda, przewidziane są poza ramami niniejszej rozprawy, chociaż w oparciu o wybrane jej analizy.

[105] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*

utożsamia zasadniczo myślenia wizualnego z intuicją. Niemniej jednak wykorzystamy opisane przez niego wizualne mechanizmy poznawcze, aby zawęzić wykorzystywaną w niniejszej pracy kwestię intuicji do intuicji wizualnej. Będzie chodziło głównie o zakładany ogląd konstruowanych struktur, który to ogląd niekoniecznie musiał być świadomy i precyzyjny, a który towarzyszył konstruowaniu matematycznych obiektów. Z uwagi jednak na trudności w dokładnej rekonstrukcji samego oglądu dziewiętnastowiecznych matematyków, będziemy porównywać raczej perspektywy badawcze, które wyznaczają te oglądy, a które można bardziej precyzyjnie rekonstruować.

Bliżej pojęcie używanej tu intuicji może określić stanowisko Henri Poincarégo[106], który wprost opisuje nie tylko intuicję umożliwiającą dostęp do matematycznych obiektów, ale również jej funkcję. Proponowany tutaj kierunek epistemologiczny to nie konstruktywizm (dyskutowany zresztą u Dedekinda), a konstrukcjonizm[107], mający za zadanie podkreślenie, iż

---

[106] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse...*, *dz. cyt.*; H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris 1908.

[107] Należy tu nawiązać do dyskusji związanej z pojęciami konstruktywizmu i konstrukcjonizmu. Zauważa się, że pomimo stosowanej czasem zamienności tych pojęć, a także pomimo trudności z ich rozdziałem, są one inne pod względem zakresów znaczeniowych. Zwierżdżyński na przykład wskazuje na rozróżnienie Johna Shottera pomiędzy radykalnym konstruktywizmem von Glasersfelda a konstrukcjonizmem społecznym Gergena: „Jakkolwiek obaj mówią o jednostkach, strukturach i sieciach, jako o konstruowanych, to dla von Glasersfelda procesy konstruowania działają automatycznie, niejako za sceną, w codziennych czynnościach, w które zaangażowani są ludzie. Gergena nie interesują tego typu procesy. Czymkolwiek wewnątrzpsychiczne procesy konstruowania mogą być (jeśli w ogóle takie być mogą), faktem jest, że odbijają się one w różnorodnych, wynegocjowanych strukturach społecznych". J. Shotter, *In Dialogue: Social Constructivism and Social Constructionism*, w: *Constructivism in Education*, red. L. Steffe, J. Gale, Hillsdale, NJ 1995, 44; M.K. Zwierżdżyński, *Konstruktywizm a konstrukcjonizm...*, *dz. cyt.*, 126–127. Dla innych z kolei różnica polega na utożsamieniu konstruktywizmu raczej z procesami psychicznymi indywidualnego podmiotu, a konstrukcjonizmu z wynikami społecznych relacji. M.K. Zwierżdżyński, *Konstruktywizm a konstrukcjonizm...*, *dz. cyt.*, 127. A. Walat, *O konstrukcjonizmie i ośmiu zasadach skutecznego uczenia się według Seymoura Paperta*, „Meritum" 4, (2007), 8; M.K. Zwierżdżyński, *Konstruktywizm a konstrukcjonizm...*, *dz. cyt.*, 131., M.K. Zwierżdżyński, *Konstruktywizm a konstrukcjonizm...*, *dz. cyt.*, 131.

W powyższym kontekście należy umiejscowić konstrukcjonizm epistemiczny proponowany w niniejszej pracy jako odnoszący się do indywidualnych procesów konstrukcyjnych poszczególnych praktyk matematycznych, które są jednak uwikłane (poprzez podmioty tych praktyk, jak i ich przedmioty związane z istniejącą w kontekście historyczno-społecznym wiedzą matematyczną) w kontekst historyczno-społeczny, co może być przedmiotem dalszych badań.

Z kolei Kathy Charmaz pisze: „Konstruktywizm to społeczna perspektywa naukowa, która zajmuje się tym, jak tworzy się rzeczywistość. Perspektywa ta zakłada, że ludzie, w tym badacze, konstruują rzeczywistość, w której uczestniczą. Konstruktywistyczne dociekania rozpoczynają się od doświadczenia i pytają, w jaki sposób członkowie je konstruują. W miarę swoich możliwości konstruktywiści badają to zjawisko, uzyskują na jego temat różnorodne spojrzenia i lokalizują je w sieci powiązań i ograniczeń. Konstruktywiści przyznają, że ich interpretacja badanego zjawiska sama w sobie jest konstrukcją". K. Charmaz, *Constructing grounded theory*, London ; Thousand Oaks, Calif 2006, 187.

Natomiast konstrukcjonizm społeczny według niej to: „Perspektywa teoretyczna zakładająca, że ludzie tworzą rzeczywistość społeczną poprzez działania indywidualne i zbiorowe. Zamiast postrzegać świat jako dany, konstrukcjoniści pytają, w jaki sposób jest on realizowany? Zatem zamiast zakładać realia w świecie zewnętrznym – w tym w strukturach globalnych i kulturach lokalnych – konstrukcjoniści społeczni badają, co ludzie w nie jest jedynym sposobem tworzenia matematyki subiektywne jej naoczne doświadczanie i rozwijanie. Po pierwsze dlatego, że niekoniecznie trzeba wszystkich obiektów doświadczyć w pełni i we wszystkich szczegółach[108], a po drugie, wiele zależy też od wyprodukowanej wiedzy matematycznej, istniejącej w perspektywie historycznej, jak również od przyjętych tam społecznie konwencji.

Jeśli chodzi o pojęcie intencji, tu można odnieść się do ogólnych jej opisów u Gertrude Elisabeth Anscombe i Johna Searle'a. Pomimo iż intencjonalność jest pojęciem mającym szerokie zastosowanie u Husserla, jak i występuje w kontekście ontologii intencjonalnych obiektów Ingardena (które ten *de facto* odnosił do obiektów występujących w dziełach literackich). Zastosowanie koncepcji Husserla czy Ingardena wobec badań PMP jest bardzo interesującym zagadnieniem, przekracza jednak ramy niniejszego studium. Jest to jak najbardziej temat przyszłych badań, a pierwsze kroki w tym obszarach zostały już postawione[109]. Ostatecznie więc intuicja (jako ogląd) oraz intencja będą założonymi, niezbędnymi elementami umysłowej, matematycznej konstrukcji.

---

określonym czasie i miejscu uważają za realne, jak konstruują swoje poglądy i działania, gdy powstają różne konstrukcje, które konstrukcje zostają uznane za ostateczne, i jak ten proces przebiega. Symboliczny interakcjonizm jest perspektywą konstruktywistyczną, ponieważ zakłada, że znaczenia i nietrwała rzeczywistość są wytworem procesów kolektywnych". K. Charmaz, *Constructing grounded theory*..., *dz. cyt.*, 189.

Niemniej jednak konstrukcjonizm epistemologiczny proponowany w niniejszej pracy nie jest konstrukcjonizmem – z zasady – społecznym, ponieważ skupiamy się na indywidualnej praktyce matematycznej. Nie oznacza to, iż argumentujemy przeciwko niemu, wszak wskazujemy na wpływający na indywidualną praktykę matematyczną szeroki i obecny kontekst wiedzy matematycznej wyprodukowanej i egzystującej w III świecie Popperowskim. Niemniej jednak, konstrukcjonizm społeczny nie jest podstawowym (lub jednym z podstawowych) przedmiotem badań niniejszej pracy, chociaż takie badania jak najbardziej mogą zostać podjęte w kontekście analizowanej tu praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda.

W związku z powyższym, dla określenia konstrukcjonizmu proponowanego tutaj, należy sparafrazować definicję Charmaz w następujący sposób:

Perspektywa teoretyczna zakładająca, że matematycy tworzą rzeczywistość matematyczną poprzez działania indywidualne, w kontekście produktów zbiorowych (tj. skonstruowanej wiedzy obiektywnej). Zamiast postrzegać matematykę jako daną, konstrukcjoniści pytają, w jaki sposób jest ona konstruowana i rozwijana? Zatem zamiast zakładać realia w świecie matematycznym – w tym w społecznościach matematycznych globalnych lokalnych – konstrukcjoniści epistemiczni badają, co matematycy w określonym czasie i miejscu uważają za realne, jak konstruują swoje poglądy i działania, gdy powstają różne konstrukcje, które konstrukcje zostają uznane za ostateczne, i jak ten proces przebiega. Na podstawie: K. Charmaz, *Constructing grounded theory*..., *dz. cyt.*, 189.

[108] Jak to się ma np. z obiektami nieskończonymi. Por. J. Dadaczyński, *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, „Filozofia Nauki" 30, (2022) nr 3, 33–50, doi: 10.14394/filnau.2022.0027.

[109] Por. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*

Za G.E.M. Anscombe'em wiążemy intencję z działaniem. Wyróżnia ona: 1. działanie jako wyrażanie intencji, 2. działanie intencjonalne oraz 3. działanie kierowane intencją[110]. W analizowanej praktyce matematycznej należy wyróżnić następujące rodzaje działań:

1. wyrażanie pewnych matematycznych intencji (tj. intencji, których intencjonalnymi obiektami są obiekty lub praktyki matematyczne);
2. samo rozumowanie jako pewną podstawę i bazę dla rozwiązywania matematycznych problemów, którego samodzielność zakłada zapoznanie się i opanowanie historyczno-społecznego zaplecza matematycznego, przynajmniej w określonej części,
3. cały proces brania pod uwagę założeń, postaw, celów matematycznych, a także metod w kontekście problemów matematycznych – oparty jest on na rozumowaniu, a jego głównym intencjonalnym obiektem jest wybór i sporządzenie planu rozwiązania danego problemu (oczywiście jest to pewne uproszczenie, bo w trakcie tego procesu intencje mogą być nakierowane na różne pomniejsze obiekty czy działania),
4. oraz na końcu samo rozwiązywanie danego problemu, w którego zakres może wchodzić również – lub przede wszystkim – konstruowanie nowego matematycznego obiektu (mniej lub bardziej intencjonalne).

Chociaż powyższy podział jest uproszczeniem, może być tłem dla wyjaśnienia, jaki aspekt intencji (i intencjonalności) będzie brany w niniejszej pracy pod uwagę. Otóż o ile samemu rozumowaniu, jak i wyborowi problemu do rozwiązania niespecjalnie będziemy się przyglądać w kontekście intencji, to wyrażane intencje przez obydwu matematyków będą uwzględniane. Pomogą one nakreślić przyjmowane założenia, cele i metody.

Jak zostało wcześniej wspomniane, pojęciem podstawowym jest pojęcie konstrukcji, stąd głównym aspektem intencjonalności będzie intencja, której obiektem będzie sama czynność konstruowania oraz konstrukcja (rozumiana jako obiekt-struktura). Istotnym elementem badań niniejszej pracy będzie, założenie jakiejś formy intencjonalności w ramach konstruowania wprowadzanych obiektów u obydwu matematyków, a także sprawdzenie, na ile wprowadzane przez obydwu matematyków obiekty, jak i modele były zamierzone

[110] G.E.M. Anscombe, *Intention...*, *dz. cyt.*; R. Moran, M. Stone, *Anscombe on Expression of Intention*, w: *New Essays on the Explanation of Action*, red. C. Sandis, London 2009.

(intencjonalne), oraz jaki to miało związek z ich oglądem (czy też z poziomem abstrakcji tego oglądu)[111].

Opierając się na propozycji Searla, który opisuje:

– *warunki spełnienia* dla danego stanu intencjonalnego, o określonym kierunku dopasowania, jako stan rzeczy, który powoduje spełnienie stanu intencjonalnego,
– *obiekty intencjonalne* jako przedmioty zawarte w warunkach spełnienia (jak obiekty, zdarzenia),
– oraz *intencjonalne działanie* jako działanie, które można nazwać realizacją warunków spełnienia stanu intencjonalnego[112],

oraz wykorzystując proponowany przez niego symboliczny zapis:

S(r), gdzie *S* – oznacza zmienną trybu stanu intencjonalnego (np. przekonanie, zamiar), a *r* – pewną reprezentacyjną zawartość tego stanu,

możemy stwierdzić, że głównymi stanami intencjonalnymi, jakie będziemy brać pod uwagę, analizując praktykę matematyczną Cantora i Dedekinda w zakresie podstaw matematyki, będą te, które bezpośrednio dotyczą samej konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych oraz teorii mnogości jako nowej dziedziny matematycznej (u Cantora) lub narzędzia do modelowania matematycznych problemów (u Dedekinda).

W powyższym kontekście jaśniej powinna się zarysować metodologia oraz podejście przyjęte w niniejszej pracy. Przyjmujemy podstawowe założenia PMP (w tym samo pojęcie praktyki matematycznej, na którą składają się: pojęcie konstrukcji oraz pragmatyczny sposób istnienia matematycznych obiektów), korzystamy z opcji analiz proponowanych przez Hellera, oraz mamy do dyspozycji matematyczne teksty, na podstawie których prowadzimy analizy (również porównawcze) oraz rekonstrukcje zarówno założeń filozoficznych, jak i praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda.

---

[111] Oczywiście intencjonalnym obiektem nakierowania oglądu na pewną naoczność mogą być również obiekty już istniejące w matematyce, jak i pomniejsze matematyczne czynności, niemniej jednak te podpadają pod już istniejące problemy i kwestie, jakie podmiot rozpatruje w ramach przyjmowania założeń, i celów – w związku z czym są raczej pośrednimi obiektami intencji, jeśli można to w ten sposób ująć.

[112] J.R. Searle, *The intentionality of intention and action…*, *dz. cyt.*, 50.

1.6 Plan pracy

Praca składa się z 7 rozdziałów. Rozdział 1 zawiera wstęp oraz omówienie najważniejszych aspektów pracy, takich jak cele, hipotezy, najważniejsze założenia, metodologia oraz – ogólnie mówiąc – kontekst podejścia badawczego.

Rozdział 2, 3 oraz 4 stanowią odpowiednio, rekonstruowane w oparciu o matematyczne przykłady, filozoficzne propozycje dla epistemologii i ontologii praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda w badanym zakresie matematyki. Rozdział 2 opisuje w oparciu o konkretne matematyczne przykłady, epistemiczny konstrukcjonizm jako propozycję dla epistemologii związanej z uprawianiem matematyki przez obydwu analizowanych matematyków. Rozdział 3 przedstawia kierunek strukturalizmu zarówno w kontekście ontologii (u obu matematyków), jak i epistemologii (głównie u Dedekinda). Rozdział czwarty analizuje ontologiczny realizm obiektów obydwu analizowanych matematycznych teorii.

Rozdział 5 stanowi następnie próbę porównania założeń przypisywanych Cantorowi i Dedekindowi, jak i deklarowanych przez nich, z założeniami zrekonstruowanymi we wcześniejszych rozdziałach. Rozdział 6 stanowi zaś próbę charakterystyki samej praktyki matematycznej obydwu matematyków w celu próby wyjaśnienia przyczyny zauważonej różnicy pomiędzy obydwoma rodzajami założeń i przesłanek filozoficznych.

Rozdział 7 zawiera podsumowanie i omówienie wyników pracy, a także propozycję perspektywy dalszych możliwych badań oraz dyskusji.

2 Konstrukcjonizm epistemologiczny u Cantora i Dedekinda

W niniejszym rozdziale zamierzamy przedstawić argumenty na rzecz konstrukcjonizmu epistemologicznego odnośnie do praktyki matematycznej zarówno Cantora, jak i Dedekinda, a także pewien opis tej filozoficznej propozycji. Celem jest wskazanie, iż u obu matematyków, ich propozycje matematyczne były – mniej lub bardziej intencjonalnie – konstruowane, nie zaś odkrywane (lub przynajmniej, że trudno byłoby to odkrywanie udowodnić na podstawie ich praktyki).

Pojęcie konstrukcji matematycznej (jako czynności) jest często używane w sposób pierwotny i podstawowy w kontekście samej praktyki matematycznej[113]. Niemniej jednak, chociaż będziemy argumentować za stanowiskiem konstrukcjonizmu epistemicznego (tj. uwzględniającym czynności konstrukcyjne jako podstawowe i konieczne dla wprowadzania nowych treści matematycznych przez konkretny matematyczny podmiot) przy pomocy przede wszystkim matematycznych przykładów, można wskazać pewne podstawy w klasycznej filozofii dla tego stanowiska, ponieważ – za Jessicą Carter[114] – zależy nam na łączeniu perspektyw PMP oraz klasycznej filozofii matematyki. Nie będziemy opisywać pełnych ram tej propozycji, ale wskażemy na najważniejsze jej aspekty.

Jak zaznaczyliśmy we wstępie, konstrukcjonizm proponowany w niniejszej pracy, chociaż w części związany z propozycją Kanta, jak i z interpretacją Brouwera, nie jest tożsamy z konstruktywizmem w filozofii matematyki ani z matematyką konstruktywną. Jest raczej umiarkowaną opozycją względem radykalnego platonizmu, rozumianego jako pogląd, że matematyczny podmiot odkrywa matematyczne obiekty, które *de facto* istnieją niezależnie od tego, czy zostaną odkryte.

W kontekście praktyki matematycznej takie założenie o platonizmie wydaje się zbędne, zewnętrzne względem tego, co tak naprawdę obejmuje sama praktyka (założenie to nie stanowi elementu tej praktyki). Bardziej niezbędne wydaje się podkreślenie – tak jak to robił Kant[115] – aktywności umysłowej matematyka.

---

[113] J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*; P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*

[114] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†*..., *dz. cyt.*

[115] I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, tłum. R. Ingarden, Warszawa 1986, 453; I. Kant, *Prolegomena*, tłum. A. Banaszkiewicz, Warszawa 1993, 42–48.

Wyróżniamy trzy elementy tej aktywności: samo rozumowanie, oraz towarzyszące mu pewnego rodzaju intencje i intuicję. Może się to kojarzyć bezpośrednio z propozycją Kanta, jak również Husserla (pomimo zauważanych między nimi różnic)[116]. Obaj podkreślali rolę świadomości i rozumowania podmiotu. W przypadku Kanta chodziłoby przede wszystkim o definiowanie matematycznego poznania jako syntetycznego *apriori*, oraz o pojęcie naoczności[117]. Natomiast w przypadku Husserla np. o pojęcie intencji sygnitywnej wypełnianej przez intencję intuicyjną, w kontekście językowego opracowywania struktury, czy o podział świadomości na aktywną i pasywną[118]. Przedmiotem pracy nie jest jednak analiza tego, na ile propozycje Kanta lub Husserla (czy jeszcze np. Ingardena)[119], mogą szczegółowo opisywać praktykę matematyczną Cantora lub Dedekinda, i założenia filozoficzne z tym związane, podkreślamy powyższym jedynie ogólną perspektywę filozoficzną w jakiej można umieścić te rozważania.

Jak zostało wspomniane, pojęcie umysłowej konstrukcji (tj. w konsekwencji pojęcie rozumowania, intencji, jak i intuicji) będzie nierozerwalnie związane z pragmatycznymi podstawami filozofii praktyki matematycznej, która stanowi dla tych pojęć pewne wyjaśnienie[120]. Aby uchwycić perspektywę praktyki matematycznej, należy zgodnie z ogólną definicją tej praktyki z perspektywy PMP wziąć pod uwagę zarówno aspekty leżące po stronie poznającego podmiotu, jak i po stronie matematyki jako teorii. I tak w przypadku podmiotu mamy do czynienia z pewnego rodzaju określonym rozumowaniem, zaś od strony matematyki z konkretnym matematycznym tekstem.

Jak zauważa Jessica Carter, matematyczne obiekty są wprowadzane przez matematyków w celu rozwiązywania problemów oraz konstruowane przy pomocy

---

[116] P. Łaciak, *Struktura i rodzaje poznania a priori w rozumieniu Kanta i Husserla*, Katowice 2003.

[117] I. Kant, *Krytyka czystego rozumu...*, *dz. cyt.*; L. Shabel, *Kant's Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.*

[118] E. Husserl, *Badania logiczne. T. 2: Badania dotyczące fenomenologii i teorii poznania. Część 2*, tłum. J. Sidorek, Warszawa 2000; D. Łukasiewicz, *Adekwatna i apodyktyczna intuicja w kontekście transcendentalnej fenomenologii E. Husserla*, w: *Od Platona do współczesności*, red. S. Sarnowski, G. A. Dominiak, Bydgoszcz 1999, 183–198.

[119] P. Błaszczyk, *On the Mode of Existence of the Real Numbers...*, *dz. cyt.*

[120] Skorzystamy w tym celu głównie z propozycji Giaquinto odnośnie do wizualizacji obiektów matematycznych, w tym struktur (pewnego ich umysłowego uchwycenia). M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics...*, *dz. cyt.*

sprawdzonych metod[121]. Przy czym nie zawsze wprowadzenie nowego obiektu musi być (świadomym) celem matematycznego rozumowania. Jeśli zawęzimy pojęcie rozumowania do tego, które towarzyszy budowaniu matematycznych obiektów (zakładamy że rozumowanie jest dużo szerszym pojęciem), będzie ono – według tego, co twierdzi Carter – związane z konkretnymi założeniami i celami, jakie wynikają z danych matematycznych problemów, a także będzie kształtowane przez przyjęte w matematyce metody.

W tym sensie rozumowaniu – możemy powiedzieć – towarzyszy konkretna intencja. Powinna być ona rozumiana jako pewna wypadkowa wszystkich założeń i celów, związanych z danym, rozwiązywanym problemem, która w ten sposób może nadawać kierunek rozumowaniu. Tak rozumiana intencja będzie głównym argumentem za proponowanym konstrukcjonizmem. Intencjonalność w niniejszej pracy będzie miała dodatkowo drugą rolę. Będzie związana bezpośrednio z samą, szczegółową metodologią wprowadzania nowej struktury jako nowego obiektu. Jednak kwestię tę rozwiniemy w kontekście rozważań nad strukturalizmem metodologiczno-epistemologicznym.

Takiemu rozumowaniu, kształtowanemu przez przyjęte metody wraz z nadającą mu kierunek intencją[122], może towarzyszyć również – jak wskazują niektórzy[123] – intuicja, tj. pewnego rodzaju ogląd rozważanej lub budowanej struktury. Chodzi o ogląd niezbędnych jej elementów, wraz z towarzyszącymi im oraz opisującymi tę strukturę relacjami. Oba te wyżej określone pojęcia – intencja oraz intuicja – będą się nawzajem przeplatały i uzupełniały (tj. nie określimy szczegółowo ich roli oraz natury), a także będą podstawą opisu i rozróżnienia praktyki matematycznej Cantora oraz Dedekinda. Należy w tym miejscu zaznaczyć, iż nie jest naszym celem wymienienie i szczegółowe opisanie (a tym bardziej rozróżnienie) wszelkich przejawów intencji oraz intuicji, towarzyszących ich praktyce matematycznej.

Jeśli chodzi o intuicję, będziemy głównie rozważać intuicję w znaczeniu – mniej lub bardziej świadomego i precyzyjnego – oglądu (wspominanego przez Giaquinto *Anschauung* Kanta), gdzie ów ogląd będziemy odnosić nie do czasoprzestrzeni (nie będziemy zagłębiać się

[121] J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice...*, *dz. cyt.*

[122] Zwłaszcza jeśli intencja w sposób bezpośredni dotyczy konstruowania nowego obiektu, co należy odróżnić od opisanej ogólnej intencji rozwiązania konkretnego, matematycznego problemu, pewnymi dostępnymi metodami.

[123] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*; B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii*, Warszawa 2021.

w kwestię, jak taka intuicja jest możliwa), ale bezpośrednio do oglądu obiektów matematycznych, korzystając z opisu myślenia wizualnego Giaquinto[124]. Przede wszystkim będziemy chcieli pokazać, że ten rodzaj intuicji może być kształtowany przez różne czynniki (np. intencję zbudowania konkretnej struktury w odpowiedzi na konkretny problem, ale również pewne przyzwyczajenia, związane z postrzeganiem już istniejących struktur i schematów), a także że jej wpływ na efektywność metod praktyki matematycznej zależy od rodzaju kształtujących ją czynników.

Wydaje się, że trudno określić bardziej szczegółowo samo rozumowanie (np. według rozróżnienia proponowanego przez Jana Łukasiewicza czy definicji Tadeusza Kotarbińskiego)[125], ponieważ może ono być różnorodne ze względu na różnorodność możliwych problemów, jak i perspektyw matematycznych. Wystarczy jednak założyć, iż jest to naukowe rozumowanie racjonalne, kształtowane przez metody obowiązujące w obrębie matematyki, w konkretnym miejscu i czasie[126].

Przedmiotem tej pracy jest analiza podstaw matematyki wprowadzonych przez owych matematyków oraz rekonstrukcja ich podstawowych aspektów filozoficznych. Stąd wymienione pojęcia będziemy traktować dość ogólnie, wspierając się bardziej pragmatycznym wymiarem praktyki matematycznej. Aby oprzeć rozważania na współczesnej propozycji filozoficznej, można powołać się, po pierwsze, na postulat Bartłomieja Skowrona, aby uwzględniać nie tylko – jak się przywykło sądzić – myślenie ilościowe, ale również myślenie jakościowe (w niniejszej pracy najistotniejsze będzie myślenie strukturalne).

Skowron pisze:

> „Filozofia matematyczna to filozofia myślenia strukturami matematycznymi, których uposażenia jakościowe przypominają uposażenia jakościowe struktur filozoficznych. Jeśli rozważane struktury filozoficzne mają coś wspólnego z matematycznymi, wtedy siła intuicji ejdetycznej połączona z siłą matematycznego rozumienia i rozumowania napiera na granice filozoficznego koła”[127].

---

[124] M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics…, dz. cyt.*

[125] T. Kotarbiński, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Warszawa 1986, 207–226; J. Łukasiewicz, *O nauce…, dz. cyt.*

[126] E. Piotrowska, *Dokąd zmierza filozofia matematyki?…, dz. cyt.*

[127] B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii…, dz. cyt.*, XIV.

Tematem niniejszej rozprawy nie jest analiza filozofii matematycznej, a analiza filozoficzna matematyki (jak i praktyki matematycznej), stąd owo myślenie strukturalne, tj. myślenie strukturami matematycznymi, będzie służyło po to, aby przeanalizować związane z wprowadzonymi przez obydwu matematyków strukturami potrzebne kwestie (jak sposób ich wprowadzania czy budowa określająca sposób istnienia według danego matematyka). Idąc jeszcze dalej, chcąc skorzystać z opracowanych schematów, określających szczegółowo możliwości uchwycenia i poznania struktur, można sięgnąć do propozycji myślenia wizualnego Marcusa Giaquinto, dotyczącą wizualnego ujęcia struktur[128].

Inną metodą, jakiej używa się współcześnie (za Husserlem) do badania matematyki, jest metoda fenomenologiczna[129]. Jednak metoda ta nie metoda przyjęta w niniejszej pracy (ewentualnie propozycją do dalszego rozwijania), więc aby przeanalizować praktykę matematyczną ściśle pod kątem tworzonych teorii, skorzystamy głównie z propozycji Giaquinto, który opisuje wizualne ujmowanie struktur[130]. Będziemy wskazywać w dyskusji, iż struktury przedstawione w podstawach matematyki u Cantora i Dedekinda są zbyt złożone, aby możliwy był ich bierny ogląd, a tym samym, że nie wystarczy samo ich definiowanie, za to konieczna jest ich konstrukcja. Przy czym konstrukcje Dedekinda wyróżniają się precyzyjnym określeniem celów, konsekwencją oraz kategorycznością względem problemów, jakie mają rozwiązywać.

Jeśli chodzi o rodzaj aspektów matematycznej konstrukcji związany z samą matematyką, po omówieniu tych łączących się z podmiotem, istotne będzie wskazanie na same matematyczne obiekty wprowadzane do teorii zarówno przez Cantora, jak i Dedekinda. Będziemy chcieli zwłaszcza wskazać, iż nie są to jednolite, niepodzielne obiekty, jakie można tylko zdefiniować, ale konstrukcje w dosłownym tego słowa znaczeniu.

W tym rozdziale najistotniejsze będzie założenie, że proces konstruowania nowych obiektów w matematyce zakłada pewien rodzaj – mniej lub bardziej intencjonalnego – oglądu konstruowanych struktur. Nie chodzi o bezpośredni, prosty ogląd, niezłożonych struktur, o których np. wspominał Platon. W tym przypadku wystarczyłaby sama intuicja umożliwiająca ich ogląd. Niekoniecznie również ogląd konstruowanej struktury będzie wpływał na proces

[128] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics*..., *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Cognition of Structure*..., *dz. cyt.*

[129] M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic*..., *dz. cyt.*

[130] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics*..., *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Cognition of Structure*..., *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics*..., *dz. cyt.*

konstruowania – jak się okaże, może dopiero być tego efektem. zgodnie z kierunkiem zaproponowanym przez Kanta, będziemy argumentować, iż tworzenie matematycznej wiedzy w przypadku Cantora i Dedekinda wymagało umysłowych konstrukcji. Podejście takie stosujemy również z uwagi na złożony przedmiot dziewiętnastowiecznej matematyki, którego złożoność będzie argumentem przeciwko możliwości biernego odkrywania matematycznej wiedzy, jak to się zakłada w opisanym tu platonizmie.

Według Słownika języka polskiego PWN, konstrukcja to: „1. sposób, w jaki połączone są elementy tworzące jakąś całość; 2. rzecz skonstruowana, zbudowana; 3. konstruowanie, budowanie"[131].

Konstrukcja musi więc uzwględniać najważniejsze aspekty, jakich wymaga dany problem, i konieczne jest rozpatrywanie ich wspólnie, wraz z odpowiednio łączącymi je zależnościami. To, na ile w świadomości matematycznego podmiotu, podczas procesu konstrukcji, istnieje owa konstrukcja jako nowy obiekt, zależy, jak można sądzić od kwestii intencji podmiotu. Niemniej jednak nie wpływa to na samo powstawanie owej konstrukcji-obiektu, a raczej na jej efektywność odnośnie do rozwiązywanego problemu – jak będziemy wskazywać.

Przypomnijmy – proponowany konstrukcjonizm epistemiczny dotyczy aspektu procesu konstrukcji jako umysłowej czynności podmiotu w odpowiedzi na intencję rozwiązania problemu matematycznego, strukturalizm epistemiczny (i metodologiczny) – zakresu intencji oraz intuicji odnośnie do tworzenia nowej struktury, natomiast realizm i strukturalizm ontologiczny – bezpośrednio wprowadzonych w teorii matematycznej obiektów (sposobu ich istnienia oraz ich natury). Wszystkie opisywane tu kwestie łączą się w kontekście indywidualnej praktyki matematycznej, a konkretnie procesu konstrukcji – tak poszczególne aspekty tego procesu, jak i proponowane stanowiska filozoficzne z nimi związane. Niemniej jednak, aspekty te – na tyle, na ile da się uniknąć odwołań do pozostałych – zostaną opisane w osobnych rozdziałach.

Zamierzamy przedstawić tu i omówić takie przykłady matematyczne u Cantora i Dedekinda (z naciskiem na wykazanie konstrukcjonizmu u Cantora oraz zdefiniowanie go – w

[131] J. Bralczyk, L. Drabik (red.), *Konstrukcja*, w: *Słownik języka polskiego PWN*, Warszawa 2005.

zestawieniu z konstruktywizmem – u Dedekinda), które będą wskazywały na wyżej opisaną propozycję konstrukcjonizmu epistemicznego.

2.1 Konstrukcjonizm Cantora

Próbując odnaleźć elementy konstrukcjonizmu u Cantora, należy powtórzyć iż nie jest zamiarem przypisanie mu np. jedynie bezpośrednich cech intuicjonizmu Brouwera, lecz jedynie wskazanie na konieczność odniesienia jego praktyki do konstrukcji umysłowych, do konkretnych czynności umysłowych jako fundamentalnych dla tworzenia matematycznej wiedzy. Chociaż podkreślamy rolę intuicji, nie uważamy, iż poznanie matematyczne (zwłaszcza tworzenie i wprowadzanie nowych treści) jest zupełnie niezależne od języka i logiki, jak to przyjmował Brouwer, a także że jest dziełem Idealnego Matematyka[132], bo zakładamy że matematyka to produkt praktyk matematycznych – w węższej (przyjętej tutaj) perspektywie – praktyk indywidualnych – a w szerszej – historyczno-społecznych[133]. Wprawdzie podejście to może się wydawać kontrowersyjne dla przedstawicieli tradycyjnej filozofii matematyki, jednak należy zauważyć iż jest to podejście rzetelne naukowo – nie próbujemy dopasować matematyki do żadnego, już gotowego, wypracowanego niezależnie od (zwłaszcza współczesnej) matematyki ideału ani systemu filozoficznego, ale bierzemy pod uwagę to, co można zaobserwować – tj. matematyczne teksty i obiekty w nich przedstawione, jak i wszystkie znane okoliczności powstawania tych tekstów w odniesieniu do konkretnych matematyków.

Mówiąc o konstrukcjonistycznych elementach w pracy Cantora, nie będziemy mieli również na myśli konotacji konceptualistycznych w kwestii ontologii matematyki, o ile nie będzie to wyraźnie zaznaczone (jak w przypadku konstruktywizmu przypisywanego Dedekindowi).

Chcielibyśmy jedynie przez określenie konstrukcjonizmu poznawczego wskazać i podkreślić konieczność wykonywania skomplikowanych operacji umysłowych przez podmiot matematyczny (w tym operacji decyzyjnych i twórczych), które świadczyłyby o niezbędności matematycznego podmiotu w tworzeniu, rozwijaniu i wykorzystywaniu matematyki jako zbioru wiedzy oraz jako dyscypliny naukowej. Tym samym, pod pojęciem konstrukcjonizmu

[132] R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.*

[133] M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic...*, *dz. cyt.*

w niniejszej pracy będziemy rozumieli głównie aspekty epistemologiczne (jednakże związane z aspektami ontologii, a przynajmniej ich niewykluczające), przede wszystkim takie, które będą podkreślały twórczość i oryginalny wkład matematycznego podmiotu, a także będą argumentowały przeciw tezie, iż praktyka matematyczna jest w swej całej okazałości, apriorycznym odkrywaniem matematycznych obiektów i praw, jakie są dawane umysłowi bezpośrednio.

Intuicja była zasadniczo odrzucana w XIX wieku na rzecz takich programów, jak logicyzm lub formalizm – a Cantor przejmował bezdyskusyjnie ówcześnie panujący trend antypsychologistyczny[134] – jednak można potraktować owe przejawy poszukiwanego konstrukcjonizmu jako kwestię związaną z aktywnymi procesami ludzkiej świadomości.

W tym rozdziale będziemy chcieli pokazać, iż zbiór liczb rzeczywistych został przez Cantora nie tyle zdefiniowany, co skonstruowany. Operacja, jaką wykonywał, była zbyt skomplikowana, aby wiedzę o tej strukturze zdobył przy pomocy bezpośredniego doświadczenia umysłowego (bezpośredniego obrazu) czy przy pomocy deterministycznej dedukcji (tworzył różne poziomy konstrukcji). Dodatkowo, twórczo (intencjonalnie) zredefiniował linię prostą, którą określił jako izomorficzną ze skonstruowanym zbiorem. W kontekście teorii mnogości zauważymy wiele elementów konstrukcjonistycznych podczas konstruowania liczb porządkowych (podał zasady generowania tych liczb) i kardynalnych (tu chodzi raczej o proces dekonstruowania – abstrahowania od właściwości elementów i relacji porządku)[135], jak i podczas konstruowania zbiorów potęgowych u początku teorii mnogości czy dekonstruowania zbioru pustego. Wszystkie te czynności – jak będziemy wskazywać – wymagały intencjonalnego nastawienia na konstruowanie – czy to bezpośrednio dotyczyło wprowadzania nowych obiektów, czy też wprowadzenia pojęcia określającego nowe obiekty, będące wynikiem konstrukcji.

Konstrukcjonizm epistemologiczny ma stanowić wspólne dla obydwu matematyków stanowisko, opisujące proces poznawczy związany z konstruowaniem nowych obiektów i wprowadzaniem nowych treści, jednak u Dedekinda konstruowanie będzie określone przez

[134] Opinię tę opieramy m.in. na przypisywanym Cantorowi przez Dadaczyńskiego stanowisku quasi-nominalizmu. Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*, Kraków 1994.

[135] Chociaż w pewnym sensie można użyć tutaj już istniejącego określenia abstrakcji, wybieramy pojęcie dekonstrukcji, aby podkreślić, iż był to proces podobny do procesu konstrukcji, jednak do niej odwrotny (wykonywany na wcześniej skonstruowanych obiektach).

dodatkowy aspekt (metodologiczny, ale oddziaływujący również na epistemologię oraz w pewnym sensie – ontologię), jakim nie można opisać metody konstruowania u Cantora.

Konstrukcja a definicja

2.1.1.1 Liczby rzeczywiste

Pierwszą kwestią, w oparciu o którą można wskazać na fakt, iż matematyczne konstrukcje u Cantora są na tyle złożone, że wymagają aktywnego, twórczego zaangażowania podmiotu, jest konstrukcja liczb rzeczywistych. W jej kontekście najistotniejsze będzie wskazanie, iż struktura liczb rzeczywistych jest w istocie na tyle złożona, że nie mogła być prostą reprezentacją pojęcia określającego liczby rzeczywiste (w kontekście przypisywanego mu quasi-nominalizmu).

Mówiąc, że Cantor zdefiniował liczby rzeczywiste, można mieć na myśli prostą czynność, jaką jest zakomunikowanie, opisanie tego, co dane w umyśle. Argumentując za tym, iż Cantor nie zdefiniował (w prosty sposób) liczb rzeczywistych, a raczej je skonstruował, chodzi nam o to, iż nie były one dane jego umysłowi w swej istocie w całości[136], a poprzez określające je skomplikowane relacje i właściwości (w tym czasem jedynie syntaktyczne, pomimo iż podstawą konstrukcji były konkretne, posiadające jakąś wewnętrzną ontologię, obiekty).

Konstruując je, Cantor miał przede wszystkim na celu uzyskanie zbioru liczbowego, posiadającego określone własności – a konkretnie własność zupełności. Tak więc uczony miał zamiar w pewnym sensie zdefiniować nie same liczby, a własność zupełności, określoną na zbiorze tych liczb (tj. własność, jakiej nie miał zbiór liczb wymiernych, a jaka była oczekiwana w analizie)[137]. Definicja samych, poszczególnych liczb rzeczywistych, utożsamianych z granicami ciągów liczb wymiernych, jest czymś innym niż definicja zbioru tych liczb, ze wszystkimi jego własnościami (tj. z działaniami i relacją porządku, jak również z własnością zupełności). To wszystko czyni tę konstrukcję złożoną i wielopłaszczyznową. To zaś z kolei

[136] Por. A. Gupta, *Definitions*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.

[137] Należy w tym miejscu dodać, iż w pewnym sensie można się przychylić do stanowiska Błaszczyka, który przypisuje zarówno Dedekindowi, jak i Cantorowi skonstruowanie przedmiotu intencjonalnego, jeśli chodzi o liczby rzeczywiste. Nie zakładamy tu jednak tej propozycji w jej szczegółach, choćby z uwagi na różnice pomiędzy matematyką a sztuką, a także z uwagi na bardziej ogólne oraz pragmatyczne odniesienie do tych kwestii. Dodatkowo, celem niniejszej pracy jest też wskazanie zróżnicowania zakresu intencjonalności obydwu matematyków względem konstruowanych struktur-obiektów (tj. stopnia, w jakim zamierzali skonstruować nową strukturę oraz w jakim posiadali jej naoczną intuicję – naoczność), czego Błaszczyk np. w swej pracy nie wskazuje.

może podważać wyjaśnienia Cantora, dotyczące prostego definiowania pojęć, które to definiowanie stanowi podstawę argumentowania za „odkrywaniem" matematycznych prawideł[138].

Można powiedzieć, że konstrukcja liczb rzeczywistych, jaką przeprowadził Cantor, oprócz tego, że stanowiła opis pewnej złożonej struktury (pewnego obiektu), wymagała aktywnego, intencjonalnego umysłowego zaangażowania, które stanowiło twórczy wkład jego matematycznej praktyki (było związane z zamiarem rozwiązania problemu niewymierności). Poniżej przedstawimy najważniejsze aspekty tej konstrukcji.

Cantor zaraz po wprowadzeniu liczb wymiernych, które określa jako – powiedzmy – daną i gotową podstawę dla reszty wielkości liczbowych, przedstawia następnie *Fundamentalereihe*, ciągi podstawowe, czyli innymi słowy ciągi Cauchy'ego. Definiuje je w następująco:

> „Gdy mówię o wielkości liczbowej w sensie szerszym, to jest tak najpierw w przypadku, gdy dany jest przez jakieś prawo nieskończony ciąg liczb wymiernych:
>
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$
>
> który ma tę własność, że różnica $a_{n+m} - a_n$ przy zmiennej n staje się nieskończenie mała, dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej m, lub, innymi słowy, że dla dowolnej (dodatniej, wymiernej) ε istnieje liczba całkowita n_1 taka, że $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, gdy $n \geq n_1$, zaś m jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą"[139].

Dalej zaznacza, że granice różnych ciągów mogą się między sobą różnić. Istotne jest jak Cantor definiuje relacje pomiędzy różnymi ciągami. Dla dwóch różnych ciągów a_n oraz a'_n

[138] Jest to związane ze wspomnianym quasi-nominalizmem, który będzie opisany dalej.

[139] W oryginale cytat brzmi: „*Wenn ich von einer Zahlengrösse im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, dass eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationen Zahlen:*

$$(1)\ a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, dass die Differenz $a_{n+m} - a_n$ *mit wachsenden n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei, oder mit anderen Worten, dass bei beliebig angennommenem (positiven, rationalen)* ε *eine ganze Zahl* n_1 *vorhanden ist, so dass* $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, *wenn* $n \geq n1$ *und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist*". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 92–93. Tłumaczenie pochodzi z: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VIII, (2016), 169–177.

mających odpowiednio granice a oraz a', można określić trzy rodzaje rozłącznych wzajemnie relacji:

„1. $a_n - a'_n$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą *n*, lub

2. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej *n*, stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε, lub
3. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej *n*, stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$"[140].

Zgodnie ze swoją intencją wyrugowania nieskończenie małych z dziewiętnastowiecznej matematyki, w pierwszym przypadku Cantor przyjmuje że $a=a'$. Odnośnie do drugiego i trzeciego przypadku pisze, że oznaczają one odpowiednio następujące nierówności: $b>b'$ oraz $b<b'$[141]. Pierwszy przypadek określa również przy pomocy pojęcia „pewnej relacji", czyli kongruencji[142]. Ciągi spełniające pierwszy warunek są współzbieżne ze

[140] W oryginale: „Entweder 1. wird $a_n - a$ unendlich klein mit wachsendem n oder 2. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen *n* an immer grösser, als eine positive (rationale) Gröβe ε oder 3. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen *n* an immer kleiner, als eine negative (rationale) Gröβe $-\varepsilon$". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 93. Tekst w języku polskim cytowany za: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych..., dz. cyt.*, 170.

[141] W dalszej części niniejszej pracy odniesiemy się szerzej do tego momentu, również przedstawiając pewne filozoficzne uwagi.

[142] Cantor pisze o „pewnej relacji", która zachodzi między ciągami, oraz że nie jest ona tożsama z identycznością dwóch liczb odpowiadającym tym ciągom: „ja schon die Gleichsetzung zweier Zahlengröβen *b, b'* aus *B* ihre Identität nicht einschlieβt, sondern nur eine bestimmte Relation ausdrückt, welche zwischen den Reihen stattfindet, auf welche sie sich beziechen". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 95. Współcześnie używa się pojęcia współbieżności czy też kongruencji. Jest to relacja równoważnościowa, wyznaczająca w całym zbiorze ciągów podstawowych (zbieżnych) relację współzbieżności i określająca tym samym liczby rzeczywiste. Liczba rzeczywista to w pewnym sensie cała klasa abstrakcji współzbieżnych ciągów/kongruentnych liczb rzeczywistych. Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 29 przyp.90. Relacja kongruencji/przystawania współcześnie to relacja równoważności ≡. Określana jest ona w algebrze jako relacja na zbiorze S z pewną strukturą algebraiczną. Dla dowolnego (dwuargumentowego) działania * w tej strukturze oraz jego dowolnych elementów a,b,c, d zachodzi:

$$a \equiv b \text{ i } c \equiv d \Rightarrow a * c \equiv b * d.$$

W istocie Cantor sam miał problemy z jednoznacznym określeniem tej relacji. Raz pisał o tym, że jeden punkt odpowiada jednej liczbie (wielkości liczbowej), w innym zaś miejscu, że kongruentne wielkości liczbowe niekoniecznie muszą być identyczne tylko pozostają w pewnej relacji (podczas gdy kongruencja określona była dla ciągów, nie dla ich granic): „zu jeder Zahlengröβe ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröβe" („do każdej wielkości liczbowej należy pewien punkt linii prostej, którego współrzędna jest równa tej wielkości liczbowej"). G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 97. „ja schon die Gleichsetzung zweier Zahlengröβen *b, b'* aus *B* ihre Identität nicht einschlieβt, sondern nur eine bestimmte Relation ausdrückt, welche zwischen den Reihen stattfindet, auf welche sie sich beziechen" („...nawet równanie dwóch wielkości liczbowych *b, b'* z *B* nie uwzględnia ich identyczności, a jedynie wyraża pewną relację zachodzącą między sobą, tj. kongruentne (choć nie według terminologii używanej przez Cantora ówcześnie –mimo iż formalnie opisywał tę relację, nie stosował pojęć używanych współcześnie).

Ostatecznie Cantor tworzy dwa zbiory – *A* i *B*. Zbiór *A* jest zbiorem liczb wymiernych, z których tworzy ciągi, natomiast *B* jest zbiorem granic tych ciągów (wszystkich – niewymierne granice ciągów liczb wymiernych nie należą przecież do zbioru *A*). Działania w zbiorze *B*:

$$b \pm b' = b'', bb' = b'', \frac{b}{b'} = b''$$

określane są przy pomocy następujących zależności w zbiorze A, dla odpowiadających tym granicom ciągów a_n, a_n', a_n'':

$$lim(a_n \pm a_n' - a_n'') = 0$$

$$lim(a_n a_n' - a_n'') = 0$$

$$lim\left(\frac{a_n}{a_n'} - a_n''\right) = 0$$ [143].

Przy czym należy zaznaczyć, że Cantor odwołuje się do definicji granicy w *Q*, biorąc ją za przykład, na podstawie którego dalej „poszerzy” zbiór granic, również o te, które nie należą do zbioru liczb wymiernych. W tym miejscu następuje uwaga matematyka z Halle, że definicja pozostaje podobna dla zbioru *B*, gdy któraś z liczb (granic) jest wymierna, tj. należy do zbioru *A*. Choć wszystkie ciągi podstawowe mają granicę, nie wszystkich granice są z *Q*. Granice wymierne generują liczby wymierne, natomiast granice nienależące do zbioru liczb wymiernych to po prostu liczby niewymierne – tworzące tym samym nowy, pełniejszy, zbiór *B*. Innymi słowy, liczby niewymierne to te punkty skupienia zbioru *A*, które nie należą do *A*, natomiast zbiór *B* zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, spełnia więc warunek Bolzano-Cauchy'ego[144]. Dalej Cantor pisze, że każde ogólne równanie dla skończonej ilości użytych operacji elementarnych:

ciągami, do których się odnoszą”). G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 95.

[143] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 94.

[144] J. Dadaczyński, *Bernard Bolzano i idea logicyzmu..., dz. cyt.*, 106–109.

$$„F\left(b, b', \ldots, b^{(p)}\right) = 0$$

będzie określało zależności pomiędzy ciągami a_n, a'_n, a''_n, ponieważ wyznaczają je liczby $b, b', \ldots, b^{(p)}$"[145].

Cantor „produkuje" zbiór *C* przy pomocy granic *c* nieskończonych ciągów typu:

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

gdzie wyrazami tych ciągów są wielkości liczbowe ze zbioru *B*[146]. Dalej, postępując w sposób analogiczny, Cantor kontynuuje tworzenie następnych dziedzin *D*… itd. o różnych rzędach (tj. różnych stopniach poszczególnych dziedzin)[147].

Przy czym – co najistotniejsze z punktu widzenia konstrukcji liczb rzeczywistych (a więc również niewymiernych) – Cantor zaznacza:

„dziedziny *B* oraz *A* mają się tak do siebie, że choć każde *a* przyporządkowane jest pewnemu *b*, ale nie każde *b* przyporządkowane może być jakiemuś *a*, to okazuje się, że zarówno każde *b* może zostać przyporządkowane pewnemu *c*, jak i każde *c* może zostać przyporządkowane pewnemu *b*"[148].

A także, iż:

„Z obszaru *C* i poprzedniego analogicznie wyłania się obszar *D*, z nich *E* i tak dalej; poprzez *λ* takich przejść (jeśli za pierwsze uważam przejście od *A* do *B*) dochodzimy do obszaru *L* liczb. Jeśli uważamy, że łańcuch definicji bycia równym, większym i mniejszym oraz dla operacji elementarnych od dziedziny do dziedziny jest zakończony,

[145] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 94.

[146] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 94.

[147] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 95.

[148] Por. „Während sich nun die Gebiete *B* und *A* so zueinander verhalten, daβ zwar jedes *a* einem *b*, nicht aber umgekehrt jedes *b* einem *a* gleichgesetzt werden kann, stellt es sich hier heraus, daβ sowohl jedes *b* einem *c* wie auch umgekehrt jedes *c* einem *b* gleichgesetzt werden kann". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 95.

to to samo dotyczy poprzednich, z wyjątkiem *A*, w taki sposób, że liczba l może zawsze być utożsamiane z liczbą *k, i,… c, b* i na odwrót"[149].

Oznaczało to po prostu, że według Cantora nie było izomorfizmu pomiędzy dziedzinami *A* oraz *B*, jednak między *B* i każdą kolejną dziedziną izomorfizm był potwierdzony[150]. Innymi słowy, przestrzeń liczb wymiernych nie miała stwierdzonej własności zupełności w sensie Cauchy'ego (miała tzw. luki, ponieważ – o czym Cantor wiedział – nie każdy ciąg podstawowy, tj. spełniający warunek Bolzano-Cauchy'ego, miał w *Q* granicę, jak np. rozwinięcie dziesiętne pierwiastka z 2), a przestrzeń liczb rzeczywistych tę własność jak najbardziej posiadała[151]. Cantor nie udowadniał tej własności – współcześnie można to uczynić[152].

Możemy w tym miejscu zauważyć, że Cantor, definiując zbiór liczb rzeczywistych, tak naprawdę konstruował go w sposób wieloetapowy. Pierwszym etapem było odwołanie się do zbioru liczb wymiernych, drugim podanie definicji ciągu Cauchy'ego, trzecim opisanie relacji pomiędzy ciągami, w tym relacji kongruencji, kolejnym przedstawienie zbioru liczb wymiernych, definiowanego w oparciu o granice ciągów, a następnym przedstawienie zbioru liczb rzeczywistych (oraz kolejnych zbiorów), konstruowanych przy pomocy granic nieskończonych ciągów, których wyrazami były elementy ze zbioru poprzedzającego (tj. elementami zbioru *B* były granice ciągów o wyrazach ze zbioru *A*). To nie koniec, bo następne etapy pokazywały możliwość konstrukcji kolejnych zbiorów, a także odnosiły własność zupełności do wszystkich konstruowanych zbiorów, poza zbiorem *A* (zbiorem liczb wymiernych). Kolejnym krokiem Cantora było odwołanie się do linii prostej, co zostanie opisane w dalszej części.

---

[149] Por. „Aus dem Gebiete *C* und den vorhergehenden geht analog ein Gebiet *D*, aus diesen ein *E* hervor usw ; durch λ solcher Übergänge (wenn ich denn Übergang von *A* zu *B* als den ersten ansehe) gelangt man zu einem Gebiete *L* von Zahlengrößen. Dasselbe verhalt sich, wenn man die Kette der Definitionen für Gleich-, Größer-, und Kleinersein und für Elementaroperationen von Gebiet zu Gebiet vollzogen denkt, zu den vorhergehenden, mit Auschluß von *A* so, daß eine Zahlengröße l stets gleichgesetzt werden kann einer Zahlengröße *k, i, … c, b* und umgekehrt". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)…, dz. cyt.*, 96.

[150] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 29–30.

[151] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VIII, (2016), 165.

[152] Np. metodą przekątniową, zaprezentowaną zresztą przez Cantora. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen..., dz. cyt.*, 114–117.

Cantor, ogólnie rzecz biorąc, uzupełnił zbiór liczb wymiernych wszystkimi takimi wielkościami liczbowymi, które były granicami ciągów liczb wymiernych, niezawartymi w zbiorze liczb wymiernych. Warto zauważyć iż Cantor nie podkreślał specjalnie w swojej pracy z 1872 roku własności zupełności zbioru liczb rzeczywistych (zbioru *B*). Możliwe, że utożsamiał tę własność zbioru ze sposobem konstruowania liczb rzeczywistych (opierał się na zupełności w sensie Cauchy'ego).

Pomimo iż nie zamierzamy analizować szczegółowo filozoficznych założeń Cantora, które sam przedstawił, z uwagi na jego obszerne wyjaśnienia pozamatematyczne wypada skorzystać z charakterystyki jego świadomego podejścia do matematyki (a przynajmniej jego najważniejszych aspektów). Wykorzystamy do tego opracowaną przez Dadaczyńskiego analizę tekstów filozoficznych Cantora. Otóż przede wszystkim odwoływał się on do Spinozy i Platona (szczególnie w kontekście liczb całkowitych – skończonych i nieskończonych – które mogą istnieć [*Existenz*], jak pojęcia [*Begriffen*] i jak idee [*Ideen*])[153]. U Spinozy szukał uzasadnienia dla dwóch sposobów istnienia liczb – intrasubiektywnego (immamentnego) oraz transsubiektywnego[154]. Sfera intrasubiektywna to sfera (nieokreślonego bliżej przez Cantora) intelektu i komunikacji, natomiast sfera transsubiektywna to wszystko to, co poza intelektem. Pomiędzy tymi sferami istnieje izomorfizm[155]. Jak zauważa Dadaczyński, Cantor zakładał, że każdemu pojęciu sfery intrasubiektywnej można przypisać jednoargumentowy predykat ze sfery języka[156].

Ogólnie rzecz biorąc, według Cantora (a także według tego, co przypisuje mu Dadaczyński) wprowadzenie nowego obiektu matematycznego wiązało się ze zdefiniowaniem konkretnego pojęcia. Definiowanie pojęcia oznaczało zaś „pobudzenie" go do zaistnienia w

[153] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 181.

[154] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 206. Sam Cantor pisał, że oba sposoby istnienia sprowadzają się do pewnej „jedności wszystkiego" (G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 182.). W tym kontekście, filozoficzne założenia Cantora (te wyartykułowane) oscylowały pomiędzy realizmem a idealizmem. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 65.

[155] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 70–71, 84.

[156] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 89.

sferze intrasubiektywnej (gdyż jego odpowiednik ze sfery transsubiektywnej istniał niezależnie od czasoprzestrzeni)[157].

Wskazuje się jednak na fakt, iż definiowanie liczb niewymiernych (a więc ich zaistnienie w sferze intrasubiektywnej) u Cantora jest czymś innym niż przeprowadzona przez niego ich konstrukcja - która w istocie jest konstrukcją zbioru liczb rzeczywistych[158]. Poprawne zdefiniowanie liczb było równoznaczne z ich zaistnieniem w sferze intrasubiektywnej (z ich obudzeniem, odkryciem), dlatego sama konstrukcja liczby w tym sensie mogłaby powodować wątpliwości co do momentu oraz sposobu zaistnienia konstruowanej struktury – Cantor przedstawia możliwość konstrukcji nieskończenie wielu zbiorów, sama konstrukcja podstawowego zbioru (*B*), zawierającego wszystkie liczby rzeczywiste, jest etapowa i skomplikowana. Nie wiadomo, czy konstruowane (definiowane) kolejno obiekty, jak ciągi, granice ciągów i wreszcie zbiory tych granic, utożsamianych również z wielkościami liczbowymi, „budzą się” do istnienia kolejno (osobno), czy też dopiero wszystkie razem jako całość, w sferze intrasubiektywnej.

Oprócz powyższego, przechodzenie z jednego poziomu konstrukcji do następnego (ze zbioru liczb wymiernych do ciągów, ze zbioru granic ciągów, określonych poprzez odpowiednie relacje, do zbiorów *B*, *C*, *D*...) wymagało intencjonalnego kierunku takiego działania (wprowadzenie ciągów było kierowane zamiarem przedstawienia liczb przy pomocy granic ciągów, a wskazanie na możliwość konstruowania w nieskończoność zbiorów granic ciągów z wyrazami zbioru poprzedzającego miało zapewne na celu przedstawienie – nie wprost – na czym miała polegać własność zupełności, jaką Cantor zamierzał scharakteryzować zbiór *R* liczb rzeczywistych). Oczywiście należy wspomnieć, że konstrukcja Cantora nie była wyjątkowa, bo w tamtym okresie podobne konstrukcje przedstawili Heinrich Heine i Charles Méray. Niemniej jednak, nie wyklucza to intencjonalności u Cantora podczas przeprowadzania tej konstrukcji, a jedynie może wskazywać na fakt, iż w tym przypadku korzystał on z szeroko akceptowalnych środków i metod (były to wszak narzędzia wprowadzone wcześniej przez Karla Weierstrassa – do czego zarówno Heine, jak i Cantor na różne sposoby nawiązują)[159].

---

[157] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

[158] Np. u Dadaczyńskiego, J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

[159] P. Błaszczyk, *Nota o rozprawie Eduarda Heinego Elemente der Functionenlehre*, „Annales Universitatis Pedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia” VI, (2014), 139; G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen*

Dodatkowo, pomimo że Cantor mógł realizować program Weierstrassa, polegający na odcinaniu się od intuicji geometrycznej i arytmetyzacji analizy[160], można założyć, że konstrukcja *R* towarzyszył pewien ogląd (naoczność) tego, co treściowo ją motywowało. Obrońcy radykalnego platonizmu Cantora mogliby twierdzić w tym przypadku, że odkrycie było możliwe poprzez naoczne poznanie treści, i zdefiniowanie (a nawet konstrukcję) odpowiadającego tej treści pojęcia. Jednak po pierwsze, opis tej konstrukcji nie jest tożsamy ze skonstruowaniem wszystkich ciągów w całości, a nawet ich granic, a przedstawia tylko pewien syntaktyczny przepis, jak uzyskać wszystkie liczby rzeczywiste lub – innymi słowy – jak potencjalnie uzupełnić „luki” w zbiorze liczb wymiernych. Po drugie, jak twierdzi Giaquinto, nie jest możliwe poznanie (uchwycenie) wizualne struktury zbioru liczb rzeczywistych, tak jak np. jest to możliwe w przypadku liczb naturalnych[161].

Brak definicji zbioru nieskończonego

Tym, co jako drugie jest istotne w kontekście wskazania na to, iż Cantor nie odkrywał jedynie w sposób bierny matematyki oraz nie tylko ją definiował, a wymagało to jego twórczego, intencjonalnego wkładu, jest fakt, iż chociaż nie zdefiniował on nigdy zbioru nieskończonego, nie mówiąc już o przedstawieniu matematycznego (przynajmniej z założenia) dowodu jego istnienia, można wskazać, że przy pomocy siatki pojęciowej (przy pomocy zależności syntaktycznych) go skonstruował. W dodatku konstruował obiekty nieskończonościowe – jak się dalej okaże – na różnych poziomach i z różnych perspektyw.

W przeciwieństwie do Dedekinda –o czym niżej – matematyk z Halle nie próbował formalnie wprowadzić treści pojęcia nieskończoności aktualnej, a także nie próbował dowieść jej istnienia czy zasadności używania formalnego (co mogłoby kojarzyć się z założeniami radykalnie konstruktywistycznymi). Tyczy się to różnych etapów pracy Cantora z pojęciem nieskończoności. Pokażemy, że doszedł on do rozważania kwestii nieskończonościowych na drodze pewnych operacji na symbolach oraz nadawania konstrukcjom symbolicznym pewnego znaczenia. Powyższe może świadczyć o tym, iż Cantor raczej opisał nieskończoność aktualną jako pewien konstrukt, będący konsekwencją różnych procesów racjonalnego rozumowania,

Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., *dz. cyt.*; E. Heine, *Die Elemente der Functionenlehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 74, (1872), 172–188.

[160] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 159–160; F. Klein, *The arithmetizing of mathematics*, „Bull. Amer. Math. Soc.” 8, (1896) nr 2, 241–246.

[161] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*

nie zaś jako byt, zwłaszcza wypełniony pewną treścią, daną umysłowi *apriori* (w bezpośrednim doświadczeniu).

Stwierdzenie to może wydawać się zaskakujące, ponieważ znane są argumenty Cantora (filozoficzne, teologiczne), jakimi dowodził on istnienia nieskończoności. Jednakże należy przypomnieć, że w niniejszej pracy jako podstawę bierzemy matematyczną praktykę, nie zaś opisy, deklaracje czy jakąkolwiek pozamatematyczną argumentację.

Poniżej omówimy wspomniany proces konstrukcyjny, w którym matematyk z Halle dochodzi do symboli nieskończonościowych i do pojęcia nieskończoności. Niemniej jednak nie próbował on zdefiniować nieskończoności w sposób bezpośredni.

Widać to już na przykładzie definiowania zbiorów II gatunku, poprzez negację własności, jakie przypisuje zbiorom I gatunku. Zbiory pierwszego gatunku to zbiory nieskończone X, gdzie zawsze istniała taka liczba naturalna n, że n-ta pochodna zbioru X, X^n była skończona. W przypadku zbioru II gatunku Y, nie istniała taka liczba naturalna n, że Y^n była skończona[162].

Podejście to może świadczyć o tym, że Cantor nie „oswoił się" do końca z pojęciem nieskończoności i jej formalną odsłoną „wewnątrz" matematyki. Zdawał sobie sprawę z tego, że dokonał poważnego kroku naukowego, wprowadzając całkowicie nowy byt, a przez to nową perspektywę postrzegania i rozumienia w matematyce.

Rzeczywiście, wprowadzając „świat nieskończoności", Cantor dokonał przełomowej przebudowy stylu uprawiania nauki nie tylko swojego, ale i grona naukowców, którzy ów przełom popierali. Akceptacja nieskończoności aktualnej, a potem niechęć do wypędzenia z owego „raju Cantora"[163] – to właśnie ślady tego, co zrobił w matematyce (bez względu na to,

---

[162] Cantor w ten sposób opisał rozróżnienie zbiorów na dwa gatunki: „Es wird also bei dieser Auffassungsweise das Gebiet aller Punktmengen bestimmter Art als ein besonderes Genus innerhalb des Gebietes aller denkbarren Punktmengen betrachter, von welchem Genus die sogenannten Punktmengen vter Art besondere Art ausmachen" G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reichen*, 1872, w: GA s. 92–102, (s. 98). Por. również z późniejszą definicją: „Hier kann es nun vorkommen daβ der Progeβ der Ableitungen *P', P''*, … zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkte besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so daβ $P^{(n)}$ keine Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat, in diesem Falle sagen win von der Punktmenge *P*, daβ sie von der ersten Gattung und von der nten Art się. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von *P*, die Reihe *P', P'', P''', …,* $P^{(n)}$, …nicht ab, so sagen wir, daβ die Punktmenge P von der zweiten Gattung sie". G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1 (Mathematische Annalen 15 (1), 1–7)…, dz. cyt.*, 140.

[163]Hilbert powiedział, że „z raju, który stworzył nam Cantor, nikomu nie wolno nas wypędzić", D. Hilbert, *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 95, (1926), 170, doi: https://doi.org/10.1007/BF01206605.

jakie towarzyszyły mu przy tym motywacje). Jak jednak najlepiej opisać stosunek filozoficzny matematyka z Halle do samej nieskończoności? Wydaje się, że w kontekście definiowania zbiorów II gatunku Cantor nie odnosił się bezpośrednio do treści pojęcia nieskończoności, ale do tego, co wynikało na ten temat z pewnych operacji na symbolach. Definiował zbiory II gatunku poprzez zaprzeczenie właściwościom zbiorów I gatunku. Należy pamiętać, iż zarówno w przypadku zbiorów I, jak i II gatunku można było mówić o zbiorach nieskończonych. Jednakże w przypadku zbiorów II gatunku nie istniała liczba naturalna, dla której zbiór pochodny o tym wskaźniku nie posiadał kolejnej pochodnej.

Dalej kwestia ta dotyczy ogólnego, rozciągniętego w czasie konstruowania nieskończoności. Po wprowadzeniu podstawowych pojęć i zależności w teorii mnogości, Cantor skupił się na ich rozwijaniu. Doszedł do momentu, gdy zauważył ciąg zależności między kolejnymi pochodnymi w przypadku zbiorów II gatunku:

$$P' \supseteq P'' \supseteq P''' \supseteq \cdots \supseteq P^{(n)} \supseteq \cdots,$$

który można uogólnić na zapis:

$$\forall P_{IIgat} \forall n \in N \bigcap_{n=1}^{n} P^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P^{(n)}.$$

Następnie zdefiniował ową zależność dla przypadku uogólnionego, gdy *n* przebiega do samej nieskończoności:

$$\forall P_{IIgat} \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P^{(\infty)}.$$

Dalsze kroki były umotywowane spostrzeżeniem Cantora, że zbiór $P^{(\infty)}$ również mógł mieć swoją pochodną. Był to moment przełomowy dla stworzenia w konsekwencji Cantorowskich „stopni" nieskończoności, a więc pozaskończonych liczb porządkowych i kardynalnych. Cantor na tej podstawie wprowadził pozaskończone liczby porządkowe w indeksach, a pierwszą z nich była liczba „∞+1". Dalsze liczby były już wytwarzane w wyniku zwykłego „dialektycznego wytwarzania pojęć”[164], a więc można było otrzymać nieskończony ciąg wyrazów:

$$\infty+1,\ldots,\infty+\mathrm{n},\ldots,\infty+\infty,\ldots,\infty\mathrm{n},\ldots,\infty^{2},\ldots,\infty^{\infty},\ldots,\infty^{\infty^{\infty}},\ldots$$ [165],

a w konsekwencji następujący ciąg możliwych pochodnych:

$$P^{\infty+1},\ldots,P^{\infty+\mathrm{n}},\ldots,P^{\infty+\infty},\ldots,P^{\infty\mathrm{n}},\ldots,P^{\infty^{2}},\ldots,P^{\infty^{\infty}},\ldots,P^{\infty^{\infty^{\infty}}},\ldots.$$

Cantor używał na powyższe symbole najpierw określenia „symbole nieskończonościowe”[166], lecz – jak twierdzi Dadaczyński[167] – wcześniej jeszcze zaliczał je do liczb, opierając się m.in. na ich funkcji przedłużania ciągu liczb naturalnych. W pracy z 1883 roku, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, nr 5 rzeczywiście określił „symbole nieskończonościowe” mianem liczb, a także zastosował nowy rodzaj zapisu[168].

---

[164] „eine dialektische Begriffserzeugung”. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen” 17 (3), 355–358)...*, *dz. cyt.*, 148.

[165] „Die erste Ableitung von $P^{(\infty)}$ werde mit $P^{(\infty+1)}$ die n^{te} Ableitung von $P^{(\infty)}$ mit $P^{(\infty+1)}$ bezeichnet; $P^{(\infty)}$ wird aber auch eine, im allgemeinen von 0 verschiedene Ableitung von der Ordnung ∞ haben, wir nennen sie $P^{2\infty}$. Durch Fortsetzung dieser Begriffskonstruktionen kommt man zu Ableitungen, die konsequenterweise durch $P^{(n_0\infty+n_1)}$ zu bezeichnen sind, wo n_0, n_1 positive ganze Zahlen sind”. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen*” *17 (3), 355–358)...*, *dz. cyt.*, 147.

[166] Cantor w niniejszym cytacie odnosi się bezpośrednio do wprowadzonych przez siebie symboli w artykule z 1890 roku. „Versteht man unter α irgendeines der in Bd. 17, S. 357 [Mathematishe Annalen] eingeführten Unendlichkeitssymbole, so hat man...”. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 (Mathematische Annalen 21 (1), 51–58)...*, *dz. cyt.*, 160.

[167] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 37. W przypisie na stronie 38 tegoż dzieła Dadaczyński zauważa, iż już w 1880 roku Cantor – choć jeszcze bez odpowiedniej symboliki – mógł traktować owe nazwane przez siebie „symbole nieskończonościowe” jako liczby.

[168] Cantor w pracy z 1883 roku odwołuje się wprost do artykułu z 1880 i przypisuje wprost „symbolom nieskończonościowym” z tamtego okresu znaczenie obecnie wprowadzonych liczb pozaskończonych. Por. „Das Zeichen ∞ welches ich in Nr 2 dieses Aufsatzes *[*G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1932, 147. – K.T.] gebraucht habe ersetze ich von nun an durch ω, weil das Zeichen ∞ schon vielfach zur Bezeichnung von unbestimmten [d.h. potentiellen] Unendlichkeiten verwandt wird”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*, 195 przyp.1.

Należy zauważyć, iż ten sposób prowadzenia prac badawczych w matematyce przez Cantora potwierdza jego skłonności do wprowadzania i używania pojęć/struktur/zasad, zanim w pełni je – według własnego uznania – sformalizował. Chociaż nie musi oznaczać to u niego podejścia intuicyjnego, można założyć, że intuicja odgrywała w tym procesie jakąś rolę, mimo że z czasem starał się dopracować swoje odkrycia w pełni formalnymi i racjonalnymi metodami.

Można w tym momencie potwierdzić fakt, że Cantor w dużej mierze traktował nieskończoność przede wszystkim jak wynik matematycznych operacji na symbolach. Jako pewną konsekwencję przeprowadzanych, umysłowych działań.

Ale ostatecznie, i co najważniejsze – jako objaw możliwości umysłowych – możliwości immamentnego ujęcia nieskończoności, jako wyniku tych operacji (na różnych poziomach). W tym kontekście rozpoznajemy proponowany konstrukcjonizm, jako przejaw intencjonalnego ujmowania tych wyników, jako aktualną nieskończoność. Wymuszało to – jak można przypuszczać – obronę stanowiska nieskończoności aktualnej, ponieważ kwestia ta nie była tak wprost, formalnie wprowadzana wcześniej w matematyce, co więcej, mogła wydawać się źródłem paradoksów filozoficznych. Stąd – jak sądzimy – jego filozoficzno-teologiczne postulaty o platonizmie matematycznym. Należy pamiętać, że Cantor nie mógł uciec się do bardziej „mentalistycznych" wyjaśnień, ponieważ był dość radykalnym antypsychologistą (ten kierunek ówcześnie panował) oraz antykantystą.

W tym sensie, jeśli mówimy o treści pojęcia nieskończoności (również wtedy, gdy wspominamy o poza-matematycznej argumentacji Cantora za istnieniem nieskończoności), należy mieć na uwadze właśnie ową możliwość potraktowania zbioru nieskończonego jako skonstruowanej, ale gotowej całości. Można mówić tu o zbiorze nieskończonym w kontekście zbioru określonych działań, potencjalnie mogących być wykonywanych bez końca, ale ujętych razem. Wskazuje to na intencjonalne wprowadzenie (skonstruowanie) nieskończoności aktualnej przez Cantora, a w konsekwencji również konkretną reprezentację tego pojęcia.

Opisy konstruowania struktur

Granice ciągów Cauchy'ego

W niniejszym podrozdziale postaramy się wskazać takie obiekty, które Cantor wprowadzał w sposób bardziej bezpośredni poprzez opisy ich konstrukcji. Pierwszym takim obiektem są granice ciągów. W ich przypadku wydaje się, że pilnował on porządku pojęciowego (że można było zgodzić się ze wspomnianym, przypisywanym mu quasi-nominalizmem).

Zdefiniowawszy ciągi Cauchy'ego, Cantor pisze, że definicja ta nie znaczy nic innego, jak tylko określa: „Ciąg (1) [tj. pewien ciąg, z założenia będący ciągiem Cauchy'ego, czyli ciągiem mającym granicę – przyp. K.T.] ma określoną granicę *b*”[169]. W tym miejscu już można zauważyć tendencje Cantora do określania i podkreślania znaczenia pojęciowo-syntaktycznej warstwy teorii matematycznej.

W tym samym miejscu zaznacza również: „gdy *b* jest granicą ciągu (1), a następnie $b-a_n$ wraz ze wzrastającą *n* staje się nieskończenie mała, to określenie ‘granica ciągu (1)’ na *b* znajduje ubocznie pewne uzasadnienie”[170].

Jednocześnie wielkości *b* stają się dla niego *wielkościami liczbowymi*[171]. W tym miejscu również obserwujemy konstrukcyjne operacje, jakie były zauważalne w centrum praktyki matematycznej Cantora. Stwierdzenie „określenie ‘granica ciągu (1)’ na b znajduje ubocznie pewne uzasadnienie” oznacza, iż Cantor przypisywał pojęciom formę syntaktyczną i odnosiło się to także relacji między tymi pojęciami. Były to czynności konstrukcyjne dotyczące bezpośrednio pojęć.

Linia prosta

Innym przykładem czynności konstrukcyjnych Cantora jest przedstawienie przez niego obiektów, które wprowadził w sposób bardziej intencjonalny niż cały zbiór liczb rzeczywistych czy struktury nieskończonościowe. Intencjonalny charakter działań rozumiemy tu w tym znaczeniu, że obiekty te były wprowadzane przez Cantora w celu – jak zostało na początku określone – rozwiązania konkretnych matematycznych problemów. W tym kontekście nie tyle argumentujemy za tym, iż struktury te były zbyt złożone, aby je bezpośrednio odkrywać, co wskazujemy konstrukcję jako metodę świadomego wprowadzania nowych obiektów, poprzez konstruowanie ich oraz ujmowanie jako faktycznie nowe obiekty matematyczne.

---

[169] “Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze *b*.“ G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 93. Tłumaczenie pochodzi z: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych...*, *dz. cyt.*

[170] Pełny akapit pisemnej wypowiedzi Cantora w tym miejscu brzmi: „Aus diesen und den gleich folgenden Definitionen ergiebt sich als Folge, daβ, wenn *b* die Grenze der Reihe (1) ist, als dann $b-a_n$ mit wachsendem *n* unendlich klein wird, womit nebenbei die Bezeichnung ‘Grenze der Reihe (1)’ für *b* eine gewisse Rechtfertigung findet”. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 93. Tekst w języku polskim za: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych...*, *dz. cyt.*, 170.

[171] Por. „Die Gesamtheit der Zahlengröβen *b* möge durch *B* bezeichnet werden”. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 94. Tekst w języku polskim za: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych...*, *dz. cyt.*, 170.

W swojej praktyce matematycznej Cantor przedstawił wiele struktur. Bardziej podstawowe byty matematyczne różnią się od struktur stopniem skomplikowania i poziomem abstrakcji. Na przykład prosta geometryczna oraz prosta, jaką przedstawia Cantor, to – można powiedzieć – dwa różne obiekty. Chociaż zauważał pewien wymóg „poglądowości"[172] (może nawet wizualizacji) niektórych kwestii, jak np. postrzeganie liczb rzeczywistych jako punktów na prostej, to jednak traktował to wyłącznie jako nieformalny aspekt założeń przedmatematycznych. W jego – analizowanej tu – praktyce matematycznej nie zauważamy przyzwolenia na korzystanie z intuicji, a tym bardziej z poglądów (co nie oznacza, że pewne nabyte i przyjęte przez Cantora poglądy nie miały wpływu na jego matematyczną praktykę, na pewne podejmowane w związku z nią decyzje – o czym będzie jeszcze mowa w dalszej części pracy).

Jak zostało opisane, Cantor przedstawił konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych w swojej pracy *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*[173]. W pierwszym paragrafie tej pracy matematyk z Halle konstruuje liczby rzeczywiste, natomiast w drugim wskazuje na izomorfizm pomiędzy skonstruowanym zbiorem a prostą geometryczną[174]. Kolejność rozumowania jest tu trochę inna niż w pracy Dedekinda (wyprzedzając dalsze analizy), który to najpierw odwoływał się intuicyjnie do własności ciągłości linii prostej, aby następnie, zdefiniowawszy ową własność, zdefiniować jednocześnie porządek ciągły na zbiorze. Cantor opiera się na liczbach wymiernych oraz ciągach z nich tworzonych[175].

Cantor zdefiniował uprzednio arytmetycznie zbiór liczb rzeczywistych, następnie odwołał się do linii prostej. Ten moment znacząco różnicuje praktykę i metodologię Cantora od praktyki i metodologii Dedekinda. O ile Dedekind, pomimo swojej precyzji i formalizmu[176],

---

[172] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora..., dz. cyt.*, 160.

[173] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*

[174] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora..., dz. cyt.*; G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*

[175] Mowa o ciągach podstawowych, tj. *Fundamentalereihe.*

[176] Nie była to forma quasi-nominalizmu rozpatrywana przez Dadaczyńskiego por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora…, dz. cyt.* Chodzi raczej o jej przeciwieństwo – pewien platonizm deflacyjny. Istotna różnica między nimi jest taka, że quasi-nominalizm, choć został przez Cantora stosowany w trakcie formalizacji i arytmetyzacji dziewiętnastowiecznej matematyki, opisywał w ten sposób matematyczną praktykę. Jednak jednocześnie Cantor udowadniał filozoficznie

nie bał się wprost sięgać w podstawach teoretycznych konstruowanych przez siebie matematycznych „budowli” do jakiejś umysłowej rzeczywistości[177], o tyle Cantor tego raczej unikał.

Cantor nie tłumaczył w żaden sposób podstaw wprowadzanych przez siebie teorii matematycznych. Nie przedstawiał argumentów pozamatematycznych na matematyczne twierdzenia i metody. Jedynie poza-matematycznie argumentował za pojęciem nieskończoności aktualnej, o czym będziemy jeszcze pisać[178]. Wprowadzał podstawy swoich teorii jako wiedzę *a priori*. Niemniej jednak należy pamiętać o kontekście wiedzy zastanej, jaką każdy matematyk musi najpierw przyswoić, zanim zacznie wprowadzać własne propozycje.

Oczywiście XIX wiek był jeszcze czasem, kiedy kwestie filozoficzne widocznie uwikłane były w badania podstaw matematyki. Stąd pewne kwestie matematyczne mogą się – z perspektywy czasu – łączyć niejako z filozoficznymi. Jednakże chodzi tu o ewidentne metody i problematykę filozoficzną, które Cantor zastosował w kontekście obrony nieskończoności aktualnej w matematyce, przy jednoczesnym braku odniesienia wprost do samych czynności umysłowych, jakie tę nieskończoność konstruowały, a następnie ujmowały.

Sięgnięcie do kontekstu linii prostej w ramach budowanej teorii liczb rzeczywistych w późniejszym etapie tej konstrukcji jest dobrym przykładem na to, że matematyk z Halle unikał odwoływania się do intuicji, a przez to nie zgłębiał zbytnio odzwierciedlających matematyczną praktykę aspektów poznania matematycznego. Cantor nie korzystał z pojęcia *stricte* prostej geometrycznej, a tym bardziej z intuicji geometrycznej, a skonstruował prostą według „przepisu” na liczby rzeczywiste. Pokazywaliśmy, iż konstrukcja R jest zbyt skomplikowana, aby nazwać ją bezpośrednio definicją, dlatego można stwierdzić, iż skonstruowanie w ten sposób prostej również wymagało bardziej skomplikowanego (pojęciowego) przedstawienia. Innymi słowy, można się zgodzić z Giaquinto, który twierdzi,

---

platońską istotę bytów matematycznych. Natomiast platonizm deflacyjny określa postawę matematyka, który pracuje na „istniejących” bytach matematycznych, natomiast ucieka się od wyjaśnień i uzasadnień realnego istnienia tych bytów – co bardziej jest zbliżone do idei niniejszej pracy. Por. L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[177] Dedekind sięgnął w ten sposób do teorii wielkości i pięciu aksjomatów Euklidesa (tj. do V księgi Euklidesa, napisanej przez Eudoksosa), unaocznieniem wielkości były odcinki, tak więc całość miała charakter geometryczny. Arytmetyka została w pewien sposób połączona z geometrią. Jednak to nie oznacza, iż stało się to na płaszczyźnie matematyki – raczej w kontekście indywidualnej praktyki. Niektórzy wyrażają sprzeciw względem takiego utożsamiania teorii Eudoksosa-Euklidesa z propozycją Dedekinda. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*

[178] Nie tłumaczył w ten sposób rozpoczęcia swoich prac nad zbiorami punktów czy nieskończonością.

iż reprezentacja wizualna prostej z własnością ciągłości nie jest w pełni możliwa[179], jednak tu chodzi o prostą, jaką opisał Cantor poprzez konstrukcję liczb rzeczywistych, i własność zupełności, jaką im przypisał.

Dla porównania – Dedekind jako pierwszą będzie analizował własność ciągłości linii prostej, aby pojęcie to sformalizować i ostatecznie tę wyabstrahowaną i sformalizowaną właściwość połączyć z oczekiwaniami arytmetyki i wprowadzić jako główną zasadę konstrukcji liczb rzeczywistych. Natomiast Cantor najpierw skonstruował dziedzinę liczb rzeczywistych[180], a dopiero później wprowadził aksjomatem[181] izomorfizm prostej (geometrycznej) złożonej z punktów ze zbiorem liczb rzeczywistych.

W pierwszej kolejności zastosował dość oczywiste intuicyjnie przyporządkowanie. Każdemu punktowi prostej przypisał jedną liczbę rzeczywistą, poprzez określenia dla każdego punktu odległości od punktu 0 (tj. od konkretnego wyróżnionego punktu)[182].

Następnie, ponieważ przypisanie każdej liczbie dokładnie jednego punktu nie było już takie oczywiste, Cantor wprowadził aksjomat (opisany wyżej), który brzmiał następująco: „dla każdej liczby istnieje jeden określony punkt prostej; taki, którego współrzędna równa jest tej właśnie liczbie”[183].

[179] M. Giaquinto, *Cognition of Structure*..., *dz. cyt.*

[180] Teorię (aksjomaty) zbioru liczb rzeczywistych zbudował dopiero David Hilbert w 1899 roku.

[181] I to jedynym, który wyraził *explicite* i nazwał „aksjomatem”.

[182] „einem Punkte kommen aber unzählig viele gleiche Zahlengrößen als Koordinaten im obigen Sinne zu; denn es folgt, wie schon oben angedeutet wurde, aus rein logischen Gründen, daβ gleichen Zahlengrößen nicht verschiedene Punkte entsprechen können”. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)*..., *dz. cyt.*, 97.

Dadaczyński zauważa, że u Cantora widać pewne problemy w precyzyjnym stosowaniu ustalonych wcześniej pojęć, definicji. Tutaj chodzi o kwestię zdefiniowania liczby rzeczywistej jako nieskończonego zbioru kongruentnych ze sobą ciągów. Cantor pisząc, że punkt ma przypisanych do siebie nieskończenie wiele liczb, myli pojęcie liczby z pojęciem ciągu. Jednakże to kwestia tego, że traktuje on ciągi również jak wyrażenia liczbowe. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 30 przyp.94. W tym kontekście Błaszczyk ma rację, pisząc, iż zabrakło Cantorowi sformalizowania jego teorii na podobieństwo współczesnej formalizacji (chodzi o definiowanie liczby rzeczywistej jako klasy abstrakcji, nie zaś jako poszczególnych ciągów równoważnych ze sobą, których jest przecież nieskończenie wiele). P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 161.

[183] Por. „ zu jeder Zahlengröβe ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröβe”. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)*..., *dz. cyt.*, 97. Tłumaczenie za: J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 30.

Należy podkreślić fakt, iż w pierwszej kolejności przypisanie każdemu punktowi prostej liczby odpowiadającej jego odległości od punktu 0 to pewne (być może nieświadome) odniesienie się do problemu niewymierności, odkrytego w starożytności. Problem ten interpretowany był w kontekście założenia pitagorejczyków, mówiącego, że podstawową cząstką istnienia jest liczba (a raczej liczby naturalne i ich stosunki)[184]. Przyjęcie pitagorejskiej interpretacji metafizycznej skutkowało tym, że pojawiał się problem, iż ta podstawowa cząstka może nie wytwarzać wszystkich „punktów" na prostej geometrycznej (a przynajmniej nie przy pomocy znanych pitagorejczykom metod). Doskonale znanym przykładem była długość przekątnej kwadratu o boku jednostkowym (równa $\sqrt{2}$).

W drugim swoim kroku Cantor niejako arytmetyzuje prostą wprowadzonym przez siebie aksjomatem, zapewnia izomorfizm pomiędzy skonstruowanym przez siebie zbiorem liczb rzeczywistych a zbiorem punktów na prostej. W związku z tym należy przyznać, iż na praktykę matematyczną Cantora w tym zakresie miał niekwestionowany wpływ panujący ówcześnie paradygmat arytmetyzacji matematyki. Jednak nie wyklucza to również wpływów jego założeń filozoficznych na tę praktykę. Kolejność przedstawiania poszczególnych zależności izomorfizmu może w istocie wskazywać, po pierwsze, na postawę antykantowską. Postawa antykantowska, związana z pewną eliminacją intuicji, jest zauważalna w tym, że Cantor nie odwołuje się w pierwszej kolejności do własności linii prostej (jak zobaczymy to u Dedekinda), a pokazuje jedynie przy jej pomocy, iż skonstruowany przez niego zbiór liczb rzeczywistych uzupełnia te „luki" w liczbach, które zauważono już w starożytności, w ramach analiz geometrycznych stosunków długości odcinków. Dopiero później, w następnym kroku, Cantor wprowadza aksjomatycznie zasadę, iż owa prosta, w której punktów jest co najwyżej tyle, ile liczb rzeczywistych, posiada nie mniejszą moc niż tenże zbiór.

Dodatkową kwestią, jaką pod kątem filozoficznym można rozważyć, jest użycie przez Cantora aksjomatu do przedstawienia drugiego etapu pokazywania izomorfizmu między prostą a liczbami rzeczywistymi. Pytanie, jakie się tutaj nasuwa, dotyczy tego, czy Cantor był jakoś przekonany o tej zależności między prostą geometryczną a liczbami rzeczywistymi i tylko nie wiedział, jak ją udowodnić (stąd aksjomat), czy też w sposób zamierzony zdefiniował prostą rzeczywistą, niemającą pod kątem matematycznym, jak i ontologicznym zbyt wiele wspólnego z prostą, określaną w aksjomatach geometrii. Jeśli przyjmiemy pierwszą wersję, można będzie

[184] B. Dembiński, *Powstanie i upadek pitagorejskiego punktualizmu*, „Folia Philosophica" 15, (1997), 23–30.

Cantorowi przypisać w tym miejscu jego założenia platonistyczne, tj. jakieś przeświadczenie o odkrywaniu matematyki, nie zaś jej (współ)tworzenie – jednakże przy założeniu pewnej formy intuicji, która mogłaby owe istniejące przedmioty odbierać, co byłoby sprzeczne z założeniami Cantora. Jeśli natomiast przyjmiemy drugą wersję, możemy przypisać jego praktyce pewne przesłanki dotyczące konstrukcjonizmu, tj. w szczególności przekonanie o możliwości (współ)tworzenia matematyki, w sposób zamierzony (charakteryzujący się celowością, intencjonalnością). Opieramy się na drugiej propozycji, ponieważ nie koliduje ona z deklarowanym, ale też jakoś zauważalnym w matematycznej praktyce Cantora, odrzucaniem intuicji.

Można więc powiedzieć, że o ile Dedekind stworzył zasady arytmetyki liczb rzeczywistych, opierając się na sformalizowanych właściwościach prostej geometrycznej (kontynuował teorię wielkości, zaczynał od geometrii), o tyle Cantor narzucił aksjomatem prostej geometrycznej złożonej z punktów liczebność tych punktów równą liczebności (mocy) zbioru liczb rzeczywistych (poszukiwał wypełnienia luk w zbiorze Q, „dostosował geometrię" do budowanej dziedziny). To może świadczyć również o różnicach pomiędzy rolą wyobrażeń na temat prostej geometrycznej u Cantora i u Dedekinda. Bez wątpienia, Dedekind mógł postrzegać prostą geometryczną jako prawowity obiekt matematyczny. Natomiast Cantor, zdaje się, mógł ją traktować bardziej jako pewien wynik oglądu matematycznej rzeczywistości, jednak już nie postrzegał tak wprowadzonej prostej rzeczywistej.

W tym kontekście Cantor zakładał apriorycznie słuszność kierunku rygorystycznej arytmetyzacji matematyki, nie zastanawiając się głębiej nad kwestiami geometrycznymi. Dedekind natomiast, nie przyjmując żadnych pozamatematycznych założeń, nie czuł się zobowiązany, aby traktować jakikolwiek przedmiot matematyki jako mniej lub bardziej predystynowany do miana właściwego obiektu matematyki (choć arytmetyzacja czy formalizacja dziewiętnastowiecznej matematyki również była jego naukowym zamiarem). Stąd uznawał za w pełni naukowe swoje rozważania o własności ciągłości, która charakteryzowała prostą geometryczną, a którą potrzebował zdefiniować formalnie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Dalej przypomnimy, że Dedekind nie pokazał przez wprowadzenie izomorfizmu obu konstrukcji[185], iż aksjomat, który Cantor przedstawił, aby stworzyć funkcję jednoznacznie

[185] Dadaczyński twierdzi, że Dedekind wskazał na równoważność obu aksjomatów. Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 30. Jednakże Błaszczyk wskazuje na fakt, iż Dedekind twierdził, że Aksjomat Ciągłości jest niezależny od geometrii euklidesowej (tj. że geometryczna linia prosta niekoniecznie jest ciągła w sensie Dedekinda). Por. P. Błaszczyk,

przyporządkowującą punkty liczbom rzeczywistym, jest równoważny z Dedekinda zasadą ciągłości. Gdyby jednak Cantor opracował swój aksjomat w sposób jasny i klarowny (chodzi o uzupełnienie Aksjomatem Archimedesa), w kontekście konstrukcji liczb rzeczywistych, byłaby ona (owa konstrukcja) formalnie zabezpieczona przed nieskończenie małymi wielkościami, z którymi Cantor walczył. Jednak aksjomat, o którym mowa, służył Cantorowi przede wszystkim do pokazania izomorfizmu między zbiorem liczb rzeczywistych a linią prostą złożoną z punktów. Aksjomatyczna teoria została właściwie zbudowana dopiero przez Davida Hilberta (poprzez zaksjomatyzowanie własności zbiorów liczbowych).

Cantor wskazał na fakt (który zresztą później potwierdził Hilbert)[186], że owa wzajemnie jednoznacznie odwzorowująca funkcja (bijekcja) między *R* (zbiorem liczb rzeczywistych) a prostą zachowuje wszystkie podstawowe działania i relacje[187]. Co więcej, wskazał również, że każde twierdzenie prawdziwe w jednej dziedzinie będzie spełnione również w drugiej[188]. Tym samym Cantor uwolnił prostą od koniecznych konotacji geometrycznych – można ją było badać pod kątem tak arytmetycznym, jak i topologicznym[189].

Wprawdzie koniec końców Cantor odwołał się w jakiś sposób do geometrii[190], to jak widać tylko po to, aby tę sferę sformalizować i wyzuć (tak sferę geometrycznej prostej, jak i

---

Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen..., dz. cyt., 80. Wskazuje, że David McCarty pyta, czemu Dedekind nie stwierdził izomorfizmu pomiędzy oboma konstrukcjami (przynajmniej w 1872 roku). P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen..., dz. cyt.*, 307. Jednakże, jak postulujemy, prosta, o której pisał Cantor, również niekoniecznie była prostą geometryczną.

186 D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 8, (1900), 180–183.

187 Por. „Hierauf wird nachgewiesen, daβ das Gröβer-, Kleiner- und Gleichsein von bekannten Entfernungen in Übereinstimmung ist mit dem früher definierten Gröβer-, Kleiner- und Gleichsein der ensprechenden Zahlengröβen welche die Entfernungen angeben". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 96.

188 Por. „Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengröβen nenne ich der Kürze halber eine Wertmenge und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine Punktmenge. Was im folgenden von Punktmengen ausgesprochen wird, läβt sich dem gesagten gemäβ unmittelbar auf Wertmengen übertragen". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 97.

189 Sama idea arytmetyzacji linii prostej nie jest nowa. Jak zauważa Dadaczyński, była to idea znana już starożytnym matematykom, a następnie Kartezjuszowi – który był twórcą geometrii analitycznej. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 31 przyp.99.

190 Kartezjusz wprowadził geometrię analityczną w swojej *Géométrie* (R. Descartes, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, Paris 1637.). Była ona uważana za metodę arytmetyzacji czy inaczej, formalizacji geometrii. Por. L.E.J. Brouwer, *Intuicjonizm i formalizm*, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, tłum. R. Murawski, Poznań 2003, 266–267. Istotną zaś cechą dziewiętnastowiecznej matematyki była właśnie tendencja

arytmetykę) ze skojarzeń i intuicji geometrycznych, przed którymi przestrzegał[191] – tak jak robiła to większość matematyków XIX wieku. Oczywiście, można zadać w tym miejscu pytanie, czy rzeczywiście Cantor chciał tę geometrię przyporządować formalistycznemu językowi arytmetyki – tak jak robił to Dedekind – czy nie odwoływał się do niej, aby zaczerpnąć z intuicyjnego wyobrażenia o geometrycznej prostej. Oczywiście nie możemy w całości wykluczyć jego korzystania z intuicyjnej – czy po prostu, jako takiej – wyobraźni, po części zakładamy to odnośnie do każdego matematyka za Poincarém[192]. Lecz powołując się na przeanalizowane naukowe działanie Cantora w tym obszarze, można raczej odrzucić taką hipotezę jako filar rozważań na temat jego praktyki.

Podsumowując: podczas wykazywania izomorfizmu zbioru liczb rzeczywistych ze zbiorem punktów na prostej Cantor najpierw upewnił się, że prosta, o której wspomina, to prosta zarytmetyzowana (dzięki przypisaniu każdemu z jej punktów odległości od 0), później dopiero wprowadził aksjomat przypisujący każdej liczbie rzeczywistej osobny punkt na tej prostej. Można powiedzieć, że Cantor arytmetyzował prostą przy pomocy skonstruowanych przez siebie liczb rzeczywistych, podczas gdy – o czym będzie mowa niżej – Dedekind opracował model liczb rzeczywistych dzięki połączeniu ze sobą wyabstrahowanej właściwości ciągłości prostej geometrycznej z właściwością bycia punktowym zbiorem. Mimo istotnych różnic między tymi badaczami, u Cantora ewidentnie widać – w pewnym zakresie – odwołanie do metod konstrukcyjnych, co nakazuje zweryfikować dotychczasowe interpretacje filozofii uwikłanej w jego działalność naukową.

---

do pozbywania się nieukształtowanej intuicji (również geometrycznej) i formalizowania treści matematycznej. Jedyna dopuszczalna była intuicja matematyczna, o której pisał wcześniej Kartezjusz, że nie jest nią: „niezmienne świadectwo zmysłów lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy zgoła już wątpić nie możem”. R. Descartes, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie...*, *dz. cyt.*, 12–14.

[191] „Nach dem Vorgehenden können die Zahlengröβen den Punkten einer Geraden zugeordnet gedächt werden. Der Anschaulichkeit wegen (nicht daβ es wesentlich zur Sache gehörte) bedienen wir uns dieser Vorstellung im folgenden und haben, wenn wir von Punkten sprechen, stets Werte im Auge, durch welche sie gegeben sind”. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 97.

[192] S. Gandon, *Quelle philosophie pour quelle mathématique?*, „Archives de Philosophie” 76, (2013) nr 2, 197–216.

Zasady generowania liczb porządkowych

Kolejnym obiektem, jaki Cantor wprowadził, bezpośrednio odnosząc się do „przepisu" na jego konstrukcje, są liczby porządkowe – które z kolei wiążą się generalnie z liczbami pozaskończonymi, będącymi ważną częścią teorii mnogości.

Z kwestią liczb pozaskończonych Cantora wiązały się dwa, jednakowo ważne pojęcia (rodzaje liczb): liczby porządkowe[193] oraz liczby kardynalne[194]. Opis, jak tworzyć liczby porządkowe, może być postrzegany jak instrukcja, według której może być wykonywana określona procedura syntaktyczna. Przy czym zakładamy, że procedura taka wymaga czynności twórczej lub odtwórczej. Można założyć, że chodzi o czynność, jaką należy wykonać przy odbieraniu i przyswajaniu informacji o konstrukcji – generowaniu – liczb porządkowych.

---

[193] Współczesna definicja *liczby porządkowej* (której autorstwo przypisywane jest Johnowi von Neumannowi) brzmi następująco: *liczba porządkowa* to zbiór przechodni, liniowo uporządkowany przez relację bycia podzbiorem ($\subseteq$). Innymi słowy, zbiór α to liczba porządkowa, jeśli:

1. każdy element $\beta \in \alpha$ jest podzbiorem α:

$(\forall\beta \in \alpha)(\beta \subseteq \alpha)$,

2. każde dwa (różne od siebie) elementy zbioru α są porównywalne w relacji $\subseteq$:

$(\forall\beta, \gamma \in \alpha)(\beta \neq \gamma => \beta \subseteq \gamma \vee \gamma \subseteq \beta)$.

Dla teorii bez *aksjomatu regularności* (jest to jeden z aksjomatów teorii mnogości ZF, który gwarantuje, iż żaden zbiór nie jest swoim własnym elementem) potrzebny jest *postulat ufundowania* (np. w przypadku ZFC_0):

3. w każdym niepustym podzbiorze zbioru α jest zawarty element ε *–minimalny*:

$$A \neq 0 => (\exists c \in A)(c \cap A = 0).$$

Por. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa 1966, 247; J. von Neumann, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, „Acta Litt. ac Scientiarum r. Univ. Hung. Franc. Joseph., Sectio sc math" 1, (1923), 199–208.

[194] Współcześnie *liczba kardynalna* – innymi słowy *moc zbioru* – oznacza liczebność (liczbę elementów) tego zbioru. Dla określenia równoliczności dwóch zbiorów (tj. stwierdzenia, iż moce dwóch różnych zbiorów są równe) stosuje się metodę porównywania poprzez „łączenie" elementów tych dwóch zbiorów w pary (dla dwóch zbiorów A i B, w każdej parze (a,b), element a należy do zbioru A, natomiast element b należy do zbioru B). Dla zbiorów nieskończonych nie ma innej metody stwierdzania ich równoliczności – w zbiorze nieskończonym nie można zwyczajnie policzyć elementów.

Dla oznaczania liczby kardynalnej/mocy zbioru używa się (do wyboru) następujące symbole: $|A|$, $n(A)$, $card(A)$, $\bar{\bar{A}}$ lub $\#A$. Pierwszy symbol (przy odpowiednim kontekście teoretycznym) oznacza w matematyce również wartość bezwzględną liczby rzeczywistej lub moduł liczby zespolonej. Cantor oznaczał moc (liczbę kardynalną) zbioru jako coś, co pozostaje po abstrahowaniu od jakości elementów danego zbioru i od ich porządku, z racji tego, że była to podwójna czynność abstrahowania (podwójny akt abstrakcji), dopasował symbol $\bar{\bar{A}}$.

K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*..., *dz. cyt.*, 94–96.

Jednakże należy pamiętać, iż Cantor jest autorem zarówno tych liczb, jak i przepisu na ich konstrukcję.

Jak wskazuje Dadaczyński, konstrukt[195] pozaskończonych liczb porządkowych związany był ściśle ze zbiorami II gatunku, a wymyślony został przy okazji pracy nad artykułem z 1872 roku, tam też został (choć jeszcze nieformalnie i w sposób nie do końca jasny i widoczny) przedstawiony[196]. Wtedy dotyczyło to zbiorów II gatunku, które (w przeciwieństwie do zbiorów I gatunku) miały z definicji nieskończenie wiele pochodnych[197]. Oznaczenia pochodnych nieskończonych rzędów było związane z owymi symbolami nieskończonościowymi, traktowanymi w 1872 roku przez Cantora jako pojęcia „dialektycznie

[195] Nie mamy tu bynajmniej na myśli przedstawienia Cantora jako radykalnego konstruktywisty. Jednakże po raz kolejny nie da się uniknąć śladów konstrukcjonizmu w samej jego praktyce matematycznej. Nie należy zapominać, iż liczby porządkowe – o których więcej za chwilę – Cantor przedstawił przy pomocy zasad generowania. Liczby porządkowe są więc generowane w procesie umysłowym (jest to proces oparty na postępowaniu według podanych zasad), zarówno podczas wprowadzania ich (przez Cantora), jak i podczas zapoznawania się z nimi przez innych matematyków i przekazywania o nich wiedzy innym podmiotom. Jednakże należy zwrócić uwagę na to, że o ile sam konstrukcjonizm (podkreślający procesy, w których umysł matematyka jest niezbędny dla wytwarzania matematycznej wiedzy) jest niejako czymś naturalnym w obrębie praktyki matematycznej, o tyle u Cantora wynika z wprowadzania przez niego – niekoniecznie w pełni intencjonalnie – struktur.

[196] Por. z dwoma argumentami Dadaczyńskiego na to, iż o pozaskończonych liczbach porządkowych Cantora można już mówić w kontekście artykułu z 1872 roku. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 38–39. Dadaczyński wskazuje na dwa argumenty przemawiające za tym, aby genezy liczb pozaskończonych upatrywać właśnie w tym okresie, a nie dopiero w latach osiemdziesiątych, gdy Cantor formalnie zaczął wprowadzać teoriomnogościowe pojęcia. Pierwszym argumentem jest stwierdzenie Dadaczyńskiego, iż „idei” liczb pozaskończonych można szukać już (i to w sposób łatwy do wykazania) w artykule Cantora z 1872 roku, który dotyczył (ostatniego) uogólnienia twierdzenia o szeregach trygonometrycznych. Natomiast drugi argument dotyczy faktu, iż Cantor w późniejszych pracach sam twierdził, iż pomysł liczb pozaskończonych (czy też po prostu pozaskończonej indeksacji zbiorów pochodnych) pojawił mu się właśnie w trakcie pracy nad ostatnim uogólnieniem twierdzenia o szeregach trygonometrycznych. Cantor wprost pisał w przypisie w artykule z 1880 roku (usuniętym w wydaniu zbiorowym dzieł Cantora redagowanym przez Zermelo), dotyczącym ciągu symboli nieskończonościowych ($\infty + 1, \infty + 2,$ …), że pomysł porządkowych liczb pozaskończonych powstał w trakcie pisania artykułu dotyczącego twierdzenia z zakresu szeregów trygonometrycznych. („*Zu derselben bin ich vor nun zehn Jahren gelangt, bei Gelegenheit einer eigethümlichen Darstellung des Zahlenbegriffs (Math.Ann. 5) habe ich entfernt darauf hingewiesen*”. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 39 przyp.130.). Następnie potwierdził to stanowisko w liście do wydawcy: „Unter Anderm ist es ein grosser Irrthum der Herrn Recensenten, wenn er glaubt, dass dasjenige, was ich früher Unendlichkeitssymbole jetzt aber transfinite oder überendliche Zahlen nenne, nur dort gebraucht werden könne, wo diese Begriffe historisch zuerst aufgetreten und von mir entdeckt worden sind, nämlich bei den verschiedenen Ableitungen

$$P^1, \ldots, P^\nu, \ldots, P^\omega, \ldots, P^{\omega^\omega}, \ldots, P^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$$

einer beliebigen Punktmenge P^n”. G. Cantor, *List do G. Mittag-Lefflera z dn. 20.10.1884*, „Nachlaβ Georg Cantors, Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek” 16, (1884), 3; J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora…*, *dz. cyt.*, 39 przyp.130.

[197] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)…*, *dz. cyt.*, 98.

generowane”. Jednakże w 1883 roku podaje on zasady generowania dla porządkowych liczb pozaskończonych. W tym ogólnym sensie, o ile w początkach teorii mnogości Cantor może traktować liczby pozaskończone w sposób nominalistyczny (syntaktyczno-pojęciowy), o tyle później, w ramach podanych zasad generowania, wprowadza ślad konstrukcjonizmu. Pisze on:

> „Dwie zasady tworzenia, za pomocą których, jak zobaczymy, definiuje się nowe, określone liczby nieskończone, są tego rodzaju, że przez ich połączone działanie można przełamać każdą barierę w pojęciowym tworzeniu liczb całkowitych rzeczywistych”[198].

Zauważmy, że Cantor, pisząc o „pojęciowym tworzeniu”, opisuje proces wykonywany przez umysł (nawet jeśli chodzi o same odtwarzanie). O trzeciej zasadzie generowania wyraża się następująco: „przeciwstawia się im trzecia zasada, którą nazywam zasadą zahamowania lub ograniczenia, zgodnie z którą na absolutnie niekończący się proces formowania nakładane są sukcesywnie pewne granice”[199].

Pisze on o *niekończącym się procesie formowania* i *nakładaniu granic*. Nawet jeśli chodzi o procesy umysłowe wykonywane w obrębie danych wcześniej pojęć, zasady generowania podane przez Cantora określają praktykę matematyczną w zakresie ich zdefiniowania, rozumienia oraz umysłowego odtwarzania. Można więc stwierdzić przejawy konstrukcjonizmu u Cantora w budowaniu i rozwijaniu jego teorii mnogości.

Ogólnie rzecz biorąc, liczby porządkowe pozwalały Cantorowi rozszerzyć w bardzo oczywisty (tj. bez problematyzacji strony techniczno-formalnej) sposób pojęcie i zbiór liczb naturalnych *N*. Było to możliwe dzięki następującemu podziałowi liczb (również liczb pozaskończonych) na klasy:

(1) „pierwsza klasa liczb” to skończone liczby porządkowe zbioru *N* liczb naturalnych;

---

[198] „Die beiden Erzeugungsprinzipe, mit deren Hilfe, wie sich zeigen wird, die neuen bestimmt unendlichen Zahlen definiert werden, sind solcher Art, daß durch ihre vereinigte Wirkung jede Schranke in der Begriffsbildung realerganzer Zahlen durchbrochen werden kann”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*, 166–167.

[199] „glücklicherweise stellt sich ihnen aber, wie wir sehen werden, ein drittes Prinzip, welches ich das Hemmungsoder Beschränkungsprinzip nenne, entgegen, wodurch dem durchaus endlosen Bildungsprozeß sukzessive gewisse Schranken auferlegt werden, so daß wir natürliche Abschnitte in der absolut unendlichen Folge der realen ganzen Zahlen erhalten, welche Abschnitte ich Zahlenklassen nenne”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*, 167.

(2) „druga klasa liczb" to ω i wszystkie następne liczby (w tym ω^{ω} i inne), z policzalnym zestawem poprzedników[200];

(3) „trzecia klasa liczb" to wszystkie pozaskończone liczby porządkowe, których zbiór poprzedników ma liczność $\aleph_1$[201];

itd.

W ten sposób można tworzyć coraz wyższe „klasy" liczb w nieskończoność[202].

Zasady generowania liczb pozaskończonych można ująć w skrócie, jak poniżej:

- istnieje **a** + 1 dla dowolnej liczby *a*;
- istnieje liczba *b*, która następuje bezpośrednio po dowolnym ciągu liczb bez ostatniego elementu[203].

Po wszystkich liczbach skończonych mamy więc pierwszą liczbę pozaskończoną ω. I tak, jeśli przez (1) mamy ciąg:

„ω + 1, ω + 2,…, ω + *n*, …",

[200] Ten warunek był zaproponowany z powodu twierdzenia Cantora-Bendixsona, a raczej przez problem z jego udowodnieniem, por. J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020. Dzięki niemu Cantor mógł pokazać, że nie ma mocy pośredniej pomiędzy licznością „drugiej klasy liczb" a licznością *N*. Piszemy że: card(N) = ℵ0, oraz card(R) = ℵ1.

[201] „Die erste Zahlenklassen (I) ist die Menge der endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, …, *v*, …, auf sie folgt die zweite Zahlenklasse (II), bestehend aus gewissen in bestimmter Sukzession einander folgenden unendlichen ganzen Zahlen; erst nachdem die zweiten Zahlenklasse definiert ist, kommt man zur dritten, dann zur vierten usw". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 166–167. „Pierwsza klasa liczb (I) to zbiór skończonych liczb całkowitych 1, 2, 3, ..., *v*, ..., po których następuje druga klasa liczb (II), składająca się z pewnych nieskończonych liczb całkowitych następujących po sobie w pewnej sukcesji; dopiero po zdefiniowaniu drugiej klasy liczb dochodzi się do trzeciej, potem do czwartej itd.".

Liczność tej nowej (trzeciej) klasy liczb wynosi $\aleph_2$. Użyta notacja alef została wprowadzona przez Cantora dopiero w 1895 roku. Por. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1895, 282–356.

[202] Istotne jest, iż liczby porządkowe i kardynalne dopiero w pełni rozróżniać dopiero w nieskończoności. W zbiorze liczb naturalnych to praktycznie te same liczby (naturalne). Por. „Bei endlichen Mengen fällt die Mächtigkeit mit der Anzahl der Elemente zusammen, weil solche Mengen in jeder Anordnung bekanntlich dieselbe Anzahl von Elementen haben. Bei unendlichen Mengen hingegen war bisher überhaupt weder in meinen Arbeiten noch sonst wo von einer präzis definierten Anzahl ihrer Elemente die Rede, wohl aber konnte auch ihnen eine bestimmte, von ihrer Anordnung völlig unabhängige Mächtigkeit zugeschrieben werden". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 167.

[203] Por. z interpretacją „zasad generowania" liczb pozaskończonych Cantora w: J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory..., dz. cyt.* Inne sformułowanie zasad generujących znajdziemy w propozycji: I. Jane, *The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set*, „Erkenntnis" 42, (1995) nr 3, 394–395. Oryginał: G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 166–170.

to możemy przejść do wyrażenia

$$\omega + \omega = \omega \cdot 2.$$

Prawa strona równania w końcu dojdzie do $\omega \cdot \omega$, po czym stopniujemy wyrażenie ω^n. Tak dochodzimy do nieskończonego ciągu liczb pozaskończonych:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + n, \ldots, \omega + \omega = \omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot n, \omega \cdot n + 1, \ldots, \omega^2, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$ [204].

Ilekroć pojawia się ciąg bez ostatniego elementu (tj. nieskończony ciąg elementów), można przejść dalej i przeskoczyć poziom wyżej. Jak zaznacza Cantor – jest to możliwe dzięki „trzeciej zasadzie generowania", która stanowi w pewnym sensie zasadę ograniczającą czy też hamującą nieskończony proces (w danym zbiorze) po to, aby przejść do następnego procesu (w innym zbiorze)[205].

Jeśli chodzi o trzecią zasadę (*Hemmungsprinzip*), sprowadza się ona do „uznania wszystkich liczb poprzedzających α (trzecia klasa liczbowa) za zbiór o mocy równolicznej z pierwszą klasą liczbową (klasą liczb porządkowych skończonych)"[206]. Innymi słowy, Cantor wprowadził zasadę, w myśl której: „nową liczbę porządkową można utworzyć jedynie wtedy, kiedy zbiór liczb ją poprzedzających ma dobrze określoną moc"[207].

Sama „konstrukcja" czy też „zawartość" pojęcia pozaskończonej liczby porządkowej była wprowadzona i używana przez Cantora już wcześniej, na początku lat siedemdziesiątych XIX wieku, dlatego też sam symbol liczby pozaskończonej nie zmienił nic w treści. Liczba pozaskończona w umyśle Cantora pojawiła się i funkcjonowała pod postacią zwykłych symboli nieskończonościowych, a nawet – jak sam zresztą twierdził – została „odkryta" przy okazji pracy nad tematem niezwiązanym na pierwszy rzut oka z teorią mnogości. Można więc w tym momencie nawiązać do stosunku Cantora odnośnie do liczb i punktów/zbiorów oraz zależności między nimi.

[204] J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory..., dz. cyt.*

[205] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 166–169. Więcej o zasadzie ograniczania (Hemmungsocier Beschrdankungsprinzip) dla zbiorów liczb pozaskończonych, pisze J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton, New Jersey 1979, 98.

[206] P. Markiewicz, *Georga Cantora filozofia nieskończoności = Georg Cantor's Philosophy of Infinity*, „Humanistyka i przyrodoznastwo" 10, (2004), 64.

[207] K. Wójtowicz, *O hipotezie Continuum*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXII, (1998), 39.

Praca doktorska Cantora dotyczyła jeszcze teorii liczb, natomiast w 1872 roku zmienił on badanie samej dziedziny liczbowej na pracę nad zbiorami punktowymi. Nie wiadomo, czy je utożsamiał, czy może traktował jako zamienne pojęcia, byty (nie wyraził tego wystarczająco wyraźnie), ale ewidentnie zdefiniował owe zbiory punktowe jako liczby. Nie ustalił jednak ostatecznie formalnego stosunku liczb do elementów/zbiorów (i na odwrót), chociaż mógł uważać, że matematyka jest oparta na teorii mnogości – a więc że elementy zbiorów, podstawowe cząstki, budują całą matematykę. W związku z tym należy uznać wskazany aspekt pracy Cantora za charakteryzujący jego praktykę matematyczną. Chodziłoby głównie o owo podejście, które przez cały czas uprawiania przez Cantora matematyki rozwijało się, jednak nie było postawione jasno i wprost. Wprawdzie Dadaczyński twierdzi, że Cantor odniósł się do pytania o definicję liczby[208], a także wiemy, że uważał, iż teoria mnogości (a więc zbiory), stanowi podstawę całej matematyki, to jednak nie wypowiedział się w sposób formalny o stosunku liczb i zbiorów. Można więc sądzić, że albo traktował obydwa pojęcia jako – względnie – pierwotne i oczywiste, albo podchodził do nich w sposób intuicyjny, traktując je jako pojęcia pierwsze, jako bardziej podstawowe uwzględniając najpierw liczby, a później zbiory/elementy. O ile jednak podstawy teorii mnogości na samym początku mógł rozumieć częściowo intuicyjnie, o tyle pojęcie liczby powinno być dla niego – jak dla Weierstrassa – przyjmowanym bez pytań, „bytem". Aby przyjąć jakieś stanowisko w tej sprawie, można po prostu założyć, iż zarówno liczby, jak i zbiory były przez Cantora traktowane wymiennie. Mogły (pod pewnymi warunkami) być dwoma reprezentacjami tej samej matematycznej podstawowej jednostki.

Formalne wprowadzenie liczb pozaskończonych było bardzo kontrowersyjne dla większości jemu współczesnych matematyków[209], a być może również dla innych naukowców, choć sama nieskończoność potencjalna była pojęciem szeroko wykorzystywanym i traktowanym jako niekontrowersyjne już od czasów Arystotelesa. Dla Cantora jednak właśnie liczby pozaskończone, z całą zawartością tego pojęcia (a nie jedynie ich formalno-nominalistyczne symbole), pełniły bardzo ważne funkcje. Należy pamiętać, że oprócz przedłużenia liczb naturalnych, które Cantor przyjmował jako oczywiste byty w matematyce

[208] Cantor nazywał ciągi podstawowe wielkościami liczbowymi (*Zahlengrößen*), jeśli można było między nimi wprowadzić relację mniejszości, równości bądź większości. Por. G. Cantor, *Das Script der Vorlesung uber Differentialrechnung vom Sommersemester*, „Nachlaβ Georg Cantors. Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek" 16, (1870), 3; cyt. za: J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora…*, *dz. cyt.*, 44.

[209] Jak na przykład dla wspomnianego wcześniej Kroneckera. J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2*, „Studia Philosophiae Christianae" 39, (2003) nr 2, 273–302.

(bez szczególnego zaznaczania, iż są to tylko symbole), liczby pozaskończone wyrażały nowe treści (nieskończoność aktualną), której istnienie Cantor uzasadniał również filozoficznie oraz teologicznie. Stąd możemy stwierdzić, iż uważał za realną treść symboli, określających wielkości liczbowe, nawet jeśli owa treść miałaby być jedynie pewną „wielkością liniową” (*lineare Grössenbegriffe*)[210].

Jeśli zaś chodzi o liczby pozaskończone, ta treść zdaje się miała podwójne znaczenie (tj. dwa konteksty) – wielkości liniowej mającej prawdopodobnie związek z poglądowością Cantora na temat możliwości postrzegania liczb rzeczywistych jako punktów na prostej (a więc mogącej nawiązywać do teorii stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa) oraz aktualnej nieskończoności (istniejącej aktualnie nieskończoności „wielkiej”, jaką reprezentowały pozaskończone liczby kardynalne i porządkowe, oraz tej „małej”, reprezentowanej przez wielkości nieskończenie małe, jakim Cantor przeciwstawiał zbudowane liczby pozaskończone, ponieważ uważał że istnieją one jedynie w sposób potencjalny)[211].

Konstruowanie i dekonstruowanie obiektów

Zbiory potęgowe

Poniżej opiszemy kilka pomniejszych przypadków obiektów matematycznych, które pokażą, iż oprócz takich argumentów, jak złożoność konstruowanych struktur czy kwestia bezpośredniej intencjonalności towarzyszącej ich konstruowaniu, istnieją też inne powody, aby uwzględnić umysłowe czynności matematycznego podmiotu jako źródło rozwoju matematycznej wiedzy. Chodzi tu o tzw. dekonstruowanie, w wyniku którego otrzymujemy nowe obiekty poprzez pozbawienie ich wcześniejszych właściwości (jakimi są liczby kardynalne, ale i zbiór pusty). Aby podkreślić ów proces dekonstrukcji, przedstawimy najpierw prostą konstrukcję zbiorów potęgowych, jakimi Cantor rozpoczął rozważania teoriomnogościowe (w kontekście analitycznego problemu reprezentacji funkcji przez szereg).

Jak już zostało wspomniane, można uważać, że Cantor nie definiował w prosty sposób obiektów teoriomnogościowych, a konstruował je przy pomocy skomplikowanych, w

[210] Por. G. Cantor, *Letter from Cantor to Kerry, February 4, 1887*, w: *Georg Cantor Briefe*, red. H. Meschkowski, W. Nilson, Berlin, Heidelberg, New York 1887, 275–276; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*, „Arch. Hist. Exact Sci.” 60, (2006), 29.

[211] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1887, 378–439.

większości pojęciowo-syntaktycznych operacji. Pytanie o to, jak owe operacje wpływały na zaistnienie matematycznych obiektów (bądź jakąkolwiek ich właściwość) w sferze intersubiektywnej bądź transsubiektywnej, rozumianych według podejścia Cantora, wydaje się jednak wykraczać poza niezbędną, wewnętrzną perspektywę. Można to zauważyć na przykładzie konstruowania nieskończonościowego iloczynu zbiorów pochodnych, gdzie symbol nieskończoności był – podobnie jak w przypadku granic ciągów – symbolem przypisanym uogólnieniu i „wzięciu w całość" nieskończonego procesu operowania symbolami. W tym sensie jest możliwa konstrukcja obiektów nieskończonych przy pomocy skończonych procedur.

Cantor definiował zbiór pochodny P' bardzo prosto – był to zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru P[212]. Od zbioru pochodnego P', o ile był on dalej nieskończony (gdy był skończony, jego zbiór pochodny miał moc 0), można było tworzyć następny zbiór pochodny (P'', który był zbiorem pochodnym zbioru P'). Powtarzając procedurę, można było otrzymać dalsze zbiory pochodne:

$$P''', P'''', \ldots, P^{(n)}, \ldots.$$

W artykule z 1879 roku Cantor zdefiniował zbiory drugiego (II) gatunku. Zbiory te definiował, podobnie jak wcześniej, w opozycji do zbiorów pierwszego (I) gatunku. O ile – jak sam tłumaczył – w zbiorach I gatunku dochodzimy w ciągu pochodnych do takiej pochodnej $P^{(n)}$, która nie ma punktów skupienia (ponieważ ma skończoną liczbę punktów), to w zbiorach II gatunku szereg pochodnych nie zostaje przerwany – nie ma takiej pochodnej $P^{(n)}$, która byłaby ostatnią pochodną, tj. zbiorem o skończonej liczbie punktów[213].

Stąd odnośnie do zbiorów II gatunku matematyk z Halle stwierdził, że można podać przykłady takich zbiorów, dla których każdy zbiór pochodny $P^{(n)}$, przy każdym naturalnym n

---

[212] „Es ist nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge P, entweder ein Grenzpunkt derseiben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge P die Menge ihrer Grenzpunkte begrifflich mit gegeben, welche ich mit P' bezeichnen und die erste abgeleitete Punktmenge von P nennen will". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)*..., *dz. cyt.*, 98.

[213] „Hier kann es nun vorkommen, daβ der Progreβ der Ableitungen P', P'', … zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkten besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so daβ $P^{(n)}$ keine Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat; in diesem Falle sagen wir von der Punktmenge P, daβ sie von der ersten Gattung und von der nten Art się. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von P, die Reihe P', P'', ..., $P^{(n)}$, … nicht ab, so sagen wir, daβ die Punktmenge P von der zweiten Gattung sie". G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1 (Mathematische Annalen 15 (1), 1–7)*..., *dz. cyt.*, 140.

jest niepusty[214]. Wtedy przecięciem (częścią wspólną) wszystkich tych pochodnych zbiorów jest $P^{(\infty)}$, tj. pochodna numer ∞:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)} = P^{\infty}.$$

W ten sposób Cantor po raz pierwszy wprowadził formalnie aktualną nieskończoność[215]. Owa nieskończoność pozwoliła rozróżnić dwa rodzaje zbiorów – I gatunku i II gatunku.

Zbiory pierwszego gatunku były zbiorami nieskończonymi, gdzie dla każdego zbioru X zawsze istniała taka liczba naturalna n, że n-ta pochodna zbioru X, X^n była złożona ze skończonej liczby punktów, a więc już nie istniała pochodna X^{n+1}. Jeśli zaś chodzi o zbiory drugiego gatunku, Cantor nie zdefiniował ich formalnie (przynajmniej na początku) wprost. Jednak zgodnie z prawem wyłączonego środka można łatwo wywnioskować, że w przypadku każdego zbioru II gatunku Y nie istnieje żadna liczba naturalna n, taka że Y^n ma skończoną liczbę punktów[216].

W tym miejscu można stwierdzić, że Cantor opisał nieskończone byty (zależności) matematyczne, zanim je matematycznie zdefiniował (a czasem pomimo ich niezdefiniowania)m tak jakby miał do nich bezpośredni, mentalny dostęp, jakby je bezpośrednio „odbierał". Mogło to zależeć zarówno od czynników psychologicznych, ale przede wszystkim mogły mieć na to wpływ heurystyczne elementy założeń filozoficznych

---

[214] Trywialnym przykładem jest zbiór liczb wymiernych w przedziale [0,1] (P = $Q_{[0,1]}$); wtedy otrzymujemy: $P' = [0,1] = P''$. W. Ewald, *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, Oxford 1996, t. 2.

[215] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)...*, *dz. cyt.*, 147.

[216] Cantor w ten sposób opisał rozróżnienie zbiorów na dwa gatunki: „Es wird also bei dieser Auffassungsweise das Gebiet aller Punktmengen bestimmter Art als ein besonderes Genus innerhalb des Gebietes aller denkbarren Punktmengen betrachter, von welchem Genus die sogenannten Punktmengen vter Art besondere Art ausmachen" G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reichen,* 1872, w: GA s. 92–102, (s. 98). Por. również z późniejszą definicją: „Hier kann es nun vorkommen daβ der Progeβ der Ableitungen *P', P'',* … zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkte besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so daβ $P^{(n)}$ keine Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat, in diesem Falle sagen win von der Punktmenge *P*, daβ sie von der ersten Gattung und von der nten Art się. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von *P*, die Reihe *P', P'', P''',* ..., $P^{(n)}$, …nicht ab, so sagen wir, daβ die Punktmenge *P* von der zweiten Gattung się". G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1 (Mathematische Annalen 15 (1), 1–7)...*, *dz. cyt.*, 140.

platonizmu Cantora („widzę umysłem, więc coś odkrywam”)[217]. Cantor utożsamił działalność umysłu z widzeniem, ponieważ zakładał platonizm. Zatem narzucił na swe działania taką ramę interpretacyjną, która uwydatniła aspekty platońskie, a ukryła aspekty konstrukcyjne.

Jednakże można tu również zauważyć pewną wewnętrzną, wymagającą decyzyjnych aktów podmiotu, konstrukcję, na jakiej opierał Cantor uznanie istnienia nieskończoności aktualnej w matematyce. Decyzja o przypisaniu określonego symbolu nieskończonej operacji (lub nieskończonemu ciągowi operacji) wywodzi się bezpośrednio z próby ujęcia w całość tychże nieskończenie wielu czynności. W tym kontekście możemy podkreślić istotną rolę działalności ludzkiego umysłu dwojako: po pierwsze, jako miejsce tworzenia i odtwarzania pewnego rodzaju prostych konstrukcji (jakimi są kolejne, początkowe iloczyny mnogościowe na zbiorach potęgowych), a także jako rodzaj decyzyjnego centrum, kierującego operacjami. Spostrzeżenie to jest zgodne z perspektywą, że matematycy konstruują nowe obiekty nie tylko w sposób czysto językowy.

Liczby kardynalne

Kolejnym przykładem tego, iż w praktyce matematycznej Cantora możemy znaleźć obiekty, które nie są dane w swej istocie (a więc nie są bezpośrednio zdefiniowane)[218], a jedynie określone poprzez określone własności i relacje, są liczby kardynalne – zarówno te skończone, jak i nieskończone. Jednakże w przypadku tych liczb mamy do czynienia niejako z procesem odwrotnym niż w przypadku liczb porządkowych. O ile liczby porządkowe konstruuje się według podanych w tym celu zasad ich generowania, o tyle liczby kardynalne otrzymuje się

[217] Jak wspomina Dadaczyński, Herbert Meschkowski opowiadający się za platonizmem wskazywał, że Cantor twierdził, iż „miał wizje liczb pozaskończonych”, jeszcze przedtem niż je definiował. Por. J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2*..., *dz. cyt.*, 279; H. Meschkowski, *Mathematik und Realität bei Georg Cantor*, „Dialectica” 29, (1975), 55–70. Faktycznie, platonizm matematyczny (platonizm w filozofii matematyki) to kierunek, który zakłada, iż obiekty matematyczne realnie istnieją, tak jak istnieją elektrony czy planety. A zatem twierdzenia o nich są prawdziwe ze względu na ich istnienie i właściwości. Tej platonistycznej, matematycznej rzeczywistości nie da się tworzyć, można ją tylko odkrywać. Por. Ø. Linnebo, *Platonism in the Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.* W niniejszej pracy, choć nie krytykuje się poszczególnych kierunków tradycyjnej filozofii matematyki, próbuje się jednak znaleźć między nimi oraz współczesnymi trendami pewne – choć w części – wspólne stanowisko. Wydaje się, że takowego można poszukiwać m.in. we współczesnych propozycjach strukturalizmu. W strukturaliźmie przyjmuje się, iż zasadniczy kontekst matematyki opisują dwa najważniejsze (ogólne) stwierdzenia: „matematyka jest ogólnym badaniem struktur” oraz „możemy oderwać się od natury obiektów, które tworzą te struktury”. W kontekście niniejszej pracy drugie stwierdzenie niekoniecznie zawsze musi być prawdziwe. Chodzi przede wszystkim o to, że nie zakładamy, iż cała matematyka polega jedynie na rozpatrywaniu samych wzorców, z całkowitym abstrahowaniem ich od jakichkolwiek właściwości bytów matematycznych (rozumianych w szerokim sensie). Inną próbą związania zagadnień tradycyjnej filozofii matematyki z PMP (filozofią praktyki matematycznej) jest propozycja konstrukcjonizmu epistemicznego, jak i ontologicznego, pragmatycznego realizmu obiektów matematycznych.

[218] A. Gupta, *Definitions*..., *dz. cyt.*

poprzez tzw. dekonstrukcję (abstrahowanie od właściwości i relacji). Poniżej opiszemy, jak ta dekonstrukcja przebiega, oraz nakreślimy również kontekst tych liczb.

W 1884 roku, Cantor opisuje liczbę kardynalną następująco:

> „Przez liczność lub kardynalność zbioru *M* (składającego się z dobrze wyodrębnionych, pojęciowo odrębnych elementów *m, m'*... i w tym zakresie określonych i ograniczonych) mam na myśli termin ogólny lub rodzajowy (uniwersalny), uzyskany przez abstrahowanie zbioru zarówno z natury jego elementów, jak i z wszelkich relacji, jakie te elementy mają, czy to między sobą, czy z innymi rzeczami, w szczególności również poprzez abstrahowanie od porządku, który może panować wśród elementów, i rozważanie tylko tego, co wspólne wszystkiemu, co równoważne *M*"[219].

Natomiast w pracy z 1895 roku, twierdzi:

> „Liczbę kardynalną *M* nazywamy pojęciem ogólnym, które wyłania się ze zbioru *M* za pomocą naszej zdolności aktywnego myślenia, abstrahując od natury jego różnych elementów m i od porządku, według którego są dane"[220].

Pomimo iż obydwie definicje nie są takie same (zmieniły się też na przestrzeni czasu), można zauważyć z łatwością, że w obu mowa o abstrahowaniu zbioru od natury jego elementów oraz od relacji. Co prawda w drugiej definicji Cantor uściśla, że chodzi o relację porządku, a w pierwszej nie do końca wiadomo, o jakie relacje chodzi i pomiędzy czym. Jednakże istotą, jaką chcemy w niniejszym podrozdziale wskazać, jest pewna dekonstrukcja. W dodatku dekonstrukcja, przeprowadzana przy pomocy „zdolności aktywnego myślenia" podmiotu. Rzeczywiście owa dekonstrukcja ma miejsce – jest to zauważalne w sposób

---

[219] Por. *„*Unter Mächtigkeit oder Kardinalzahl einer Menge *M* (die aus wohlunterschiedenen, begrifflich getrennten Elementen *m, m'…* besteht und insofern bestimmt und abgegrenzt ist) verstehe ich den Allgemeinbegriff oder Gattungsberiff (universal), werchen man erhält, indem man bei der Menge sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen, welche die Elemente, sei es untereinander, sei es zu anderen Dingen haben, also im besondern auch von der Ordnung, welche unter den Elementen herrschen mag, abstrahiert und nur auf das reflektiert, was allen gemeinsam ist, die mit *M* äquivalent sind*".* G. Cantor, *List do K. Laßwitza z 15.02.1884*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1932, 387. Dadaczyński wskazuje, iż w tamtym okresie Cantor zaczął już używać zamiennie pojęć: „moc zbioru" oraz „liczba kardynalna zbioru". J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 57. Dotatkowo należy zauważyć, że w pracach z lat 1895/97, Cantor zaczął wspomagać się terminologią wprowadzoną przez Dedekinda (tu np. *Dinge*).

[220] Por. *„*Mächtigkeit oder Kardinalzahl von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens adurch aus der Menge *M* hervorgeht, daβ von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente *m* von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird*".* G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)...*, *dz. cyt.*, 282.

oczywisty i bezpośredni – a w dodatku podkreśla ona rolę matematycznego podmiotu w tworzeniu, jak również odtwarzaniu matematycznej wiedzy.

Zbiór pusty

Innym przykładem obiektu, jaki w praktyce matematycznej Cantora może sprawiać wrażenie dekonstruowanego, jest zbiór pusty. Chociaż obok granic ciągów zbiór pusty może być również przykładem stanowiska quasi-nominalizmu, przypisywanego przez Dadaczyńskiego matematykowi z Halle, to stanowi on również w pewnym aspekcie przykład konstrukcjonizmu Cantora. Poniżej zostanie przeanalizowana definicja zbioru pustego, na podstawie której możemy rozumieć ten zbiór jako obiekt otrzymywany poprzez negatywne zdefiniowanie wewnętrznej właściwości istnienia elementów w zbiorze.

Cantor ujął tę definicję następująco: „wybieramy znak 0; $P = 0$ oznacza, że zbiór P nie zawiera ani jednego punktu, czyli mówiąc ściśle, nie istnieje jako taki"[221].

Można zauważyć, że Cantor zaczyna definicję od samego symbolu 0. Następnie, przypisując znakiem równania symbolowi P, symbol 0, tłumaczy, iż oznacza to, że zbiór P nie zawiera żadnego punktu (tj. do zbioru P nie należy żaden element). W związku z powyższym Cantor wychodzi od zbioru właściwego, by następnie – definiując zbiór pusty – przejść do wykluczenia podstawowej własności, definiującej zbiory w ogóle (tj. własności należenia elementów do zbioru czy też własności posiadania elementów przez zbiór).

Podobnie Cantor definiował zbiory II gatunku czy samą nieskończoność – również korzystał z opisu polegającego na wyjaśnianiu, jakiej właściwości dany obiekt (lub dana struktura) nie posiada, w przeciwieństwie do obiektu (struktury), jaki daną właściwość posiada. Tak samo zresztą definiował liczby kardynalne oraz tak przedstawił własność zupełności – jako własność niebędącą w posiadaniu zbioru A (zbioru liczb wymiernych). Można przypuścić, że Cantor w ten sposób konstruował takie obiekty (struktury, właściwości), do których treści nie miał bezpośredniego dostępu. Innymi słowy, nie był pewny ich statusu ontologicznego – w przypadku liczb porządkowych jego przepis na ich konstruowanie był przepisem wprost, jednak dotyczył głównie potencjalnej możliwości ich otrzymywania, nie definiował zaś pełnej, gotowej i nieskończonej struktury.

---

[221] „wir wächlen dazu den Buchstaben 0; $P = 0$ bedeutet also, daβ die Menge P keinen einzigen Punkt enthält, also streng genommen als solche gar nicht vorhanden ist*". G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)..., dz. cyt.*, 146.

Podsumowując: we wszystkich omawianych powyżej konstrukcjach, mamy do czynienia z pewnymi obiektami matematycznymi, które wymagają pewnego intencjonalnego zaangażowania podmiotu w ich opis i w ich umysłową konstrukcję. Nie zawsze są to proste, nieskomplikowane definicje, dające dostęp do istoty matematycznych obiektów bądź w jakikolwiek sposób objaśniające tę istotę. W definicjach tych chodzi raczej o zależności logiczne (o pewne zasady) ustalone dla pojęć oraz między pojęciami. Ale również o ujęcie aspektów funkcjonalności, stosowalności (tj. znaczenia), jak i możliwości konstrukcyjnych (tj. natury) dla matematycznych obiektów.

Wątek myślenia wizualnego proponowanego przez Giaquinto oraz jego propozycja możliwości uchwycenia struktury zostanie szerzej omówiona w rozdziale dyskutującym Tezę I. Jednak już teraz można wspomnieć, jako jeden z wniosków tego podrozdziału, że obiekty przedstawione przez Cantora nie umożliwiają przypuszczenia, iż definiował je po doświadczeniu ich naoczności – że miał ich bezpośredni lub nawet pośredni ogląd. Mamy tu na myśli to, co Giaquinto rozumie przez wizualne uchwycenie struktury lub poprzez wytworzenie jej „obrazu" w procesie skanowania[222]. Dla Cantora mogłoby to być subiektywnym potwierdzeniem odkrywania matematyki, jednak w perspektywie przyjętej w niniejszej pracy byłoby to raczej związane z wyobraźnią wizualną i reprezentacjami, jakie owa wyobraźnia może wytwarzać.

Nie oznacza to, iż Cantor nie odwoływał się w ogóle do intuicji, czy ściślej – do reprezentacji wizualnych[223]. Jak wspominaliśmy na początku, zakładamy że myślenie wizualne towarzyszy – w mniejszym lub większym stopniu oraz z większą lub mniejszą świadomością, jak i pożytkiem – procesowi poznawczemu każdego matematyka. Jednakże w przypadku analizy (a więc w przypadku konstrukcji *R*), jak i w przypadku znacznej części teorii mnogości można się przychylić do tego, iż Cantor kontynuował program Weierstrassa[224], jak i do tego, że był – przynajmniej w części swoich świadomych zamiarów – quasi-nominalistą[225]. Co mogło

---

[222] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*

[223] Por. G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts...*, *dz. cyt.*, 127,379,431,434-435.

[224] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 160; F. Klein, *The arithmetizing of mathematics...*, *dz. cyt.*

[225] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

powodować, iż bardziej pilnował, żeby myślenie wizualne nie było podstawą dla wprowadzanych przez niego twierdzeń i obiektów (i co nie znaczy, że nigdy nie było).

2.2 Konstrukcjonizm Dedekinda

W pracy mówimy o konstrukcjonizmie poznawczym, jako o podstawowym stanowisku epistemologicznym, opisującym proces wprowadzania nowych treści (obiektów) przez matematyka, dlatego będziemy używać tego pojęcia, zastępując nim w kontekście Dedekinda tradycyjne pojęcie konstruktywizmu. Możemy stwierdzić, że – podobnie jak odpierany tu konstruktywizm – konstrukcjonizm może być wtórnym elementem praktyki matematycznej Dedekinda względem strukturalizmu. Konstrukcjonizm pod pewnymi względami zawiera się niejako w konstruktywizmie – konstrukcjonizm jest pojęciem słabszym[226]. Różnica między tymi pojęciami została omówiona we wstępie.

Jeśli chodzi o konstrukcjonizm Dedekinda, należy poddać analizie argumenty za tym stanowiskiem, ponieważ w niniejszej pracy odrzucamy przypisywany mu konceptualistyczny konstruktywizm. Głównym argumentem przeciwko temu ostatniemu jest to, że Dedekind w sposób zamierzony opracowywał modele teoriomnogościowe i tylko w tym kontekście „tworzył" liczby (nie zaś w kontekście dosłownego tworzenia pojęć i obiektów, istniejących w dodatku jedynie w umyśle matematyka). Stąd konstrukcjonizm, jaki będziemy opisywać, powinien uwzględniać szczegółową metodologię Dedekinda.

Należy wskazać, że Dedekind używał momentami sugestywnego języka, akcentując fundamentalną rolę czynności umysłowych w rozwijaniu matematyki, jak również podkreślając przy tym również dynamikę określonych struktur. Dodatkowo Dedekind nie uwzględniał symboli, które nie oznaczają pewnych konstrukcji, za którymi nie kryje się konkretna treść (np. udowadnia istnienie zbioru nieskończonego czy nie rozpatruje kwestii zbioru pustego).

Wydaje się, że tak opisywany konstrukcjonizm nie stoi w sprzeczności z metodologią strukturalistyczną Dedekinda. Dodatkowo, możemy wskazać, że może być z nią ściśle związany poprzez fakt, iż Dedekind, modelując matematyczne obiekty, w odpowiedzi na matematyczne problemy, wykorzystywał świadomie zarówno intuicję dotyczącą budowanej

[226] M.K. Zwierżdżyński, *Konstruktywizm a konstrukcjonizm…*, *dz. cyt.*

struktury, jak i posiadał intencję jej budowania. Stąd proponowany konstrukcjonizm może wynikać z podejścia strukturalistycznego lub być z nim ściśle związany.

Umysłowe czynności konstrukcyjne, wykorzystywane w praktyce matematycznej Dedekinda, wynikały z jego założeń strukturalistycznych bądź były ściśle z nimi związane. Pomimo iż strukturalizm w jego praktyce matematycznej dotyczył na pierwszy rzut oka metodologii, to – jak zakładamy – wpływał również na epistemologię. Był to element odróżniający konstrukcjonizm Dedekinda od konstrukcjonizmu Cantora. Metodologia Dedekinda zakładała z góry podejście strukturalistyczne – tj. konstruowanie struktur.

Sugestywny język i dynamika struktur

Jak zostało wspomniane, będziemy wskazywać, że strukturalizm u Dedekinda był związany częściowo z konstrukcjonizmem, stanowiąc szeroki kontekst i przyczynę tego ostatniego. Nie chodzi więc o to, aby – próbując odrzucić przypisywany mu konceptualistyczny konstruktywizm – ukazać Dedekinda jako niemającego żadnego związku z konstruktywistycznym kierunkiem. Nie odrzucamy tutaj roli intencjonalnej konstrukcji w jego praktyce matematycznej. Mamy zamiar zmienić jedynie interpretację kontekstu owego procesu tworzenia treści – z kontekstu wyidealizowanej tradycyjnej filozofii matematyki (PM), gdzie idealny podmiot dosłownie stwarza matematykę i istnieje ona (często jedynie pod postacią pojęć) w jego umyśle, na kontekst bardziej pragmatycznej PMP, gdzie konkretny matematyk konstruuje nowe obiekty w odpowiedzi na konkretne problemy, korzystając z dostępnych metod oraz obiektów już istniejących (intersubiektywnie, w kontekście historyczno-społecznym).

U Cantora staraliśmy się wykazać poprzez odnajdowane elementy konstrukcjonistyczne (rozumiane jako przejaw twórczości matematycznego podmiotu), że – komunikowane przez niego platońskie istnienie obiektów matematycznych nie jest konieczne. Co więcej, radykalne interpretacje platonistyczne jego podejścia nie znajdują potwierdzenia w jego praktyce matematycznej, która z pewnością nie opiera się na biernym odkrywaniu przedmiotów matematycznych w bezpośrednich doświadczeniach umysłowych. Natomiast głównym elementem, jaki zamierzamy pokazać w przypadku Dedekinda, będzie uprzedniość perspektywy strukturalistycznej, przed perspektywą konstrukcjonistyczną. Zagadnienie to rozważymy szczegółowo w rozdziale o strukturalizmie, a tutaj wskażemy – podobnie jak w przypadku Cantora – jedynie przykłady zastosowania konstrukcjonizmu przez Dedekinda.

Przekroje Dedekinda

Jednym z przykładów sugestywnego języka Dedekinda, wskazującego na wykonywanie pewnych umysłowych czynności (a przez Michaela Dummeta interpretowanego jako argument za psychologizmem praktyki matematycznej), jest określenie „stwarzania" liczb niewymiernych:

> „Za każdym więc razem, gdy dany jest przekrój (A_1, A_2), który nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną, stwarzamy nową liczbę, liczbę niewymierną α, którą traktować będziemy jako całkowicie wyznaczoną przez ten przekrój (A_1, A_2); będziemy mówić, że liczba α odpowiada temu przekrojowi lub że wyznacza ten przekrój. Odtąd więc każdemu przekrojowi odpowiada jedna i tylko jedna określona liczba wymierna lub niewymierna i dwie liczby traktujemy jako różne zawsze wtedy, gdy odpowiadają one rzeczywiście różnym przekrojom"[227].

Roman Murawski komentuje w tym kontekście pojęcie *erschaffen*, którego „Dedekind używał, pisząc o tworzeniu liczb niewymiernych", a „które znaczy 'stwarzać' i które pojawia się w Księdze Rodzaju przy opisie stwarzania świata przez Jahwe"[228].

W tym sensie opis tworzenia liczb przez Dedekinda może być rzeczywiście uznany za wyraz jego konstrukcjonizmu. Przedstawia sugestywny opis czynności, przez którą mamy wrażenie, że obiekty matematyczne są stwarzane w umyśle i są dziełem stwórczego umysłu.

Jednakże tym, na co trzeba zwrócić uwagę, jest opisany wcześniej fakt, że Dedekind w zasadzie skonstruował przede wszystkim model dla zbioru liczb rzeczywistych. Dedekind przedstawił warunki dla zbioru liczb rzeczywistych tak, jak przedstawia się dziś ten zbiór w teorii ciał uporządkowanych – jako ciało uporządkowane w sposób ciągły[229]. Tę kwestię rozwiniemy w rozdziale opisującym strukturalizm epistemiczno-metodologiczny Dedekinda.

Istotny jest fakt, iż Dedekind nie stwarzał liczb niewymiernych w sposób dosłowny i bezpośredni. Chodziło raczej o stworzenie zbioru (liczb rzeczywistych) gdzie istniałaby

---

[227] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 36; R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 148.

[228] R. Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki*..., *dz. cyt.*, 257.

[229] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*; P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" IV, (2012), 15–30.

możliwość występowania tych liczb, jakich nie zawierał zbiór liczb wymiernych. Dodatkowo, Dedekindowi mogło raczej chodzić o odwołanie się do czegoś, co mogło stanowić podstawę dla formalnej definicji ciągłości. Przekrojami, które „natrafiały" na liczbę niewymierną czy wytwarzały tę liczbę, „wypełnił" w sposób zamierzony luki w zbiorze liczb wymiernych, w oparciu o wyobrażenie kontinuum punktowego. Kwestię tę rozwiniemy zarówno w rozdziale o strukturalizmie, jak i w rozdziale dyskutującym Tezę I.

Podstawy teorii mnogości

Głównym dziełem Dedekinda, w którym nakreślił koncepcje mnogościowe (a także podstawy arytmetyki liczb naturalnych), była praca *Was sind und was sollen die Zahlen?*[230] Na początku tej pracy, w rozdziale pod tytułem: *Systeme von Elementen*, opisuje on formalnie pojęcie *przedmiotu/rzeczy*. Jest to według niego wszystko, co jest obiektem myślenia[231]. To pierwszy zwrot, wskazujący na rolę umysłu matematycznego podmiotu, Dedekind bezpośrednio odnosi się bowiem do umysłowych czynności.

Tutaj należy się zatrzymać i podkreślić, że Dedekind nie określa stosunku *świata myśli* do świata rzeczywistego. Jest to istotny moment, do którego będziemy odnosić się w późniejszych rozważaniach filozoficznych w niniejszej pracy. Dodatkowo, w ujęciu Dedekinda każda *rzecz* (*Ding*) jest zdeterminowana przez wszystko, co można o niej pomyśleć lub powiedzieć; rzeczy można dla wygody oznaczać symbolami; rzecz *a* jest równa rzeczy *b*, jeśli wszystko, co można pomyśleć lub powiedzieć o rzeczy a, można pomyśleć lub powiedzieć o rzeczy b i na odwrót[232].

O różnych rzeczach *a*, *b*, *c*... można pomyśleć przez pryzmat wspólnego dla każdej *punktu widzenia*, są wtedy łączone w umyśle (*Geiste*). Tworzą one w ten sposób system[233]. System jest również *rzeczą*. Dwa systemy są takie same, jeśli każdy element jednego jest również elementem drugiego, i na odwrót[234].

---

230 R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*

231 „Im folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegen-stand unseres Denkens". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344.

232 R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344.

233 W taki sposób, że elementy należą do systemu, zaś system składa się z tychże elementów. Por. „ man nennt die Dinge *a, b, c...* die Elemente des Systems *S*, sie sind enthalten in *S*; umgekehrt besteht *S* aus diesen Elementen". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344.

234 Jako wyjątkowe przypadki, Dedekind rozpatruje jeszcze zbiór jednoelementowy oraz zbiór pusty. Odnośnie do tego drugiego, zaznacza względną potrzebę (czy raczej sprzeciw) wobec jego przyjęcia. Por. „Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz

Pierwsze, co istotne w rozdziale 1, to odniesienia Dedekinda do „przedmiotów myślenia", tzw. rzeczy (*Dingen*). Dedekind używa tu konstrukcjonistycznego języka. Owe rzeczy, będące podstawą zbiorów, ich elementami, nazwane są obiektami naszego myślenia, które określane są poprzez „wszystko, co można o nich pomyśleć lub powiedzieć". Ten aspekt wskazuje na dominującą rolę aktywności umysłowej w tworzeniu matematyki, jak i na pewną zależność matematycznych obiektów od umysłu.

Jednakże, jak wskażemy, możemy mówić również o pewnym „świecie myśli", gdzie wszystkie obiekty matematyczne istnieją i są wydobywane na potrzeby opracowywania struktur. Co prawda, Dedekind nie używa tego określenia na początku pracy, lecz w dalszej części, przy wprowadzaniu zbioru nieskończonego. Niemniej jednak, uważamy, iż można przyjąć, że ów świat myśli był przestrzenią dopuszczaną przez Dedekinda odnośnie do całokształtu jego pracy matematycznej, w szczególności nad podstawami matematyki. Chociaż pod pewnymi względami mógł być to argument, jakim konstruktywiści mogliby argumentować za istnieniem matematyki jedynie w umyśle, traktujemy to z perspektywy niniejszej pracy raczej jako wzmocnienie wewnętrznej ontologii (tj. nie odrywamy tej ontologii od kontekstu społeczno-historycznego), na którą wskazujemy omawiając metodę teoriomnogościowego modelowania Dedekinda w zakresie dwóch zbiorów liczbowych (przy pomocy czego rozróżniamy pojęcie konstruktywizmu od konstrukcjonizmu).

W rozdziale drugim *Was sind und was sollen die Zahlen*, zatytułowanym*: Abbildung eines Systems*, Dedekind wprowadza pojęcie odwzorowania systemu (*Abbildung*). Odwzorowanie systemu to pewne prawo, reguła (*Gesetz*), która mówi, że każdemu określonemu elementowi *s* z systemu *S* przynależy określona rzecz (*Ding*), którą symbolicznie

ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 345.. Jeśli chodzi o zbiór pusty, widzimy zasadniczą różnicę pomiędzy Cantorem a Dedekindem. Cantor przyjmuje z jednej strony istnienie „treści" symbolu zbioru pustego, jednak z drugiej strony dąży do nominalistycznego traktowania tego symbolu. Te dwie postawy mogą powodować niejasności, które Cantor musi wyjaśniać. Natomiast Dedekind, choć nie ma problemu z operowaniem samymi symbolami, wtedy gdy jest to potrzebne, odnosi się zawsze do ich treści – w tym przypadku jej braku. Dedekindowi udaje się wiele rzeczy określać precyzyjniej, biorąc pod uwagę warstwę nie tylko syntaktyczną, ale i semantyczną matematyki. Nie można więc zgodzić się na traktowanie matematyki jako zbioru praw, określających związki między poszczególnymi symbolami i zdaniami. Co więcej, Cantor również nie opowiadał się za „logiczną czystością" matematycznej treści, tj. za istnieniem jedynie poziomu syntaktycznego matematyki, mimo że na tym poziomie (jako jedynym) często i w sposób naturalny operował. Same próby uzasadniania istnienia nieskończoności aktualnej z perspektywy teologicznej i filozoficznej, były swoistym odwoływaniem się do pozamatematycznej treści matematyki.

opisujemy jako *$\varphi(s)$* i nazywamy obrazem (*Bild*) *s*[235]. Dalej Dedekind pisze, że jeśli *T* jest pewną częścią systemu *S*, to odwzorowanie *φ* systemu *S* zawiera również pewne odwzorowanie *φ* systemu *T*[236]. Polega to według niego na tym, że można przyporządkować do każdego elementu *t* z systemu *T* ten sam obraz *$\varphi(t)$*, który otrzymuje przez odwzorowanie jako element systemu *S*[237]. Następne wyjaśnia[238], że formalnie pojęcie obrazu systemu *S* oznacza system *$\varphi(S)$* składający się z obrazów *$\varphi(s)$* poszczególnych elementów *s* systemu *S*. Jednocześnie pisze dalej, że przykładem odwzorowania systemu może być przypisanie symboli i nazw do elementów systemu[239]. Zauważmy, iż Dedekind wyraźnie rozróżnia pojęcia obrazu i odwzorowania. Odwzorowanie to prawo, reguła, ale również czynność (np. przyporządkowanie, przypisanie); obraz to element, systemu[240]. Dedekind wyraźnie rozróżnia tutaj czynności matematyczne, jakie należy umysłowo wykonać (przypisanie, odwzorowanie), od matematycznych bytów, jakie należy przyjąć (obrazy, elementy). Tutaj obraz lub zbiór obrazów jest „otrzymywany" poprzez operację „odwzorowania". Nie redukuje odwzorowań (funkcji) do zbioru jej wartości

[235] Por. „Unter einer Abbildung *φ* eines Systems *S* wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element *s* von *S* ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von *s* heißt und mit *$\varphi(s)$* bezeichnet wird". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

[236] Tutaj Dedekind pisze, iż owo odwzorowanie z *T*, zawarte w odwzorowaniu *φ* z *S*, możemy nazwać dla uproszczenia tak samo, czyli *φ*. Dopuszcza więc, że może istnieć inne odwzorowanie *ϕ* różne od *φ*, które jednak „wykonane" na systemie *T*, daje w efekcie te same rzeczy (*Ding*) co odwzorowanie *φ*. Rzeczy te opisywane symbolami *$\varphi(t)$, $\phi(t)$* spełniają równanie: *$\varphi(t)=\phi(t)$* dla każdego elementu t należącego do systemu *T*. Por. „Ist nun *T* irgendein Teil von *S*, so ist in der Abbildung *φ* von *S* zugleich eine bestimmte Abbildung von *T* enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen *φ* bezeichnet werden darf". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

[237] Por. „jedem Elemente *t* des Systems *T* dasselbe Bild *$\varphi(t)$* entspricht, welches *t* als Element von *S* besitzt". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

[238] Na podstawie stwierdzenia, że obraz systemu *T*, oznaczony symbolem *$\varphi(T)$,* to system składający się ze wszystkich obrazów *$\varphi(t)$,* elementów *t* z systemu *T*. Por. „zugleich soll das System, welches aus allen Bildern *$\varphi(t)$* besteht, das Bild von *T* heißen und mit *$\varphi(T)$* bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von *$\varphi(S)$* erklärt ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

[239] Por. *„*Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen*"*. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

[240] Warto zauważyć, że pomimo iż rozróżnienie to obowiązuje w pewnym sensie również dziś (funkcja to „przypisanie"), to Dedekind wyraźnie rozróżnia zbiór i elementy jako elementy statyczne w teorii, natomiast odwzorowanie jest u niego elementem dynamicznym. Zawsze bowiem możemy powiedzieć, że funkcja jest pewną „zasadą", która określa owo przyporządkowanie. Natomiast u Dedekinda odwzorowanie jest bezpośrednio pewną czynnością, o której umysł wie (nawet jeśli nie musi jej wykonywać w danym momencie). Dodatkowo, tak jak jeden zbiór T może być częścią innego zbioru S, tak jedno odwzorowanie *φ z T* może być zawarte w innym odwzorowaniu *φ z S*. Por. „Ist nun *T* irgendein Teil von *S*, so ist in der Abbildung *φ* von *S* zugleich eine bestimmte Abbildung von *T* enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen *φ* bezeichnet werden darf". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

(plus ewentualnie zbioru jej dziedziny), podobnie do tego, jak się współcześnie funkcję (odwzorowanie) definiuje[241].

W powyższym kontekście należy zwrócić uwagę na stwierdzenia dotyczące zbieżności teorii mnogości Dedekinda raczej z teorią kategorii[242] niż z teorią mnogości Cantora. Widzimy tutaj adekwatność tych uwag z racji tego, jak Dedekind traktował odwzorowania. Otóż zaraz w rozdziale 2 opisuje odwzorowania jako temat równie ważny, co problem zbiorów i zależności między nimi. Można sądzić, iż rzeczywiście przyznaje odwzorowaniom w kontekście teorii mnogości, pewnego rodzaju ontologię pierwotną – taką, której się nie wyjaśnia ani nie uzasadnia. Dodatkowo, zauważmy, iż Dedekind nie utożsamia pojęcia odwzorowania oraz zbioru wartości. Zachowuje on wobec opisywanych przez siebie odwzorowań niezbędną dynamikę języka, która odróżnia odwzorowanie będące procesem, umysłową czynnością, od statycznego pojęcia zbioru.

Łańcuch i zbiór prosto nieskończony

W rozdziale o podobieństwie systemów i przekształceń mamy do czynienia z kolejnym argumentem na to, iż Dedekind wyraźnie rozróżnia odwzorowanie od systemu (co czyni jego teorię – jak twierdzimy – bardziej dynamiczną). Osobno formułuje on warunki podobieństwa przekształcenia, osobno warunki podobieństwa systemów (np. systemu S i jego obrazu S'). Owszem, czasem podobieństwo pewnego odwzorowania między dwoma systemami jest związane z podobieństwem systemów. Jednak nie wyklucza to przypisania systemowi oraz odwzorowaniu w filozofii Dedekinda pewnego rodzaju statusu pojęć (czy bytów) pierwotnych.

Powyższe dodaje strukturom, których swoistą częścią jest odwzorowanie, pewnego rodzaju wewnętrzny dynamizm (powiązany z procesem konstruowania ich). Tak jest w przypadku łańcucha (*Kette*) lub zbioru prosto nieskończonego.

[241] Współcześnie funkcja (odwzorowanie), to relacja „przypisująca" elementy z jednego zbioru do elementów z drugiego zbioru, spełniająca określone warunki, dla każdego elementu z pierwszego zbioru istnieje dokładnie jeden, przypisywany element z drugiego zbioru.

[242] L. Corry, *Richard Dedekind: Numbers and Ideals*, w: *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Boston 2004, 66–136; J. Ferreirós, *Dedekind's Map-Theoretic Period*, „Philosophia Mathematica" 25, (2017) nr 3, 318–340; C. McLarty, *Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of Functors*, w: *Architecture of Modern Mathematics*, red. J. Ferreirós, J. Grey, Oxford 2006, 187–208.

Rozdział VI w wyżej wymienionej pracy nosi tytuł: *Prosto nieskończone systemy. Ciąg liczb naturalnych*[243]. W punkcie pierwszym rozdziału (tj. 71 punkcie całej pracy, odnosząc się do oryginalnego, autorskiego systemu numerowania) Dedekind pisze, że system *N* jest prosto nieskończony, jeśli istnieje odwzorowanie podobne *φ*, gdzie *N* jest łańcuchem elementu niezawartego w *φ(N)*[244] – chodzi o element opisany symbolem 1, nazwany później podstawowym elementem *N*[245].

Poniżej przedstawiamy definicje odwzorowania podobnego oraz łańcucha w języku współczesnej matematyki (za Davidem Joyce'em):

1. W 26 punkcie swojego dzieła Dedekind definiuje *funkcję podobną* φ (z dziedziną S), Joyce nazywa ją funkcją *jeden-do-jednego*. Jest to taka funkcja, że obrazy różnych elementów są różne (funkcja różnowartościowa, tj. jeśli $a' \neq b' \Rightarrow a \neq b$). Do tej funkcji istnieje funkcja odwrotna φ^{-1}, co oznacza, iż funkcja φ może być również surjekcją, a złożenie $\varphi^{-1} \circ \varphi$ jest funkcją tożsamościową na S (o czym Dedekind zresztą też pisze)[246].
2. Łańcuch jest definiowany przez Dedekinda jako: „*podzbiór A zbioru S który φ odwzorowuje na siebie, tzn. φ(A) = A*". Definiuje on również pewien ogólny łańcuch A_0, który jest generowany przez *A* w tym sensie, że jest przecięciem wszystkich łańcuchów zawierających *A* [247].

---

[243] „Einfach unendliche Systeme. Reihe der natürlichen Zahlen". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 359.

[244] *„*Ein System *N* heiβt einfach unendlich wenn es eine solche ähnliche Abbildung *φ* von *N* in sich selbst gibt, daβ *N* als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in *φ(N)* enthalten ist*".* R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 359.

[245] „Wir nennen dies Element, das wir im folgenden durch das Symbol 1 bezeichnen wollen, das Grundelement von". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 359.

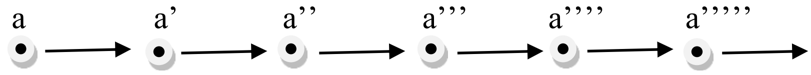
[246] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?*, Clark 2005, 6.

[247] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?,dz. cyt.* Należy zaznaczyć, że D.E. Joyce posługuje się przekładem książki Dedekinda z 1901 roku, a także używa współczesnego nazewnictwa teoriomnogościowego.

Co ciekawe, Joyce zauważa pewną zbieżność prac Dedekinda ze współczesnymi podstawami topologicznymi. Definicja łańcucha Dedekinda (*„*38. Theorem. *S* itself is a chain*"* D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?,dz. cyt.*, 9.) może być interpretowana jako definicja zbiorów zamkniętych w topologii. Tj. *K* jest domknięty, jeśli $\varphi(K) \subseteq K$. Ponieważ gdy zastąpimy *φ* inną funkcją, zmienia to topologię, uwzględniamy konkretną przestrzeń topologiczną *Sφ*. Przy takiej interpretacji, tw. 38, 43, 45, 47, 51, 54 mogą dotyczyć zbiorów domkniętych, a od twierdzenia 98 dotyczą zbiorów otwartych. W tym kontekście byłoby to podobieństwo do prac Cantora, który otwarcie zajmował się kwestiami topologicznymi (choć tak jak Joyce zaznacza, topologia nie była wtedy formalnie odrębną dyscypliną matematyki).

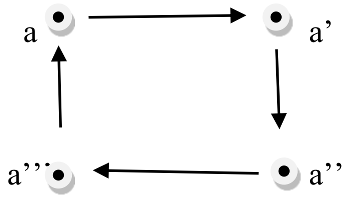
Poniżej zamieszczone są przykładowe ilustracje łańcuchów. Zauważmy, że w przypadku Dedekinda, pomimo dużego stopnia abstrakcji jego konstruktów, mamy do czynienia z konstruktami, które dają się przedstawić na rysunku. Jest to cecha odróżniająca go od Cantora, którego konstrukcje i struktury rzadko dały się wyrazić na ilustracji – nawet w sposób pomocniczy.

Przykład nr 1 (z wyróżnionymi elementami *a, a’, a’’, a’’’…*)[248]:



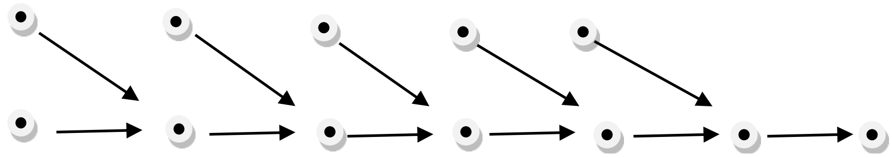
Rysunek 1 Przykład łańcucha z wyróżnionymi elementami a, a’, a’’...

Przykład nr 2 (z 4-elementowym zbiorem, gdzie *a’’’’= a*)[249]:



Rysunek 2 Przykład łańcucha z 4-elementowym zbiorem, gdzie a’’’’=a.

Przykład nr 3 (ukazujący, iż choć Dedekind oparł pojęcie łańcucha na funkcji odwzorowującej zbiór w siebie, to nie musi ona być funkcją jeden-do-jednego)[250]:



Rysunek 3 Przykład łańcucha, który nie jest oparty o funkcję jeden-do-jednego.

Jeśli chodzi o odwzorowanie, Dedekind opisuje jego funkcję przy pomocy określenia, mówiącego że porządkuje ono system *N* („prosto nieskończony system *N* jest uporządkowany [*geordnet*] przez to odwzorowanie φ”)[251]. Jak się okazuje – Dedekind formalnie wprowadza tym samym definicję oraz charakterystykę systemu liczb naturalnych.

[248] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind’s: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 8.

[249] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind’s: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 8.

[250] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind’s: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 9.

[251] “und sagen zugleich, das einfach unendliche System *N* sei durch diese Abbildung *φ* geordnet*”*. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 359.

Dalej bowiem pisze:

„istota prosto nieskończonego systemu N polega na istnieniu odwzorowania $\varphi(N)$ i elementu 1, gdzie są spełnione następujące warunki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

α. $N' 3 N$,

β. $N = 1_0$,

γ. Element 1 nie jest zawarty w N',

δ. Odwzorowanie φ jest podobne"[252].

Gdzie pierwszy warunek oznacza, iż obraz zbioru N (tj. N') jest zawarty w zbiorze N, drugi zaś opisuje łańcuch 1_0, który jest generowany przez zbiór N (jest on przecięciem wszystkich łańcuchów zawierających N (gdzie łańcuchy są definiowane jako pewne podzbiory, które są odwzorowywane przez φ na siebie)[253]. Ostatnie dwa warunki są zapisane wprost, jednakże należy zwrócić uwagę na fakt, iż Dedekind do tej pory używał bardzo abstrakcyjnych i formalnych (logicznie uporządkowanych na poziomie syntaktycznym) zwrotów i struktur. Jednakże, jak zobaczymy dalej, w kontekście zbioru liczb naturalnych, Dedekind konkretnie wyjaśnia i opisuje słownie różne aspekty swojej teorii.

Na koniec można wspomnieć o słynnym zdaniu Dedekinda, które Jan Łukasiewicz interpretował w sposób konstruktywistyczno-konstrukcjonistyczny[254]. Było ono fragmentem

---

[252] Należy zauważyć, iż podtrzymuje poczynione dotąd ustalenia na temat symboliki przekształceń i łańcuchów. Por. „Behalten wir die früheren bequemen Bezeichnungen für die Bilder und Ketten bei (§ 4), so besteht mithin das Wesen eines einfach unendlichen Systems N in der Existenz einer Abbildung φ von N und eines Elementes 1, die den folgenden Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügen:

α. $N' 3 N$.

β. $N = 1_0$.

γ. Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.

δ. Die Abbildung φ ist ähnlich" .

R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 359.

[253] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?,dz. cyt.*

[254] J. Łukasiewicz, *O nauce...*, *dz. cyt.*, XXXIV.

dzieła z 1888 roku, gdzie Dedeking przedstawił arytmetykę liczb naturalnych za pomocą teoriomnogościowego modelu zbioru prosto nieskończonego[255].

> „72. Twierdzenie. W każdym nieskończonym systemie *S* prosto nieskończony system *N* zawiera się jako część. […] 73. Definicja. Jeśli rozważając prosto nieskończony system *N* uporządkowany przez przekształcenie φ, całkowicie zaniedbujemy szczególny charakter elementów; w sposób prosty zachowując ich rozróżnialność i biorąc pod uwagę tylko wzajemne relacje, w których są one umieszczone przez przekształcenie porządkujące φ, wtedy te elementy nazywamy liczbami naturalnymi lub liczbami porządkowymi lub po prostu liczbami, a element podstawowy *1* nazywamy numerem bazowym ciągu liczbowego *N*. W związku z tym uwalniając elementy od każdej innej treści (abstrahując), słusznie nazywamy liczby wolnym tworem ludzkiego umysłu. Relacje lub prawa wywodzą się całkowicie z warunków α, β, γ, δ w (71) i dlatego są zawsze takie same we wszystkich uporządkowanych systemach prosto nieskończonych, niezależnie od nazw nadawanych poszczególnym elementom (porównaj 134), stanowią pierwszy przedmiot nauki o liczbach lub arytmetyce. Z ogólnych pojęć i twierdzeń § 4 o przekształceniu systemu w sobie natychmiast otrzymujemy następujące prawa podstawowe”[256].

W powyższym cytacie rzeczywiście po raz kolejny mamy do czynienia ze sugestią, że liczby są stwarzane przez umysł. Jednakże, tak jak w przypadku „stwarzania” (*erschaffen*) liczb niewymiernych, tutaj również argumentujemy, że owo stwarzanie liczby nie jest określeniem bezpośrednim wobec tej dosłownej czynności, a raczej odwołaniem się do pozakonstruktywnych środków argumentacji. Formalnie (tj. matematycznie) Dedekind nie opisuje bezpośredniego procesu liczb niewymiernych, czy tutaj naturalnych. Konstruuje pewien model w przypadkach obu systemów liczbowych. Tutaj miejsca w stworzonym przez siebie modelu zbioru prosto nieskończonego można nazwać liczbami. W tym kontekście sugestywny, konstruktywny język nie stoi w sprzeczności z tezami rozprawy, a wręcz przeciwnie, stanowi argument za proponowanym konstrukcjonizmem. Jest on bowiem oznaką tego, że Dedekind zdawał sobie sprawę z intencjonalnej konstrukcji modelu.

---

[255] Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?,* w: R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1888, 335–391. https://gdz. sub.uni-goettingen.de/id/PPN235693928.

[256] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 359–360.

Podsumowując: w 1872 roku Dedekind przedstawił model liczb rzeczywistych, w którym zdefiniował własność ciągłości, odnosząc się do wyobrażenia kontinuum punktowego. Natomiast głównym wątkiem pracy z 1888 roku było wyprowadzenie wszelkich teoriomnogościowych narzędzi, aby móc zbudować formalny model dla arytmetyki liczb naturalnych. Stąd jego słowa, które na równi stawiają liczby naturalne, liczby porządkowe czy po prostu liczby, oznaczają, że spełniają one wymagania tego modelu. Stwierdzenie zaś, iż liczby są „wolnym tworem ludzkiego umysłu", oznacza tyle, że nie trzeba traktować liczb jako dosłownie stwarzanych (z niczego), ale jako zredefiniowane obiekty zajmujące odpowiednie miejsca w budowanych modelach.

Konstruowalność i udowadnialność

Zbiór nieskończony

Konstrukcjonizm był zauważalny w tworzeniu przez Dedekinda różnorakich struktur, które wymagały określonych czynności umysłowych, jakie należało wykonać, aby mieć do nich umysłowy dostęp. Był też obecny w jego podejściu do nieskończoności. Otóż Dedekind nie wprowadził pojęcia nieskończoności najpierw jako aksjomatu. Przede wszystkim starał się pokazać, iż istnienie zbiorów nieskończonych jest dowiedliwe, co może być przejawem konstrukcjonistycznej postawy, iż coś, czego nie można dowieść, nie może być brane pod uwagę (chodzi o dowód konstrukcyjny, o konstruowalność)[257]. Są to cechy zapożyczone z kierunków konstruktywistycznych – konstruowalność i dowód postrzegany jako możliwość konstrukcji danego obiektu matematycznego przypisywane są konstruktywizmowi i matematyce konstruktywistycznej[258]. Niemniej jednak proponowany tu konstrukcjonizm uważamy za słabszą wersję konstruktywizmu. Stąd i przypisywane mu warunki tak samo będziemy traktować – nie jako konieczne, ale możliwe do zauważenia.

Istotne jest, że Dedekind w kontekście zbioru nieskończonego próbuje udowodnić jego istnienie. Co więcej, w dowodzie przedstawia przepis na to, jak ów nieskończony zbiór może istnieć, jak to jest możliwe samo w sobie. Można więc sądzić, że względem zbioru nieskończonego postawił Dedekind (tak jak to robił w pewnym sensie wobec innych, mniej złożonych i wieloznacznych obiektów i struktur matematycznych) wymóg dowiedlności czy też konstruowalności.

---

[257] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*

[258] D. Bridges, E. Palmgren, H. Ishihara, *Constructive Mathematics..., dz. cyt.*

W punkcie 65 i 66 *Was sind und was sollen die Zahlen?* Dedekind twierdzi, że system złożony z jednego elementu jest skończony oraz że istnieją systemy nieskończone[259]. Ów punkt 66 to twierdzenie o istnieniu nieskończonego zbioru, którego znany współcześnie dowód Dedekind umieszcza zaraz pod twierdzeniem. Brzmią one (twierdzenie wraz z dowodem) następująco:

> „66. Twierdzenie. Istnieją nieskończone systemy. Dowód *). Mój świat myśli, tj. całość *S* wszystkich rzeczy, które mogą być przedmiotem mojego myślenia, jest nieskończona. Bo jeśli *s* oznacza element *S*, to myśl *s′*, która może być przedmiotem mojego myślenia, sama jest elementem *S*. Jeśli uważa się to samo o obrazie *φ(s)* elementu *s*, to istnieje w ten sposób określone odwzorowanie *φ* z *S* z własnością, taką że obraz *S′* jest częścią *S*; a mianowicie, *S′* jest właściwą częścią *S*, ponieważ istnieją elementy w *S* (np. moja własna jaźń), które różnią się od wszelkich takich myśli *s′* i dlatego nie są zawarte w *S′*. Wreszcie, jasne jest, że jeśli *a*, *b* są różnymi elementami *S*, ich obrazy *a′*, *b′* również są różne, tj. że odwzorowanie *φ* jest odmienne (podobne) (26). W konsekwencji *S* jest nieskończone, c.n.u."[260].

Skupmy się na najistotniejszej części tego rozumowania. Otóż Dedekind – wydaje się – próbuje tutaj pokazać, iż w świecie myśli istnieją nieskończone łańcuchy. Elementem wyróżnionym jest *s*, odwzorowaniem *φ*, a obrazem elementu *s* jest *s'*. Wydaje się, że odwzorowanie, które w tym dowodzie jest wprowadzone, może być porównywalne z funkcją następnika w zbiorze liczb naturalnych, a zbiór rozpatrywany w kontekście tego odwzorowania jest nieskończony. Co więcej, łańcuchy mogą być tworzone z różnych elementów. Dedekind, biorąc element *s*, obraz elementu *s'*, wprowadza jako oczywiste odwzorowanie *φ*, które tworzy nieskończony zbiór. Podzbiór *S'* jest zaś częścią właściwą zbioru *S* (nie jest bowiem całym

---

[259] Por. „Jedes aus einem einzigen Elemente bestehende System ist endlich. […] Es gibt unendliche Systeme". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357.

[260] Por. „66. Satz. Es gibt unendliche Systeme. Beweis *). Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit *S* aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn *s* ein Element von *S* bedeutet, so ist der Gedanke *s′*, daß *s* Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von *S*. Sieht man dasselbe als Bild *φ*(*s*) des Elementes *s* an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung *y* von *S* die Eigenschaft, daß das Bild *S′* Teil von *S* ist; und zwar ist *S′* echter Teil von *S*, weil es in *S* Elemente gibt (z. B. mein eigenes Ich), welche von jedem solchen Gedanken s' verschieden und deshalb nicht in *S′* enthalten sind. Endlich leuchtet ein, daß, wenn *a, b* verschiedene Elemente von *S* sind, auch ihre Bilder *a′, b′* verschieden sind, daß also die Abbildung *φ* eine deutliche (ähnliche) ist (26). Mithin ist S unendlich, w. z. b. w.". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357. Dedekind w przypisie dodaje, że podobną uwagę można znaleźć w §13 dzieła Bolzano (Paradoksy nieskończoności) z 1851 roku.

zbiorem S, ponieważ istnieją elementy różne od *s'* – jak np. jaźń), to jeśli jest nieskończony, to zbiór *S* wszystkich przedmiotów, jakie mogą być pomyślane, również jest nieskończony.

Wiele osób zarzuca Dedekindowi niematematyczność tego dowodu. Jednak można dostrzec u niego brak wyraźnej granicy między tym, co czysto-matematyczne (akceptowalne przez społeczność matematyków), a tym, co tę matematyczność opisuje z perspektywy analizy myślenia. Mamy z tym do czynienia również u podstaw teorii mnogości, gdzie Dedekind opisuje podstawowe elementy zbioru jako rzeczy (*Dingen*), jako będące przedmiotami myślenia, ale również w kontekście konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych, gdzie odwołuje się do intuicyjnej własności ciągłości i ją formalizuje.

Jednakże owo „wykraczanie” Dedekinda poza ścisłą matematyczną teorię (język, symbole, zasady logiczne) w jego matematycznych tekstach różni się od analogicznego wykraczania Cantora – matematyk z Halle sięga bezpośrednio po argumenty z „zewnątrz” matematyki – argumenty filozoficzne, ale co ważniejsze, teologiczne. Natomiast Dedekind sięga niejako do wnętrza samej matematycznej praktyki – powołuje się na podstawy teorii matematycznych, mające w jego mniemaniu źródło w świadomych (intencjonalnych) czynnościach umysłowych matematycznego podmiotu, wyobrażeniach. Dlatego, chociaż w niniejszej pracy zajmujemy się analizą głównie treści matematycznych, nie sposób nie odnieść się do fragmentu wypowiedzi Dedekinda, który on sam nazwał dowodem istnienia zbioru nieskończonego. Zwłaszcza że fragment ten pozwala również opisać jego podejście do własnej – szeroko pojętej – praktyki matematycznej.

Inne przykłady

Oprócz wielu już wymienionych powyżej struktur i obiektów, które można udowodnić w sposób konstrukcjonistyczny (a więc pokazując, jak istnieją, poprzez ich konstrukcję), należy zwrócić uwagę również na to, jaką wagę Dedekind przykładał do zależności syntaktycznych między wprowadzanymi kolejno pojęciami. Nie oznacza to jednak, iż utożsamiamy podejście Dedekinda z rodzajem nominalizmu czy formalizmu.

Chcemy pokazać, że konsekwencja i precyzja na płaszczyźnie syntaktycznej była ściśle związana z konsekwencją i precyzją na płaszczyźnie semantycznej. W konsekwencji cała teoria Dedekinda składała się z tego rodzaju obiektów i twierdzeń, które bez problemu można udowodnić poprzez ich konstrukcję. Poniżej pokażemy kilka przykładów tego, jak Dedekind pilnował ściśle określanych relacji między pojęciami, ale również tego, jak z konkretnymi pojęciami wiąże się ich treść.

W ostatnim punkcie rozdziału 2 (25) Dedekind opisuje odwzorowanie, które składa się z dwóch innych odwzorowań: z odwzorowania φ systemu S oraz odwzorowania ϕ obrazu S' tego systemu, powstałego w ramach odwzorowania φ[261]. Można owo odwzorowanie zapisywać jako Θ, ale równie dobrze jako $\phi.\varphi$ lub $\phi\varphi$[262]. Warto przy tym podkreślić jedną rzecz: Dedekind zauważa, że kolejność znaków φ, ϕ jest istotna, dlatego, że w przypadku gdy nie zachodzi: $\phi(S')\ 3\ S$[263], zapis $\varphi\phi$ jest bez znaczenia[264].

To kolejny moment w omawianej pracy, w którym ewidentny jest konstrukcjonizm Dedekinda. Otóż nie uznaje on symboli, które nie oznaczają konstrukcji, za którymi nie kryje się konkretna treść i konkretna konstrukcja. Zaprzecza więc również (jak wielu współczesnych filozofów czy matematyków) nominalistycznemu sposobowi rozumienia matematyki. Nie uznaje, iż symbole, nienoszące w sobie dającej się konstruować „treści" są przydatne w praktyce matematycznej. Należy więc uwzględniać tylko te symbole, które są konkretnie określone, co do ich zawartości. Dedekind nie utożsamiał formalizacji matematyki z redukcją jej tylko i wyłącznie do syntaktyki (jak można to zrobić w przypadku logiki i w jakim kierunku podążał czasem Cantor – np. gdy opisywał zbiór pusty czy dialektyczne wytwarzanie coraz dalszych symbolów nieskończoności). Uznawał, iż za symbolami musi się kryć treść, i to taka, która jest sensowna, tj. którą da się skonstruować tak, iż tworzy prawdziwe i sensowne zdanie wedle założeń danej teorii.

Zapis $\varphi\phi$ nie miałby znaczenia, jeśli nie zachodziłoby $\phi(S')\ 3\ S$, ponieważ z założenia odwzorowanie φ jest „nałożone" na system S, wykonywane na zbiorze różnym od zbioru S, nie daje w konsekwencji obrazu, tj. zbioru S'.

Dalej Dedekind wykonuje operacje na symbolach. Pomimo to, przykłada wagę do tego, żeby te symbole miały pewną przypisaną treść, tj. miały sens, jakieś znaczenie.

[261] „Ist φ eine Abbildung eines Systems S, und ϕ eine Abbildung des Bildes $S' = \varphi(S)$, so entspringt hieraus immer eine aus φ und ϕ zusammengesetzte**) Abbildung Θ von S, welche darin besteht, daß jedem Elemente s von S das Bild $\Theta(s)=\phi(s')=\phi(\varphi(s))$ entspricht, wo wieder $\varphi(s)=s'$ gesetzt ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 350.

[262] To samo tyczy się obrazu $\Theta(s)$, który można zapisywać jako $\phi\varphi(s)$.

[263] Tj. gdy wśród elementów systemu $\phi(S')$ są takie, które nie są elementami systemu S.

[264] Por. „die Stellung der Zeichen φ, ϕ wohl zu achten ist, weil das Zeichen pq im allgemeinen bedeutungslos ist und nur dann einen Sinn hat, wenn $\varphi(S')<S$ ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 350.

Wprowadza on symbol χ, który ma oznaczać odwzorowanie systemu $\phi(S')$[265], oraz symbol η, który ma oznaczać odwzorowanie $\chi\phi$ systemu S'[266]. Wcześniej zaś określa symbol $\Theta(s)$ jako równy: $\phi(s')$, a więc także równy: $\phi(\varphi(s))$[267]. Zachodzą więc następujące równości:

$$\chi\Theta(s) = \chi\phi(s') = \eta(s') = \eta\varphi(s)^{268}.$$

Widać z nich wyraźnie, że $\chi\Theta=\eta\varphi$ dla każdego elementu s należącego do systemu S[269]. Puenta tego rozumowania według Dedekinda tkwi w równaniu:

$$\chi\cdot\phi\varphi == \chi\phi\cdot\varphi^{270}.$$

Powyższe równanie oznacza ogólną własność łączności składania odwzorowań, obowiązuje ona również we współczesnej matematyce[271]. Jednak w tym przypadku wynika jedynie z operowania symbolami i nie oznacza nic więcej niż przysługiwanie zasady łączności konkretnie zdefiniowanym symbolom oraz odpowiadającym im rzeczom czy zasadom. Można by się zastanawiać, czy powyższe rozumowanie nie przejawia śladów nominalizmu, jednak mimo to zauważmy, że owa operacja na „symbolach" zawiera ciągłą pamięć o przypisanych tym symbolom znaczeniach (związanych z nimi bezpośrednio lub pośrednio). Otrzymana własność łączności złożenia tych konkretnych, opisanych co do dziedziny odwzorowań (chodzi tu o odwzorowania „odwrotne") jest otrzymana przez Dedekinda poprzez jasne „rozpisanie" tychże symboli, mających cały czas odniesienie do kontekstu, w jakim te odwzorowania i operacje na nich wprowadzał.

Kolejną rzeczą, o której należy pamiętać i którą Dedekind przypomina, jest fakt, iż A_0 jest w zasadzie (jak każdy łańcuch) ściśle zależne od odwzorowania. Tak więc zamiast symbolu A_0 Dedekind zamierza również używać ściślejszy symbol $\varphi_0(A)$. W zależności od zmiany

[265] Tj. system oznaczany również symbolem $\phi\varphi(S)$, a więc powstały przez odwzorowanie φ systemu S oraz następnie przez odwzorowanie ϕ systemu S'. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 350.

[266] Tj. złożenie odwzorowań χ oraz ϕ systemu S'.

[267] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 349.

[268] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 350.

[269] Por. „also stimmen die zusammengesetzten Abbildungen zq und np für jedes Element *s* von *S* miteinander überein, d. h. es ist $\chi\Theta=\eta\varphi$". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 350.

[270] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 350.

[271] Składanie funkcji jest łączne (tzn. jeżeli f:*X->Y, g:Y->Z i h:Z->V*, to f°(g°h)=(f°g)°h) w tym sensie, że lewa strona równania jest określona ⇔ prawa strona równania jest określona (określone wartości tych stron są równe).

odwzorowania (np. na ω), możemy nowy symbol również odpowiednio dostosować (tj. zmienić na $\omega_0(A)$)[272].

Obserwujemy tu po raz kolejny, swoiste i charakterystyczne dla konstrukcjonizmu, umysłowe konstruowanie (choć czasem jedynie poprzez operowanie symbolami). Dedekind wprowadza kolejne symbole dla nowych pojęć, będących wytworami kombinacji pojęć bardziej podstawowych, jednak tylko wtedy, gdy zawartość tych pojęć nie jest zbiorem pustym w świecie rzeczy (*Dingen*), obiektów myślowych[273]. Nie są to operacje czysto-logiczne. Można się zastanawiać, czy owa treść konstruowanych pojęć nie ogranicza się do związków, jakie te pojęcia mają ze zwykłym wyprowadzaniem nowych zdań z przyjętych wcześniej założeń. Jednakże, jak zaznaczono wcześniej, Dedekind cały czas traktuje pojęcia jako pewne symbole oznaczające abstrakcyjne, ściśle określone związki pomiędzy różnymi „rzeczami", które to „rzeczy" mają swoje źródło w świecie obiektów myśli.

2.3 Podsumowanie

Opisywany tutaj konstrukcjonizm Cantora opiera się na różnego rodzaju umysłowych czynnościach (odnoszących się również do pewnego rodzaju intencji oraz intuicji), zrekonstruowanych w oparciu o analizę jego matematycznych tekstów. Wskazując elementy konstrukcjonizmu, staraliśmy się skupić przede wszystkim na tym, iż konstrukcje liczb rzeczywistych oraz teoria mnogości (w tym szczególnie konkretne jej struktury, jak liczby porządkowe czy struktury wymagające użycia symboli nieskończonościowych) wymagały od Cantora w dużej mierze aktywnego (intencjonalnego) zaangażowania umysłowego w trakcie tworzenia matematycznych teorii. Jego „definicje" złożonych struktur nie były prostym opisem bezpośredniego, biernego doświadczenia umysłowego, ale nie wykluczały pewnego rodzaju – naoczności. Natomiast wprowadzane w sposób bardziej intencjonalny, i opisowy (naoczny) obiekty, były obiektami jego intencji matematycznych.

Pierwsza grupa czynności charakteryzuje się konstruowaniem złożonych matematycznych struktur, przy czym w przypadku konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych jest ona motywowana chęcią rozwiązania problemu niewymierności, ale bez bezpośredniej,

[272] Por. „und wenn es später der Deutlichkeit wegen nötig wird, so wollen wir statt A_0 lieber das Zeichen $\varphi_0(A)$ setzen, und ebenso werden wir die einer anderen Abbildung a entsprechende Kette von A mit $\omega_0(A)$ bezeichnen". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 354.

[273] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344–345.

wyraźnie zaznaczonej intencji wprowadzenia nowego obiektu-struktury do matematyki. Konstrukcję liczb rzeczywistych odczytujemy bardziej jako praktykę, gdzie obiektem intencji było faktycznie sama czynność skonstruowania, nie zaś nowa struktura. Jeśli zaś mówić o obiekcie matematycznym, były nim raczej liczby niewymierne, ale przez to pośrednio również całe R. W przypadku nieskończoności również mamy do czynienia z czynnością konstrukcyjną (dodatkowo ta czynność nie była motywowana rozwiązaniem konkretnego matematycznego problemu), ale Cantor bardziej bezpośrednio opisywał wprowadzane obiekty. Stąd przynajmniej w pewnym stopniu można przypisać nieskończoności aktualnej (symbolom oraz zbiorom) – chociaż była ona wynikiem, a nie celem (od samego początku) pewnej konstrukcji – miano obiektów intencjonalnych według notacji Searle'a. Chodzi konkretnie o to, że zakładamy, iż Cantor intencjonalnie, w którymś momencie swojej praktyki matematycznej, skupiał się na wprowadzanych (lub już wprowadzonych) matematycznych strukturach-obiektach – a nie tylko na samej czynności ich konstruowania.

Druga grupa czynności dotyczy bezpośredniego wprowadzania konkretnych obiektów, spełniających określone, matematyczne zasady (jak prosta rzeczywista, granice ciągów czy liczby porządkowe zapewnione przez podane przez Cantora zasady generowania). Tutaj intencjonalnym obiektem mogły być wszystkie wymienione matematyczne obiekty (nawet w postaci pojęć). Można tu zauważyć przypuszczalny związek między intencją a intuicją – w im większym stopniu intencja jest nakierowana na obiekt, nie na samą czynność, tym wyraźniejsza naoczność towarzyszy temu obiektowi – jeśli jest tak w trakcie odtwarzania wiedzy, może tak samo być w trakcie jej tworzenia.

Trzecia grupa przykładów (tj. zbiór pusty oraz liczby kardynalne) opisuje obiekty otrzymywane w wyniku dekonstrukcji, czyli czynności odwrotnej względem samej konstrukcji, lecz czynności również wskazującej na niezbędność zarówno pewnej intencjonalności, jak i pewnej intuicji (czego Cantor teoretycznie nie dopuszczał).

Odnośnie do Dedekinda: przypisywany mu konstrukcjonizm jest znacznie prostszy w wykazaniu, dlatego że istnieją (dyskutowane także w niniejszej pracy) stanowiska, przypisujące mu konceptualistyczny konstruktywizm. Stąd zadaniem tego rozdziału była jedynie sama charakterystyka konstrukcjonizmu, aby nie był później mylony z przypisywanym Dedekindowi konstruktywizmem.

Po pierwsze, wskazaliśmy w przypadku praktyki matematycznej Dedekinda – tak jak w praktyce matematycznej Cantora – na określone rodzaje wprowadzanych przez niego obiektów, które mogą charakteryzować jego epistemologię, a w niej kwestie intencjonalności oraz intuicji.

Wskazywaliśmy na przekroje Dedekinda, które wprowadził z intencją zdefiniowania własności ciągłości zbioru liczb rzeczywistych, jednakże wprowadził je również jako obiekty pośrednio zamierzone – jako obiekty pewnych matematycznych intencji. W sposób zamierzony wprowadził również cały system *R*, jako liczbowy zbiór posiadający własność ciągłości. Po drugie, wskazywaliśmy na podstawy teorii mnogości (rzeczy-elementy, zbiory, odwzorowania), które Dedekind wprowadził bezpośrednio jako podstawowe obiekty teoriomnogościowe, ale z możliwością przypisania im tożsamości związanych z liczbami naturalnymi. Wskazaliśmy również na bardziej złożone teoriomnogościowe struktury – jak łańcuch czy zbiór prosto nieskończony – aby ukazać bezpośrednie, zamierzone odniesienia Dedekinda do umysłowych operacji i wprowadzanych obiektów. Zauważyliśmy również – odróżnieniu od struktur proponowanych przez Cantora – dynamikę propozycji matematycznych Dedekinda wynikającą z procesualnego traktowania operacji .

Po drugie, wskazano również zbiór nieskończony zdefiniowany przez Dedekinda, którego istnienie zostało przez niego w pewien sposób udowodnione. Wspomniano także o precyzji wprowadzanej formalnie teorii, która wynika z istotnego dla tego uczonego praktyki matematycznej dążenia do skutecznego wprowadzania obiektów oraz dowodzenia ich poprawności, poprzez ich konstruowanie.

Dodatkowo, zauważone u Dedekinda elementy konstrukcjonizmu można związać bezpośrednio z konstruowaniem dwóch modeli liczbowych. Konstruując model, Dedekind wykorzystywał zarówno intuicję (ogląd), jak i intencję skierowane na wprowadzaną strukturę będącą modelem, na obiekt którego dana struktura była modelem, jak również na czynność przypisywania modelowi tego obiektu (redefiniowania obiektu w kontekście wprowadzonego modelu). Tym samym ów konstrukcjonizm jest ściśle związany ze strukturalizmem epistemologiczno-metodologicznym oraz z niego wynika. A także charakteryzuje go – jeśli porównać z konstrukcjonizmem Cantora – wyższy poziom abstrakcji (intencja oraz intuicja nakierowane były na struktury bardziej złożone i abstrakcyjne). Do tego tematu nawiążemy w następnym rozdziale i wskażemy tym samym na znaczącą różnicę między praktyką matematyczną Cantora i Dedekinda.

3 *Strukturalizm metodologiczno-epistemiczny oraz ontologiczny u Cantora i Dedekinda*

Niniejszy rozdział ma za zadanie porównanie u Cantora i Dedekinda kwestii strukturalizmu, zarówno w kontekście epistemologii oraz metodologii, jak i ontologii. Strukturalizm jest obecnie szeroko znanym i rozwijającym się kierunkiem w filozofii matematyki[274]. Takie porównanie pozwoli lepiej zrozumieć, jaką rolę odegrał strukturalizm w klasycznych pracach obu niemieckich matematyków.

W poprzednim rozdziale praktyka obu matematyków analizowana była z perspektywy konstrukcjonizmu epistemicznego, jako kierunku podkreślającego rolę podmiotu matematycznego, a dokładniej rolę świadomych (intencjonalnych) czynności umysłowych, jak również rolę intuicji (oglądu) matematycznej w rozwoju matematycznej wiedzy. W kontekście samego konstrukcjonizmu została wskazana różnica między Cantorem i Dedekindem w ich podejściu do procesu konstrukcji. Pierwszy konstruował matematyczne obiekty bardziej dedukcyjnie, drugi – bardziej modelując w sposób zamierzony określone struktury. Różnica ta jest jednak bardziej związana z metodologią pracy naukowej niż z samym w sobie faktem stwierdzenia konstrukcji jako pewnej twórczej, umysłowej aktywności naukowej, będącej podstawą wprowadzania nowych matematycznych treści.

W niniejszym rozdziale pogłębimy analizę tej różnicy i wskażemy w kontekście strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, iż praktykę Dedekinda charakteryzowała metoda podobna do tej, jakiej używa się do matematycznego modelowania problemów pozamatematycznych[275]. Niezbędne do tego jest zamierzone, konsekwentne i precyzyjne budowanie matematycznych struktur. U Cantora tej metody nie rozpoznajemy, chociaż można zauważyć wiele struktur w jego matematycznym dorobku (z zakresu podstaw matematyki), być może również dlatego, że omawianego strukturalizmu nie wiążemy jedynie z metodą, ale również z pewnymi podstawowymi elementami epistemologii. Cantor nie zakładał ontologii wprowadzanych struktur, ale ostatecznie – choć inaczej niż Dedekind – również owe struktury mógł poznawać i definiować jako odrębne byty.

---

[274] E. Reck, G. Schiemer, *Structuralism in the Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[275] E.A. Bender, *An Introduction to Mathematical Modeling*..., *dz. cyt.*; V. Mityushev, W. Nawalaniec, N. Rylko, *Introduction to Mathematical Modeling and Computer Simulations*, Boca Raton 2018.

Strukturalizm ontologiczny związany jest z ontologią matematycznych obiektów. O ile strukturalizm epistemiczno-metodologiczny bada metodę oraz zakres intencji, jakie nadawały kształt i kierunek rozumowaniu matematyków, o tyle strukturalizm ontologiczny związany jest z treścią wiedzy matematycznej. Przyjmując stanowisko Jessiki Carter[276], nie uważamy, iż pojęcie struktury wyczerpuje zakres opisu wszelkich możliwych obiektów matematycznych. Zostanie to rozwinięte w kolejnym rozdziale.

Standardowo uważa się, że strukturalizm został zapoczątkowany w latach sześćdziesiątych XX wieku, przez Paula Benacerrafa i Hilary'ego Putnama. Strukturalizm ontologizny stosowany był do interpretacji innych nauk (zwłaszcza w odniesieniu do teoretycznej fizyki, a szczególnie do teorii względności czy mechaniki kwantowej), natomiast w matematyce jest częścią typowego podejścia w niektórych dziedzinach (jak algebra).

Poniżej zostaną przedstawione argumenty z praktyki i teorii matematycznej Cantora i Dedekinda za opisanym powyżej strukturalizmem epistemiczno-metodologicznym oraz ontologicznym. W kontekście strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego będziemy wskazywać u Dedekinda na metodę modelowania teoriomnogościowego (polegającą na budowaniu modeli struktur matematycznych), której nie odnajdujemy u Cantora. W kontekście strukturalizmu ontologicznego będziemy wskazywali strukturalizm rozumiany jako możliwość rozpoznania struktur w matematycznej teorii, przy założeniu, iż same struktury nie wyczerpują ontologicznie możliwych istniejących obiektów[277].

3.1 Strukturalizm Cantora

Jak już zostało wspomniane, w przypadku Cantora będziemy raczej wskazywać na samą strukturalną ontologię jego podstaw matematyki niż na takąż metodologię. Jeśli chodzi o epistemologię, to należy zauważyć, że w toku (oraz w konsekwencji) matematycznej dedukcyjnej konstrukcji mógł on poznawczo dochodzić do ujmowania pewnych struktur (nawet poprzez ich reprezentacje wizualne lub specyfikacje kategorii reprezentacji); tak było z opisywanych powodów w przypadku ujęcia nieskończoności aktualnej – w tym liczb porządkowych i kardynalnych, oraz w przypadku ujęcia zbioru liczb rzeczywistych. Wynikało to z samej budowy opracowywanych struktur.

[276] J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice...*, *dz. cyt.*

[277] J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice...*, *dz. cyt.*

Jednakże zasadniczo nie przypisujemy Cantorowi takiego podejścia, jak Dedekindowi, z dwóch powodów – nie odwoływał się on tak bezpośrednio ani nie podkreślał roli doświadczenia umysłowego, a także nie wyprowadzał konstrukcji w tak precyzyjny i konsekwentny sposób, jak to robił Dedekind. Stąd uważamy, iż Cantor w przeciwieństwie do Dedekinda nie był w swej matematycznej praktyce tak ukierunkowany na wprowadzane struktury, zarówno w kontekście intencji ich zbudowania, jak i ich oglądu, aby było to znaczącym elementem epistemologii w jego matematycznej praktyce. Innymi słowy, różnica, jaką rozpoznajemy w rekonstruowanych w niniejszej pracy ramach filozofii, dotyczy głównie metodologii, która oddziałuje w jakiś sposób na epistemologię (nie przekreśla konstrukcjonizmu jako kierunku opisującego proces poznawczy obydwu matematyków, jednak jest aspektem dodanym do konstrukcjonizmu Dedekinda, a w efekcie wpływa również na konstruowane struktury).

W kontekście strukturalizmu należy więc podkreślić, że Cantor mógł akceptować i w pewnym sensie uwzględniać strukturalną ontologię matematyki – sam definiował liczby jako zbiór granic z nałożoną na niego relacją porządku, a zbiór liczb rzeczywistych wyposażył dodatkowo we własność zupełności. W teorii mnogości mamy do czynienia z takimi strukturami, jak liczby porządkowe, kardynalne, ale też zwykłe zbiory – składające się oprócz elementów zbioru również z właściwości tych elementów oraz relacji.

Ostatecznie można zauważyć w praktyce matematycznej Cantora pewną akceptację strukturalistycznej ontologii, wynikającą raczej z budowy samych przedmiotów matematyki (rozważane obiekty matematyczne były w większości strukturami), ale niebędącą przy tym jego świadomym (intencjonalnym) założeniem i podejściem, oddziałującym na podejmowaną przez niego metodologię pracy badawczej.

Jak się okaże, takie podejście mogło być przyczyną tego, że Cantor wykorzystywał niekiedy – wbrew pewnym założeniom, ale nie zawsze we właściwy sposób – pewnego rodzaju intuicję. To niepoprawne wykorzystanie intuicji było związane, jak sądzimy, z niewystarczającym powiązaniem owej intuicji z milcząco zakładaną strukturalną ontologią samej matematyki, tj. ontologią rozpatrywanych matematycznych problemów.

Zbiory liczbowe

Przedstawimy tutaj strukturalną ontologię podstaw matematyki Cantora, zarówno w kontekście zbioru liczb rzeczywistych, jak i kwestii teoriomnogościowych. Zaczniemy od tych pierwszych.

Dadaczyński rekonstruuje ogólną definicję liczby u Cantora: liczba to „każdy element takiego zbioru, w którym wprowadzone są relacje mniejszości większości oraz równości, przy czym między dowolnymi dwoma elementami zbioru zachodzi dokładnie jedna z tych relacji”[278]. Definicja ta jest oparta na wypowiedzi Cantora w ramach jego wykładu z analizy w Halle: „die Berechtigung, diese Grenze als eine bestimmte Zahlengröβe Ω zu fassen, wird darin gefunden, daβ man für so definierten Zahlengröβen die Begriffe des Glöβer, Kleiner und Gleichseins aufstellen kann”[279]. Należy dopuścić, iż Cantor, choć przyjmował owe liczby wymierne *a priori* za podstawę rozważań matematycznych, to pamiętał o ich roli w strukturze, jaką jest zbiór liczb, z określoną w nim relacją porządku. To z kolei pociąga za sobą dwa spostrzeżenia. Po pierwsze, Cantor zdawał sobie sprawę z tego, że obiekty matematyczne, którymi się zajmuje, stanowią elementy w konkretnych, matematycznych strukturach. Po drugie, zbiór liczb był u Cantora szczególnym zbiorem elementów, tj. zbiorem z nałożoną relacją porządku (należały do niej wszystkie jego elementy).

Należy zwrócić uwagę na określenie: „szersze”, gdy Cantor opisuje pojęcie liczby. Dla niego węższe czy raczej bardziej podstawowe pojęcie liczby było związane z liczbami wymiernymi. Natomiast określenie „szersze” było niejako zarezerwowane dla pozostałych liczb, zwłaszcza niewymiernych, jakie skonstruował w ramach zbioru-struktury liczb rzeczywistych.

Podstawą współczesnej konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych metodą Cantora jest uporządkowane ciało liczb wymiernych $(Q,+,\cdot,0,1,<)$. Następnym potrzebnym konstruktem jest zbiór ciągów spełniających warunek Cauchy’ego, z określoną w nim relacją równoważności:

$$(a_n)\equiv(b_n), \text{ gdy } \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0.$$

Elementy spełniające relację równoważności tworzą klasy abstrakcji. Definiujemy w tych klasach działania oraz porządek następująco:

$$[(a_n)]+[(b_n)]=[(a_n+b_n)],$$

[278] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

[279] G. Cantor, *Das Script der Vorlesung uber Differentialrechnung vom Sommersemester...*, *dz. cyt.*; cyt. za: J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 44. Należy od razu zaznaczyć, iż Dadaczyński wskazuje na pojęcie *Zahlengröβe* jako pojęcie oznaczające dosłownie *wielkość algebraiczną*, jednakże znaczenie mu przypisywane ówcześnie każe je tłumaczyć jako *wielkość liczbowa*. Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 44 przyp.148.

$$[(a_n)]\cdot[(b_n)]=[(a_n\cdot b_n)],$$

$$[(a_n)] < [(b_n)] \iff \exists\varepsilon \in Q_+ \ \exists k: \exists n > k, a_n + \varepsilon < b_n.$$

Klasy stałych ciągów $[(a_1,a_2\ldots)]$, $a\in Q$, to po prostu liczby wymierne. Liczby rzeczywiste R to zbiór ilorazowy $C/\equiv$. Struktura $(R,+,\cdot,0,1,<)$ jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły[280].

Chociaż można przedstawić konstrukcję Cantora przy pomocy współczesnej, aksjomatycznej teorii ciał uporządkowanych (pokazując tym samym, iż uczony skądinąd stworzył skomplikowaną, przemyślaną strukturę), wskazuje się na trzy zasadnicze techniczne różnice między oryginalną oraz współczesną wersją konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych metodą Cantora, przez które zauważane między nimi podobieństwo opiera się jedynie na ogólnym zarysie tej konstrukcji[281]. Różnice te to:

– „szkicowość" opisu liczb wymiernych u Cantora[282] *vs.* formalne zdefiniowanie zbioru tych liczb jako ciała uporządkowanego współcześnie;

– różnica między stanem wiedzy Cantora oraz stanem wiedzy współczesnej o zbiorach ilorazowych oraz relacji równoważności;

– a także scharakteryzowanie intuicyjnej oraz koniecznej z punktu widzenia analizy właściwości ciągłości zbioru liczb rzeczywistych przy pomocy jedynie właściwości zupełności w sensie Cauchy'ego, bez odwołania się również – tak jak to się robi współcześnie – do Aksjomatu Archimedesa[283].

---

[280] Por. P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 161.

[281] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 161.

[282] Nieformalność podejścia matematyka z Halle jest utrzymana pomimo uwagi, że Cantor zakładał *implicite* lub wprost owe własności ciała uporządkowanego zbioru liczb wymiernych. P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 161.

[283] Obie konstrukcje liczb rzeczywistych – Cantora i Dedekinda – uważano (i nadal się uważa) za równoważne. Jednak z punktu wodzenia analiz matematyki niestandardowej i badań nad powiązaniami Aksjomatu Archimedesa z innymi aksjomatami wynika, iż Aksjomat Ciągłości według Dedekinda jest równoważny koniunkcji Aksjomatu Zupełności oraz Aksjomatu Archimedesa. Por. P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych...*, *dz. cyt.*, 23. Jest to fakt o tyle interesujący, o ile chcemy badać np. zależność pomiędzy intuicyjnym podejściem Cantora do nieskończenie małych a tym, co formalnie wynika z teorii, którą zbudował. Otóż wiadomo, że Cantor był negatywnie nastawiony do tych wielkości. Próbował udowodnić że nie istnieją. Natomiast wymieniona przez niego w konstrukcji właściwość zupełności zbioru może być spełniana w systemach niestandardowych, czyli takich, które zawierają wielkości nieskończenie małe. W przeciwieństwie do własności porządku ciągłego, który rozważał Dedekind, jako że wynika z niej Aksjomat Archimedesa. Okazuje się więc, że

Pozwalając sobie na skomentowanie zauważalnych technicznych różnic między oryginalną a współczesną wersją konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych metodą Cantora, odniesiemy się kolejno do pierwszej i trzeciej z wymienionych różnic (druga różnica jest poniekąd podobna do pierwszej, w obydwu chodzi w istocie o kontekst formalizacji matematyki na przestrzeni czasu).

Pierwszą różnicę należy traktować jako oczywiste następstwo rozwoju matematyki. Warto zwrócić uwagę, że dopiero Hilbert podjął się aksjomatycznego opisu liczby. Definiowanie zbioru liczb wymiernych jako ciała uporządkowanego jest oparte nie tylko na wiedzy z zakresu algebry, ale również na aksjomatycznym sposobie traktowania matematycznych obiektów-struktur, stąd Cantor nie musiał jeszcze posługiwać się w pełni aksjomatycznym podejściem. Po drugie zaś, za jego czasów algebra abstrakcyjna nie była jeszcze rozwinięta na tyle, aby mógł realizować również algebraiczne podejście, choć oczywiście, gdy porównamy praktykę matematyczną Cantora z praktyką matematyczną Dedekinda, można ów fakt zauważony przez Piotr Błaszczyka potraktować jako istotny aspekt twórczości matematycznej Cantora[284].

Odnosząc się do trzeciego (ostatniego) podpunktu, nie należy zapominać, iż Cantor zakładał na głębokim poziomie, że nieskończenie małe „nie istnieją" w zbiorze liczb rzeczywistych, i z takiego też przeświadczenia wychodził – choć głównie z perspektywy metamatematycznej, a nawet filozoficznej.

Jego sposób konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych przez zadaną w nim relację kongruencji dodatkowo wykluczał z tej konstrukcji nieskończenie (choć nie wykluczał ich formalnego istnienia w całej matematyce, co jest wiadome w obecnych czasach, dla Cantora

Cantor, porządkując analizę i wyrzucając z niej intuicyjne pojęcie nieskończenie małych wielkości, nie zrobił tego tak skutecznie, jak Dedekind.

[284] Tutaj należy zwrócić uwagę na to, jak różni się matematyka (jej styl, a zwłaszcza sposób i stopień formalizacji oraz aprioryczności) w zależności od epoki. Charakterystyczne dla tego zagadnienia, choć go niewyczerpujące, jest stwierdzenie Zbigniewa Króla: „Ścisła formalizacja matematyki współczesnej tylko pozornie uodpamia ją na zależność od kontekstu historycznego. Zależność ta staje się jedynie mniej widoczna. Podobnie jest z apriorycznością matematyki. Matematyka jest w pewnym sensie nauką aprioryczną, chociaż ustalane przez nią zależności nie zawsze są bezwzględnie apodyktyczne. […] W obydwu przypadkach, aprioryczności i ścisłej formalizacji, matematyka jest dalej otwarta na pewne inne ukryte możliwości, a każdorazowa jej postać formalna lub wynik rozumowania apriorycznego są w rzeczywistości efektem pewnych niejawnych wyborów i formalnej ich kodyfikacji. Cały czas pewne inne możliwości teoretyczne są niewidoczne i nieaktywne w procesie kreacji wiedzy matematycznej. Odsłanianie ich istnienia wraz z następującą analizą odpowiadają za rozwój matematyki i stanowią wewnętrzny powód przesądzający o racjonalnym i intelektualnym charakterze tego procesu". Z. Król, *Uwagi o stylu historycznym matematyki i rozwoju matematyki*, w: red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Poznań 2010, 203–205.

taką wiadomą nie było – wszak udowadniał on sprzeczność nieskończenie małych ze swoją teorią mnogości)[285]. Cantor mógł nie uważać, że musi specjalnie, w sposób formalny „rugować" owe, nieskończenie małe wielkości ze zbioru liczb rzeczywistych. To zadanie miało spełniać pojęcie granicy, oparte na Weierstrassowskim języku delt i epsilonów. Stąd w kontekście konstrukcji tego zbioru skupił się na tym, co było wymagane przez ówczesną analizę, tj. na wypełnieniu luk, zauważanych w zbiorze liczb wymiernych.

W jego konstrukcji było to zapewniane poprzez własność zupełności zbioru (tak jak u Dedekinda, poprzez własność ciągłości). Oczywiście, właściwość zupełności u Cantora nie była kategoryczna (jak własność ciągłości u Dedekinda)[286], tj. chociaż zapewniała minimalną liczbę elementów w zbiorze liczb rzeczywistych, nie wykluczała ona sama w sobie istnienia aktualnie nieskończenie małych wielkości w tym zbiorze[287]. Wprawdzie więc Cantor mógł zakładać Aksjomat Archimedesa, jednak formalnie go nie włączył do matematycznej konstrukcji. Mogła mieć tutaj wpływ pewna łatwość, z jaką przejmował ówczesne podejścia i paradygmaty, i to one w konsekwencji, a nie kwestie związane z matematycznymi problemami i obiektami kształtowały najważniejsze elementy jego praktyki matematycznej.

Uwagi krytyczne wobec Cantora dotyczą czasem kwestii techniczno-formalnych, które mają jednak sens dopiero z perspektywy współczesnej (a nie mają związku z jego metodologią badawczą, pozostawiającą nieco do życzenia, jeśli chodzi opod spójność). Chodzi np. o określenie prostej rzeczywistej terminem *continuum*[288]. W tym miejscu można zwrócić uwagę na fakt, że pomimo iż współcześnie prosta (geometryczna, rzeczywista) nie jest formalnie określana terminem *continuum*, ponieważ nie spełnia warunku zwartości[289] w

[285] Jest tak dlatego, że nieskończenie małe wielkości to te, których granicą jest 0. Wszystkie ciągi Cauchy'ego, które w przejściu granicznym dążą do 0, są utożsamiane z liczbą 0, w ramach konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych Cantora.

[286] Argumentem jest twierdzenie o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych: „istnieje jedno, z dokładnością do izomorfizmu, ciało uporządkowane w sposób ciągły". P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 11.

[287] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective*, „Bulletin of the section of logic" 49, (2020) nr 2, 149–179, doi: http://dx.doi.org/10.18778/0138-0680.2020.09.

[288] Np. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.* Należy też wskazać na problem, który poruszamy w analizie samego pojęcia ciągłości. Ciągłość czy też w przypadku Cantora zupełność dotyczy w niniejszej pracy ciągłości zbioru. Porządek ciągły (zupełność) zbioru to inna własność niż ciągłość funkcji. Te dwie własności należy umieć rozróżniać, gdyż istotne jest to zarówno z punktu widzenia matematyki, jak i filozofii (np. strukturalizmu).

[289] Obecnie *continuum* jest definiowane w topologii jako niepusta, topologiczna przestrzeń, która jest zwarta i spójna. W tym przestrzeń metryczna, ponieważ każda przestrzeń metryczna – z określoną metryką – jest

topologii, to każdy jej dwustronnie domknięty odcinek takim *continnum* już jest. Mogło więc Cantorowi chodzić o samą własność spójności[290] prostej. Podobny błąd możemy zauważyć w przypadku, gdy opisywał on zbiór liczb rzeczywistych poprzez własność zupełności (bez odwoływania się do własności archimedesowości). Własność zupełności[291] jest współcześnie definiowana niezależnie i odnosi się do przestrzeni metrycznej[292]. O ile każda przestrzeń metryczna jest również przestrzenią topologiczną (z topologią indukowaną przez określoną metrykę), o tyle nie każda przestrzeń topologiczna jest metryzowalna[293].

W związku z powyższym wykazaliśmy, iż konstrukcja liczb rzeczywistych Cantora może być – z pewnymi wyjątkami – traktowana tak, jak współcześnie jest prezentowana w teorii ciał uporządkowanych. Te wyjątki to przede wszystkim brak formalnie sformułowanego Aksjomatu Archimedesa, ale również – jak to nazywa Błaszczyk – „szkicowość" opisu zbioru liczb rzeczywistych, kontrastująca z precyzyjnym opisem struktury ciała uporządkowanego we współczesnej algebrze. Owa szkicowość jest ściśle związana ze wskazywaną przez nas mniejszą intencjonalnością (w porównaniu z Dedekindem) wprowadzania struktur jako nowych obiektów, a przez to z brakiem potrzeby ujęcia w „strukturalnym oglądzie" danej konstrukcji wszystkich niezbędnych aspektów i powiązań między nimi (tak jak się to robi, modelując matematycznie problemy, oraz tak jak to robił Dedekind).

---

przestrzenią topologiczną; odwrotnie implikacja nie zachodzi, tj. nie każda przestrzeń topologiczna jest przestrzenią metryczną.

[290] Przestrzeń topologiczna (X,Ʈ) jest *zwarta*, jeśli jest to przestrzeń Hausdorffa i można wybrać pokrycie skończone, z dowolnego pokrycia przestrzeni X zbiorami otwartymi. Jeśli mamy metrykę, określoną na zbiorze z przestrzeni kartezjańskiej, możemy powiedzieć, że zbiór *zwarty* to taki, który jest jednocześnie domknięty i ograniczony (zawarty w pewnej kuli). Dowolna funkcja rzeczywista określona na tych zbiorach, osiąga swoje kresy. Por. S. Jackowski, *Topologia I*, w: https://dydmat.mimuw.edu.pl/. Natomiast przestrzeń (X,Ʈ) jest *spójna,* jeśli nie istnieją niepuste zbiory U i V z Ʈ, takie, że są rozłączne i w sumie dają cały zbiór X. Por. S. Jackowski, *Topologia I...*, *dz. cyt.*

[291] Przestrzeń metryczna jest przestrzenią zupełną, gdy każdy ciąg Cauchy'ego z jej elementów jest zbieżny (posiada granicę). S. Jackowski, *Topologia I...*, *dz. cyt.*

[292] Tj. przestrzeni (zbioru), z określoną na nim metryką, tj. funkcją odległości. Metryką zaś w zbiorze *X* jest funkcja *d:X×X->R*, która spełnia, co następuje:

1. „*d(x,y)=*0 wtedy i tylko wtedy, gdy *x=y*,
2. *d(x,y)=d(y,x)* dla *x,y* należących do *X*,
3. *d(x,y)≤d(x,z)+d(z,y)* dla *x,y,z* należących do *X*".

S. Jackowski, *Topologia I...*, *dz. cyt.*

[293] Nie dla każdej przestrzeni topologicznej można znaleźć metrykę, która będzie wyznaczała jej topologię.

Jak się okaże dalej, na tle prac Cantora bardzo wyraźnie rysują się strukturalistyczne elementy założeń Dedekinda, dotyczące głównie metodologii. W przypadku Cantora można zauważyć ostrożne, dedukcyjne podejście do „konstruowania" nowych struktur. Bardziej zgłębiał on i analizował już dane matematyczne obiekty, pojęcia, aniżeli wymyślał zupełnie nowe. Nawet w obliczu kwestii związanych z Hipotezą Kontinuum czy nieskończenie małymi – gdzie, jak się w dalszym ciągu pracy okaże, obserwujemy silniejszy wpływ pewnego rodzaju intuicji matematycznej (obejmującej zarówno pewne przejęte przekonania[294], jak i związane z nimi wyobrażenia-oglądy reprezentacji wizualnych[295]) niż tylko samo dedukcyjne rozumowanie – nie próbował wprowadzać nowych kontekstów i treści.

W związku z powyższym, moglibyśmy również przyznać, iż ślady przekonań Cantora odnośnie do tego, że matematykę się odkrywa (a więc skutki świadomych założeń platonistycznych), mogą być znajdowane nie tylko w jego konstrukcji liczb rzeczywistych, ale w całej teorii mnogości. Może się wydawać, że to osłabia argumentację niniejszej pracy, jednakże należy pamiętać o dwóch rzeczach. Po pierwsze, tezy rozprawy nie stoją w sprzeczności z faktem, iż pewne uświadomione i deklarowane założenia filozoficzne u Cantora (ani u Dedekinda) mogły wpływać na jego matematyczne założenia, cele i decyzje. Po drugie, owe skutki założeń platonistycznych Cantora nie są sprzeczne z odkrywanymi w jego praktyce matematycznej elementami konstrukcjonizmu oraz strukturalizmu – które to elementy argumentują za główną tezą niniejszej pracy. Co więcej, mogą wyjaśnić pewne aspekty opisanej wyżej ontologii, jak i wspominanej tutaj metodologii.

---

[294] R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.*

[295] Należy tu zaznaczyć, że mówiąc o wyobraźni lub myśleniu wizualnym, opieramy się głównie na propozycji Giaquinto, który (powołując się na propozycję Kosslyna) broni możliwości myślenia wizualnego i jego roli w poznaniu matematycznym. Odróżniamy doświadczenie wizualne, gdzie istnieje jakiś zewnętrzny bodziec, od wyobraźni wizualnej i myślenia wizualnego, gdzie niekoniecznie musi istnieć jakiś bodziec wzrokowy. Jak pisze Kosslyn i in.: „Wizualna wyobraźnia mentalna to 'widzenie' w przypadku braku odpowiedniego bezpośredniego bodźca zmysłowego, słuchowa wyobraźnia mentalna to 'słyszenie' w przypadku braku bezpośredniego bodźca zmysłowego i tak dalej. Wyobrażanie różni się od percepcji, która jest rejestracją fizycznie obecnych bodźców". S. Kosslyn, M. Behrmann, M. Jeannerod, *The cognitive neuroscience of mental imagery*, „Neuropsychologia" 33, (1995), 1335, doi: doi:10.1016/ 0028-3932(95)00067-D. Lub: „używamy terminu „wyobraźnia mentalna" w odniesieniu do reprezentacji… informacji zmysłowych bez bezpośredniego bodźca zewnętrznego" J. Pearson i in., *Mental imagery: functional mechanisms and clinical applications*, „Trends Cogn. Sci." 19, (2015), 590, doi: 10. 1016/j.tics.2015.08.003. Jednak nie wchodzimy w szczegółowe dyskusje dotyczące bezpośrednio procesów neurologicznych, jakie – jak się przypuszcza – mogą stać za tymi mechanizmami, ani też w szczegółową dyskusję stanowiska reprezentacjonizmu z anty-reprezentacjonizmem. Więcej o tych kwestiach można poczytać np. w: B. Nanay, *Unconscious mental imagery*, „Phil. Trans. R. Soc. B" 376: 20190689, (2021), doi: https://doi.org/10.1098/rstb.2019.0689; S. Siegel, *The Contents of Visual Experience*, Oxford UK 2010.

Zbiory w teorii mnogości

W związku z powyższym, można zauważyć już na podstawie analizy samej konstrukcji liczb rzeczywistych Cantora, że nie przejawiał on świadomego strukturalizmu metodyczno-epistemologicznego (tak jak Dedekind), jednak w jego teorii obserwujemy strukturalną ontologię matematyki. Przejdźmy teraz do analizy teorii mnogości, aby potwierdzić i wzmocnić tę hipotezę.

Ontologia matematycznych problemów mogła wpływać na epistemologię Cantora, jednakże nie do końca przekładała się na metodologię. Stąd rekonstruowane elementy strukturalistyczne, które przedstawiamy w oparciu o analizę jego matematycznej praktyki, mogą (ale nie muszą) świadczyć o tym, iż Cantor ostatecznie akceptował strukturalistyczną ontologię podstaw matematyki (a więc w pewnym sensie ontologię matematyki w ogóle). Poniżej przedstawione zostaną wybrane struktury teoriomnogościowe, jakie Cantor konstruował (nie licząc struktur już wcześniej zaprezentowanych).

Pierwszym argumentem wskazującym na powyższe może być przykład wyrażenia (*M*, *N*, *P*...), oznaczającego zebranie w umyśle wszystkich zbiorów *M*, *N*, *P*… Porównując tę strukturę z taką samą strukturą przedstawioną przez Dedekinda, możemy zauważyć, że na poziomie pojęciowym Dedekind z góry określa końcową strukturę, zaś Cantor opisuje tylko sam proces zbierania zbiorów (nie zaś tworzenie „piętrowego", złożonego zbioru, którego elementami są zbiory)[296]. Ostatecznie możemy wskazać, że choć Cantor wskazuje na strukturę, nie robi tego w sposób precyzyjny i ukierunkowany na wprowadzenie nowego obiektu, co zauważamy u Dedekinda.

W artykule z 1880 roku Cantor zdefiniował sumę oraz iloczyn teoriomnogościowy. Należy zaznaczyć, że poniższa definicja sumy mnogościowej została zdefiniowana dla zbiorów rozłącznych parami. Cantor opisuje najpierw relację równoliczności zbiorów. Wyraża ją następująco: „Jeśli wszystkie punkty zbioru *P* należą do innego zbioru *Q*, to mówimy: *P* jest zawarte w *Q* lub również, że *P* jest dzielnikiem *Q*, *Q* jest wielokrotnością *P*"[297].

Następnie stwierdza:

[296] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)...*, *dz. cyt.*, 282.

[297] „Gehören alle Punkte einer Menge *P* zu einer andern Menge *Q*, so sagen wir: *P* sei in *Q* enthalten oder auch *P* sei ein Divisor von *Q, Q* ein Multiplum von *P"*. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)...*, *dz. cyt.*, 145.

„Jeśli P_1, P_2, P_3, ... są pewnymi zbiorami punktów o skończonej lub nieskończonej liczbie, to przynależy do nich najmniejsza wspólna mnogość […], która składa się ze wszystkich różnych punktów P_1, P_2, P_3, … i nie ma innych punktów niż elementy [tych zbiorów]"[298].

Cantor ową *najmniejszą wspólną mnogość* (będącą zwykłą *sumą mnogościową*) nazywa *die Vereinigungsmenge*. Później dodaje, że do owych zbiorów punktów P_1, P_2, P_3, … przynależy również „największy wspólny dzielnik [[...]], który jest zbiorem punktów wspólnych dla wszystkich punktów [z] *P1*, *P2*, *P3*..."[299]. Tutaj Cantor dla największego wspólnego dzielnika (będącego częścią wspólną, iloczynem mnogościowym) używa określenia *die Durchschnitt*, tj. przecięcie. Zarówno *Vereinigungsmenge*, jak i *Durchschnitt* są określeniami autorskimi Cantora, jednak – jak zauważa Dadaczyński – sam autor nie jest konsekwentny w ich używaniu[300]. W tłumaczeniu pojęcia *dzielnika* (*Divisor*) Cantor korzysta z pojęć *zbiorów pochodnych*. Wyjaśnia, , że generalnie zawsze zbiór będący wyższą pochodną ($P^{(v)}$) jest dzielnikiem zbioru będącego niższą pochodną ($P^{(v-n)}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną)[301]. Są to kolejne mniejsze struktury teoriomnogościowe, określające ontologię matematyki Cantora.

Kolejnymi strukturami, jakie można wymieniać, są bezpośrednio same liczby porządkowe i kardynalne. Zarówno liczby kardynalne, jak i liczby porządkowe stanowiły

---

[298] *„Sind P1, P2, P3, …* irgentwelche Punktmengen in endlicher oder unendlicher Anzahl, so gehört zu ihnen sowohl ein kleinstes gemeinsames Multiplum, welches wir mit:

𝔐(P1, P2, P3, ...) [die „Vereinigungsmenge"]

bezeichnen und welches die Menge ist, die aus allen verschiedenen Punkten von *P1, P2, P3,* ... besteht und sonst keine anderen Punkte als Elemente besitzt". G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)..., dz. cyt.*, 145.

[299] „wie auch ein gröβter gemeinsamer Divisor, den wir mit

𝔇(P_1, P_2, P_3, ...) [die „Durchschnitt"]

bezeichnen und welcher die Menge der Punkte ist, die allen *P1, P2, P3*... gemeinsam sind*"*. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)..., dz. cyt.*, 145–146.

[300] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 35 przyp.114.

[301] *„*Beispielswelse können wir, wenn *P', P'', P''',* … die aufeinander folgenden Ableitungen einer Punktmenge *P* sind (s. Nr. 1, S. 140), sagen, daβ *P''* ein Divisor von *P', P'''* sowohl Divisor von *P'',* wie auch von *P',* allgemein *P(v)* Divisor von *P(v-1), P(v-2), ... P'* ist; dagegen ist *P'* im allgemeinen kein Divisor von *P;* wenn aber *P* serbst die erste Ableitung einer Menge *Q* ist, so ist *P'* Divisor von *P''*. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)..., dz. cyt.*, 146.

ważną część odkrycia/stworzenia liczb pozaskończonych przez Cantora. Te pierwsze pozwalały matematykowi z Halle na porównywanie różnych (rodzajów) zbiorów, a ściślej – na porównywanie ich własności liczebności (co miało znaczenie głównie w przypadku zbiorów nieskończonych, gdy przeliczanie elementów tych zbiorów nie było możliwe). Dwa różne zbiory były określane jako równoliczne[302] (czy też ich moce były równe), gdy istniała bijekcja między nimi[303]. Cantor uważał, że moc zbioru jest własnością, jaką można otrzymać, abstrahując od charakterystyk elementów danego zbioru oraz relacji między tymi elementami.

Może się wydawać, że Cantor traktował liczby kardynalne neutralnie ontologicznie – właśnie z racji podwójnego aktu abstrakcji (od jakości elementów zbioru oraz porządku)[304]. Jeśli chodzi o liczby porządkowe, należy stwierdzić, iż w ich przypadku łatwiej je traktować jak strukturę, ponieważ z konieczności muszą być rozpatrywane jako zbiór w nieodłącznym kontekście relacji porządku.

W związku z powyższym, na podstawie tego, co wiadomo o liczbach kardynalnych, można zrekonstruować określone aspekty ontologiczno-epistemologiczne odnośnie do samego

---

[302] Od czasów Bolzana, ponieważ wcześniej problemem (sprzecznością) było równoczesne bycie podzbiorem (relacja jednostronnego należenia) oraz istnienie bijekcji między dwoma danymi zbiorami.

[303] Bijekcja to funkcja różnowartościowa i zarazem funkcja „na". Jeśli istnieje bijekcja między dwoma zbiorami, oznacza to, że każdemu elementowi ze zbioru A można przyporządkować jednoznacznie element ze zbioru B i na odwrót (każdemu elementowi ze zbioru B można przyporządkować jednoznacznie element ze zbioru A).

Pojęcie bijekcji między zbiorami (funkcji) wydaje się bardziej pierwotne do pojęcia równoliczności zbiorów w wydaniu Cantora, ponieważ on sam, badając relacje równolicznościowe między zbiorami, korzystał przeważnie z prostych wyrażeń typu: „istnieje/nie istnieje funkcja wzajemnie…". J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 48 przyp.164., s. 48, przypis 164. Należy zwrócić uwagę na to, że być może nazwanie dwóch zbiorów równolicznymi stało w większej sprzeczności z intuicją, zwłaszcza gdy jeden ze zbiorów wydawał się intuicyjnie liczniejszy od drugiego, niż samo stwierdzenie matematycznego faktu występowania określonej funkcji pomiędzy nimi.

[304]Por. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)*..., *dz. cyt.*; G. Cantor, *List do K. Laßwitza z 15.02.1884*..., *dz. cyt.* Cantor w obu miejscach stwierdza, iż liczba kardynalna to „pojęcie ogólne", wyabstrahowane z własności jakości elementów zbioru oraz z ich relacji uporządkowania. W dalszym ciągu pracy będzie ten temat jeszcze poruszony i rozwinięty. Warto dodać, iż Cantor w drugiej definicji unika już określenia „aktu abstrakcji", będąc pod wpływem antypsychologicznego artykułu Fregego, jaki miał okazję recenzować. Można więc sądzić, iż pierwsza definicja bardziej przedstawiała sedno jego praktyki matematycznej w kontekście teorii mnogości (a konkretnie liczb kardynalnych) niż druga. To interesujące, gdyż pierwsza definicja zawiera w sobie element konstrukcjonistyczny – opis pewnego aktu umysłu, jaki należy dokonać, aby wydobyć czy też odtworzyć owo pojęcie liczby kardynalnej, mając dany zbiór. Tutaj widać podobieństwo do Dedekinda, który – o czym więcej w drugiej części rozdziału – przyjmuje za oczywiste pewne odwołanie się do „rzeczy" [*Dinge*], zbieranymi przez umysł w zbiór (a więc będącymi elementami tego zbioru). Oczywiście podtrzymujemy stanowisko, iż nie potrzeba, aby Cantor zakładał tezy konstrukcjonizmu, aby w pewnym sensie te założenia wyrażał w matematycznej praktyce, ponieważ w pewnym sensie przyjmujemy, że każdy praktykujący podmiot matematyczny może bezkolizyjnie zarówno „konstruować", jak i „odkrywać" rzeczywistość matematyczną. Druga definicja liczby kardynalnej prezentuje podejście czysto logiczne, oczyszczone z wszelkich aspektów, mogących nasunąć skojarzenia psychologistyczne.

zbioru[305]. Po pierwsze, aby dokonać aktu abstrakcji, należało założyć, iż sam w sobie zbiór składa się nie tylko ze swoich elementów, ale również z relacji porządku, nałożonej na ten zbiór. To z kolei pokazuje, iż w rzeczywistości Cantor traktował zbiory teoriomnogościowe jak swoiste struktury. Sama liczba kardynalna była obiektem-własnością (lecz jednocześnie liczbą), uzyskiwaną na drodze czynności umysłowej, jaką był proces abstrakcji – można powiedzieć, proces dekonstrukcji. Jednakże należy przypomnieć, iż zbiory były też przez Cantora przyjmowane jako podstawowy element teorii mnogości – na przykład w 1872 roku, gdy zajmował się zbiorami liczbowymi oraz punktowymi w kontekście konstrukcji *R*. Można więc uwzględnić obydwa znaczenia zbioru – podstawowe, uwzględniające trywialny efekt traktowania grupy pewnych elementów jako całości, oraz to bardziej skomplikowane, wiążące się u swych podstaw z większą ilością aspektów niż samo postrzeganie grupy elementów jako całości. W tym drugim przypadku należy wziąć pod uwagę, oprócz samych elementów, również ich własności, a także relacje panujące w całym zbiorze.

Te dwa wnioski wskazują na elementy zarówno pewnego podstawowego oglądu matematycznych obiektów, elementy konstrukcjonistyczne, jak i strukturalistyczne. Tym, do czego Cantor odnosi się bezpośrednio (np. w kontekście definiowania liczb kardynalnych), jest czynność dekonstrukcji umysłowej. Z niej dopiero można dedukować o budowie struktury, z jakiej abstrahowana jest własność „mocy zbioru". Tutaj możemy więc mieć przykład tego, iż Cantor w jakiś sposób przyjmował strukturalną budowę (ontologię) pomniejszych obiektów matematycznych. Jednak nie oznacza to, że konstruował i wprowadzał intencjonalnie całe struktury (modele) liczbowe.

Podsumowując: najistotniejszy jest fakt, że strukturalizm, chociaż nie był w metodzie praktyki matematycznej Cantora wyraźnie zaznaczany (jego metodą była raczej szczegółowa dedukcja, analiza), a przynajmniej nie był, tak jak u Dedekinda, epistemologicznym założeniem i podstawową metodą – może być ostatecznie rozpoznany w budowie konstruowanych struktur, jak i w umysłowych czynnościach konstrukcyjnych, zdeterminowanych przez tę strukturalną, czasem złożoną budowę. Tym samym można więc

[305] Cantor w pierwszej definicji pisze: „jest wewnętrznie ustalone, czy dowolny przedmiot tej sfery pojęciowej należy do rozmaitości, czy też nie, a także, czy dwa przedmioty w zbiorze, pomimo formalnych różnic w sposobie ich podania, są równe, czy nie", choć: w praktyce nie można dokonać z pewnością i dokładnością odpowiednich rozróżnień*"*. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)...*, *dz. cyt.*, 150. Natomiast w późniejszej definicji pisał, że zbiór to: „dowolne zebranie w całość [Zusammenfassung] *M* pewnych dobrze zróżnicowanych obiektów m naszej intuicji lub naszego myślenia*"*. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)...*, *dz. cyt.*, 282.

ostatecznie potwierdzićstrukturalistyczną ontologię obiektów, jakie opracowywał i wprowadzał matematyk z Halle. Dodatkowo mimo odmiennego od Dedekinda podejścia, Cantor opracowywał również matematyczne struktury, dlatego możemy stwierdzić, że musiał w pewnym sensie akceptować tę strukturalistyczną ontologię matematyki (ale nie można zakładać, że jego celem miałoby być strukturalne modelowanie konkretnych kwestii poprzez wprowadzanie nowych strukturalnych obiektów).

3.2 Strukturalizm Dedekinda

W przypadku Dedekinda, oprócz samego strukturalizmu ontologicznego, związanego z samą matematyką, rozpoznajemy również strukturalizm epistemiczno-metodologiczny. Argumentem w tym kontekście jest przede wszystkim przedstawianie przez niego modeli matematycznych struktur (liczb rzeczywistych, liczb naturalnych), które charakteryzują się właściwością kategoryczności[306]. Przedstawiane przez niego modele wymagały świadomego przeprowadzania umysłowych konstrukcji tych struktur. Opierając się na koncepcji Giaquinto, można stwierdzić, że Dedekindowi nie wystarczały proste doświadczenia obrazów na temat obiektów i struktur matematyczny. Jego modele struktur wymagają dokładnych specyfikacji kategorii reprezentacji.

Istotne jest, że Dedekind przedkładał swoje teorie w sposób usystematyzowany i przejrzysty. Każde wprowadzone twierdzenie i pojęcie, oprócz tych pierwotnych (jak zbiór, elementy zbioru, relacje i odwzorowania), było konsekwentnie wprowadzane przy pomocy pojęć i twierdzeń wcześniejszych. Dodatkowo, precyzja, z jaką Dedekind przedstawił swoje podstawy teorii mnogości, może wskazywać, iż był on świadomy roli tej teorii w całej matematyce. Jednak nawet jeśli przykładał on wagę do warstwy syntaktycznej, było to umotywowane jego dbałością o dopracowanie wszystkich aspektów danej struktury. Nie motywował tego program, podobny do tego, jaki stworzył Hilbert. Uważamy, że Dedekind po prostu modelował teoriomnogościowo matematyczne kwestie i struktury, natomiast jego dbałość o precyzję wynikała jedynie z dbałości o dopracowanie wszelkich niezbędnych aspektów tych struktur.

[306] Jeśli chodzi o kategoryczność jego modelu zbioru liczb rzeczywistych, wspomagamy się m.in. uwagą Błaszczyka w: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 11. Natomiast kategoryczność zbioru liczb naturalnych potwierdza Joyce: D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 15.

Świadome założenia

Wypowiedzi o ciągłości

Tym, co charakteryzowało praktykę matematyczną Dedekinda, było świadome komunikowanie o przeprowadzanych przez niego matematycznych procedurach. Faktem jest, że w swojej konstrukcji liczb rzeczywistych nawiązał do teorii stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa[307]. Jednakże, co ważniejsze, wprowadził Aksjomat Ciągłości - a właściwie własność ciągłości, która następnie stała się podstawą tego aksjomatu (np. u Hilberta). Był w pełni świadomy, i o tym pisał, że ówczesna analiza wymagała sformalizowania pojęcia wielkości ciągłych, i to właśnie zrobił. Świadczy to o jego wysokiej świadomości założeń oraz celów, jakich wymagały opracowywane problemy.

Już na samym początku konstrukcji liczb rzeczywistych Dedekind zastanawiał się nad mgliście pojmowaną własnością ciągłości oraz odwoływał się w tym celu do własności geometrycznych linii prostej. Z tego powodu, jak pisał, chciał formalnie opisać owe wielkości ciągłe, którymi zajmowano się u podstaw analizy[308].

Dedekind na początku rozprawy *Stetigkeit und irrationale Zahlen* z 1872, pisze:

> „Mówi się często, że rachunek różniczkowy zajmuje się wielkościami ciągłymi, nigdzie jednak nie podaje się żadnego wyjaśnienia tej ciągłości, co więcej, nawet w najściślejszych wykładach tego rachunku dowody bazują nie na ciągłości, ale odwołują się albo do pewnych mniej czy bardziej geometrycznych, czy przez geometrię podsuwanych wyobrażeń, albo też do pewnych twierdzeń, które nigdy nie zostały dowiedzione w sposób czysto arytmetyczny”[309].

W tym miejscu wyjaśnia poniekąd swoje intencje i założenia filozoficzne. Otóż intencją uczonego jest zgłębienie pod kątem filozoficznym, a następnie matematyczne zdefiniowanie własności ciągłości porządku. Ten z kolei – jak wspomnieliśmy w poprzednim podrozdziale – nie był formalnie przez Dedekinda uściślony, choć odwołuje się on bezpośrednio do rachunku różniczkowego, mówiąc o wielkości ciągłej, sięga do geometrii.

---

[307] Jednak nie oznacza to, iż na płaszczyźnie matematyki (tylko raczej w kontekście indywidualnej praktyki) można zrównać teorię Eudoksosa-Euklidesa z propozycją Dedekinda.

[308] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 315.

[309] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 315.

Dedekind tak opisuje ową własność, którą zarówno w sposób zamierzony ustanowił fundamentem swojej konstrukcji liczb rzeczywistych, jak i chciał definiować, odnosząc się wprost do geometryczno-teoriomnogościowego kontekstu intuicji poznawczej (wizualizacji[310]), jako używanego przez niego w praktyce matematycznej [311]:

> „Jeżeli wszystkie punkty prostej rozpadają się na dwie klasy tego typu, że każdy element pierwszej klasy leży na lewo od każdego elementu drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który tworzy ten podział wszystkich punktów na dwie klasy, czyli przekrój prostej"[312].

Błaszczyk wskazuje, że nie jest to nic innego, jak tylko współczesna definicja ciągłości w sensie Dedekinda: „żaden przekrój zbioru $(X,<)$ nie wyznacza ani luki, ani skoku"[313].

Z matematycznego punktu widzenia to prawda. Lecz z punktu widzenia filozoficznego pisemna wypowiedź zawiera więcej treści[314]. Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na fakt, iż Dedekind bardzo obrazowo i oryginalnie opisał własność prostej, złożonej z punktów. Już na początku swojej konstrukcji liczb rzeczywistych odwołał się do – wręcz fizycznej – własności świata doświadczeń. Mamy tu na myśli zarówno jego niewyartykułowane założenie

---

[310] Jego przekroje w *R* można przedstawić na sposób bardzo formalnie wizualny, jako dwie półproste (skok: obie domknięte, jedna prawostronnie, druga lewostronnie; luka: obie otwarte, jedna prawostronnie, druga lewostronnie; przekrój właściwy R: jedna otwarta druga domknięta i na odwrót – odpowiednio prawo- i lewostronnie).

[311] Warte uwagi jest to, że Dedekind w sposób zamierzony i precyzyjny przygotował fundamenty teoretyczne dla konstruktu dość problematycznego, jakim jest *continuum* złożone z punktów. Nie chodzi o *continuum* w sensie współczesnej teorii topologicznej w matematyce, lecz o przedmiot (abstrakcyjny) ciągły, mający własność ciągłości. O ile w dzisiejszej fizyce ciągłość przestrzeni jest częściej zastępowana, przysłaniana procesem nieustannego poruszania się cząsteczek (por. z teorią dualizmu korpuskularno-falowego, np. w: A.K. Wróblewski, *Historia fizyki. Od czasów najdawniejszych do współczesności*, Warszawa 2007, 463–466.), za czym w pewnym sensie również Cantor się opowiadał, o tyle Dedekind dokonał pewnego przełomu. Stało się tak dlatego, że chciał po prostu uzyskać odpowiedź na pytanie, co zagwarantowałoby upragnioną w analizie własność ciągłości prostej geometrycznej, utożsamianej czasem z dziedziną funkcji – ważne jest tutaj rozróżnienie z własnością ciągłości samej funkcji, intuicyjnie i intencjonalnie rozpatrywanej w kategorii zupełnego, wystarczająco gęstego zbioru „nienachodzących" na siebie punktów na prostej.

[312] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 32; R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 317.

[313] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 32.

[314] Będzie to rozwinięte jeszcze w dalszej części pracy. Jednak ogólnie chodzi o fakt, iż Dedekind, poszukując istoty własności ciągłości we własnym umyśle – w wyobrażeniu o ciągłości w połączeniu z wymaganiami, jakie stawiała analiza – odwołuje się niejako do filozofii Kanta. Nie robi tego w sposób zamierzony, jednak epistemiczny proces, podczas którego dochodzi do wykształcenia definicji ciągłości, nawiązuje do korzystania z naoczności czasu i przestrzeni, które są według Kanta narzucane na każde wrażenie (w tym przypadku – umysłowe). Dedekind łączy w jednym właściwości geometryczne z arytmetycznymi. Jego ciągła prosta nie jest prostą geometryczną co do istoty.

o własności liniowości porządku (do liniowego porządku w wersji Dedekinda brakuje prawa trychotomii), jak i samą nazwę „przekroju".

Podstawowym pojęciem Dedekinda w charakteryzowaniu zbioru Q oraz R jest przekrój. Definicję pojęcia przekroju możemy uzyskać poprzez przytoczenie opisywanej poniżej jednej z własności porządku[315]:

> „Jeżeli a jest pewną określoną liczbą, to wszystkie liczby systemu R [liczb wymiernych – przyp. K.T.] rozpadają się na dwie klasy A_1 i A_2, z których każda zawiera nieskończenie wiele elementów. Pierwsza klasa A_1 zawiera wszystkie liczby a_1, które są $< a$, druga klasa A_2 wszystkie liczby a_2, które są $> a$. Sama liczba a może byc zaliczona albo do pierwszej, albo do drugiej klasy i jest ona wtedy odpowiednio największą liczbą pierwszej lub najmniejszą liczbą drugiej klasy. W każdym z przypadków rozkład systemu R na dwie klasy A_1, A_2 jest tego rodzaju, że każda liczba pierwszej klasy A_1 jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy A_2"[316].

Lub przytaczając pojęcie przekroju prostej:

> „Jeżeli wszystkie punkty prostej rozpadają się na dwie klasy tego typu, że każdy element pierwszej klasy leży na lewo od każdego elementu drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który tworzy ten podział wszystkich punktów na dwie klasy, czyli przekrój prostej"[317].

Tak jak wcześniej zauważyliśmy, przekrój jest ściśle związany z uporządkowaniem zbioru lub z wyobrażeniem „przekroju" na geometrycznej prostej (przy czym wyobrażenie to nie opisuje doświadczenia fizycznego, a model kontinuum punktowego)[318]. Jednocześnie chodzi o to, aby w wyniku dokonania abstrakcyjnej operacji przekroju uzyskać liczbę/punkt. Operacja samego przekroju, pewna umysłowa konstrukcja, nie jest tutaj jednak celem samym

---

[315] O porządku pisze Dedekind następująco: „Dla naszych dalszych celów ważniejsza jest jednak inna własność systemu R, którą można wyrazić mówiąc, że system R jest dziedziną jednowymiarową dobrze uporzadkowaną, nieskonczoną w dwu przeciwnych kierunkach*". tłum: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 21; R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 318. Można powiedzieć, że Dedekind, mówiąc o porządku, opierał się na modelu liczb wymiernych (później również rzeczywistych).

[316] Ttłum: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 22; R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 319.

[317] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 32; R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 321.

[318] Por. np. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii: zbiory spójne i kontinua*, Katowice 2011, 7.

w sobie. Nadrzędnym kierunkiem działań Dedekinda jest zdefiniowanie takiej właściwości, która pozwoli optymalnie scharakteryzować zbiór liczb, jaki miał być efektywnie i funkcjonalnie wykorzystywany w analizie. Należy nadmienić, że obecnie w analizie są wykorzystywane również inne (np. niestandardowe) zbiory.

Można stwierdzić, że Dedekind po prostu odpowiedział swoją konstrukcją na ówczesne wymagania wiodących paradygmatów matematycznych. W tym sensie opracował przede wszystkim strukturę, odpowiadającą na konkretne oczekiwania, i jej konstrukcja umysłowa była tu rzeczą drugorzędną. Dedekind nie tyle uzupełnił teorię stosunków Eudoksosa-Euklidesa[319], co wykorzystał ją jako część opracowywanej struktury.

Przypomnijmy, że przekrój był zdefiniowany – co ważne – nie przy pomocy wykorzystania intuicji dotyczącej „przecinania" czegoś fizycznie (choć mogła być ona pewną podstawą lub inspiracją), a wskutek połączenia właściwości ciągłości prostej (geometrycznej) z właściwościami zbioru (prawie liniowo) uporządkowanego. To w efekcie powoduje, iż w każdym miejscu prostej rzeczywistej znajdujemy dokładnie jeden i tylko jeden punkt. Natomiast w przypadku zbioru liczb wymiernych część przekrojów wskazuje luki. Obecnie skok wykluczany jest przez liniowość porządku zbioru. W trakcie analizy przykładu pokazującego brak ciągłości w zbiorze liczb wymiernych, Dedekind dzieli (według powyższego równania) zbiór na dwa rozłączne podzbiory: A_2, którego elementami są liczby dodatnie (ponieważ są większe niż liczba D – liczba dodatnia), oraz A_1, którego elementami są liczby mniejsze od D. Próbuje to opisać następująco:

> „Jeśli do drugiej klasy A_2 zaliczymy każdą dodatnią liczbę wymierną a_2, której kwadrat jest > D, a do pierwszej klasy A_1 wszystkie inne liczby wymierne a_1, to podział ten tworzy przekrój (A_1, A_2), tj. każda liczba a_1 jest mniejsza niż każda liczba a_2. Jeżeli a_1 = 0 lub jest ujemna, to a_1 jest mniejsze niż dowolna liczba a_2 tylko z tego powodu, ponieważ zgodnie z definicją [liczba a_2 – przyp. K.T.] jest dodatnia; natomiast jeśli a_1 jest dodatnia, jej kwadrat wynosi $\leqq D$, a w konsekwencji a_1 jest mniejsze niż dowolna liczba dodatnia a_2, której kwadrat jest > D"[320].

---

[319] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1994, 151–152.

[320] Por. „Nimmt man in die zweite Klasse A_2 jede positive rationale Zahl a_2 auf, deren Quadrat > D ist, in die erste Klasse A_1 aber alle anderen rationalen Zahlen a_1, so bildet diese Einteilung einen Schnitt (A_1, A_2), d. h. jede Zahl a_1 ist kleiner als jede zahl a_2. Ist nämlich $a_1 = 0$ oder negativ, so ist a_1 schon aus diesem Grunde kleiner als jede Zahl a_2, weil diese zufolge der Definition positiv ist; ist aber a_1 positiv, so ist ihr Quadrat $\leqq D$, und folglich ist a_1 kleiner als jede positive Zahl a_2, deren Quadrat > D ist". R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 324.

Po wykonaniu kilku przekształceń i obliczeń stwierdza również, , że: „kwadrat każdej liczby wymiernej x jest albo $< D$ albo $> D$. Z tego łatwo wynika, że nie ma ani największej liczby w klasie A_1, ani najmniejszej liczby w klasie A_2”[321].

Co prowadzi do pokazania, iż przekrój, który został stworzony, nie jest liczbą wymierną. Stąd Dedekind ponownie, po dokonaniu niezbędnych przekształceń[322], stwierdza wprost:

> „Jeśli weźmiemy liczbę dodatnią z klasy A_1, to dla x mamy $x^2 < D$, a w konsekwencji mamy $y > x$ oraz $y^2 < D$, więc y również należy do klasy A_1. Ale jeśli ustalimy dla x liczbę z klasy A_2, to mamy $x^2 > D$, i w konsekwencji mamy $y < x$, $y > 0$ oraz $y^2 > D$, więc y również należy do klasy A_2. Przekrój ten nie jest zatem tworzony przez żadną liczbę wymierną”[323].

W tym momencie autor uznaje, iż owe „luki”, na jakie napotkał w zbiorze liczb wymiernych, należy lepiej zbadać, aby móc powiedzieć cokolwiek na temat wytwarzania przekrojów odpowiadających liczbom niewymiernym. Ujmuje to w następująco:

> „W celu stworzenia podstawy do konstrukcji wszystkich liczb rzeczywistych, tj. aby uzyskać wszystkie liczby wymierne i niewymierne, musimy najpierw zbadać relacje między dowolnymi dwoma przekrojami (A_1, A_2) i (B_1, B_2) wytworzonymi przez dowolne dwie liczby *α i β*”[324].

---

[321] Por. „Mithin ist das Quadrat einer jeden rationalen Zahl x entweder $< D$ oder $> D$. Hieraus folgt nun leicht, daβ es weder in der Klasse A_1 eine gröβte, noch in der Klasse A_2 eine kleinste Zahl gibt”. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 325.

[322] Chodzi o równanie:

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0.$$

R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 325.

[323] Por. „Nimmt man hierin für x eine positive Zahl aus der Klasse A_1, *so ist* $x^2 < D$, und folglich wird $y > x$, und $y^2 < D$, also gehört y ebenfalls der Klasse A_1 an. Setzt man aber für x eine Zahl aus der Klasse A_2, so ist $x^2 > D$, und folglich wird $y < x$, $y > 0$ und $y^2 > D$, also gehört y ebenfalls der Klasse A_2 an. Dieser Schnitt wird daher durch keine rationale Zahl hervorgebracht”. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 325.

[324] Por. „Um nun eine Grundlage für die Anordnung aller reellen, d. h. aller rationalen und irrationalen Zahlen zu gewinnem, müssen wir zünachst die Beziehungen zwischen irgend zwei Schnitten *(A_1, A_2)* und *(B_1, B_2)* untersuchen, welche durch irgend zwei Zahlen α und β hervorgebracht werden”. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 325–326.

Powyżej przedstawiona analiza pracy Dedekinda, mająca na celu ukazanie pewnego „wybrakowania” zbioru liczb wymiernych, ujawnia jedną, istotną rzecz. Otóż zauważmy, iż Dedekind pokazuje częściowe podstawy i genezę swojej definicji właściwości ciągłości. Chodzi o tę składową definicji, która wywodzi się bezpośrednio z problemu niezawierania liczb niewymiernych przez zbiór liczb wymiernych, a więc problemu specyficznego „wybrakowania” tego zbioru.

Zauważmy przy tym, iż Dedekind omija tutaj całą problematykę konstruowania liczb przy pomocy ciągów. Przyjmuje je jako gotowe, już istniejące – dotyczy to zarówno liczb wymiernych, jak i liczb niewymiernych. Podstawą jego rozważań jest gotowy zbiór liczb wymiernych, a następnie – uzupełniony o liczby niewymierne – zbiór liczb rzeczywistych. Dowodzi to, że Dedekind nie wymyślił, nie stworzył w umyśle czy też przy pomocy umysłu (a przynajmniej nie całkiem) formalnej definicji owej właściwości, ale w znaczny sposób ją wydedukował.

Założenia odnośnie do formalizowania arytmetyki

Należy zaznaczyć, iż często podnoszona jest kwestia wypowiedzi Dedekinda z pogranicza meta-matematyki, które mogą naprowadzać na inne wnioski niż te, do jakich dochodzimy w niniejszej pracy.

Chodzi o wypowiedzi, które odnoszą się do pewnego rodzaju celów naukowych Dedekinda, poprzez które wyraża potrzebę sformalizowania podstawowych kwestii w matematyce, przyjmowanych dotychczas jako oczywistość, również na podstawie pewnych intuicji (ale też dodajmy – przyzwyczajenia). Należy jednak zwrócić uwagę na to, iż wypowiedzi te mogły być – w znacznej mierze – przejawem wpływów zastanej ówcześnie wiedzy matematycznej i kierunków jej rozwoju. Nie oznacza to, że Dedekind sam nie wyrażał chęci formalizowania matematyki. Jednakże nie uważamy, iż tak samo jak Cantor, w sposób zamierzony całkowicie rezygnował z intuicji matematycznej (chodzi tu o myślenie wizualne, wtedy utożsamiane z intuicją geometryczną). Chciał ją jednak sformalizować i wprowadzić do teorii jako wiedzę.

Powyższe stwierdzenia można odnieść zarówno do ciągłości, którą to właściwość – z pochodzenia intuicyjną i geometryczną – wprowadził jako (pewien nieformalny) aksjomat konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych, czyniąc ją warunkiem kategoryczności modelu. Można też powyższe uwagi odnieść do wprowadzanej przez niego teorii mnogości, gdzie czyni odniesienia do umysłowego doświadczenia pewnych „rzeczy”, o których można pomyśleć (i które są definiowane przez to, co można o nich pomyśleć), a także pisze o „świecie myśli". Jednak cała teoria mnogości jest przez Dedekinda przedstawiona bardzo precyzyjnie i formalnie, więc obie te rzeczy nie muszą się wykluczać.

W tym więc kontekście należy interpretować jego wypowiedzi o konieczności oparcia matematyki nie na samej intuicji, ale na formalnych podstawach.

Jedna taka wypowiedź zamieszczona jest na początku dzieła z 1872 roku, druga zaś na początku dzieła z 1888 roku:

> „Bardziej niż kiedykolwiek odczuwałem brak prawdziwie naukowych podstaw arytmetyki. Nawet teraz takie odwoływanie się do intuicji geometrycznej w pierwszym przedstawieniu rachunku różniczkowego uważam za niezwykle przydatne z dydaktycznego punktu widzenia, a wręcz niezbędne, jeśli nie chce się tracić zbyt wiele czasu. Ale nikt nie zaprzeczy, że ta forma wprowadzenia do rachunku różniczkowego nie może pretendować do miana naukowego. Dla mnie to uczucie niezadowolenia było tak przemożne, że postanowiłem rozmyślać nad tym zagadnieniem, aż znajdę czysto arytmetyczną i doskonale ścisłą podstawę dla zasad analizy nieskończenie małych"[325].
>
> Oraz:
>
> „W nauce nie należy wierzyć bez dowodu w to, co można udowodnić. […] Nazywając arytmetykę (algebrę, analizę) tylko częścią logiki, twierdzę, że uważam pojęcie liczby za zupełnie niezależne od przedstawień czy intuicji czasu i przestrzeni, ale uważam je raczej za bezpośredni wypływ czystego prawa myśli"[326].

Pierwszą wypowiedź Marcus Giaquinto interpretuje jako przejaw odrzucenia intuicji przez Dedekinda[327]. Jednak, jak wskazaliśmy, można tę wypowiedź zinterpretować jako chęć sformalizowania matematyki, ale bez odrzucania w całości intuicyjnego doświadczenia umysłowego. Ów matematyczny ogląd, jak będziemy dalej argumentować, był dla Dedekinda istotny w momencie poszukiwania tych aspektów, jakie koniecznie należało wziąć pod uwagę przy opracowywaniu danej struktury.

---

[325] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 315–316.

[326] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 335–336.

[327] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*, 23.

Druga wypowiedź może przywodzić na myśl stwierdzenie, że Dedekinda można określić jako logicystę (lub przedfregowskiego pre-logicystę). Jednakże to również nie musi być prawdą, ponieważ – po pierwsze – jeden z wniosków niniejszej pracy zaprzecza temu stwierdzeniu, a po drugie – Dedekind, budując model liczb naturalnych, co prawda ominął (ale tylko w pewien sposób) prostą intuicję czasoprzestrzeni, jednakże odwoływał się do innych – które wówczas uważano za niepodważalne, logiczne prawa myśli – doświadczeń umysłowych (jak rzeczy oraz „świat myśli"). Podsumowując, można powiedzieć, że Dedekind nie odrzucił intuicji, lecz jego celem było nieopieranie na niej bezpośrednio formalnej teorii.

Precyzja i konsekwencja wyprowadzania pojęć oraz twierdzeń

Przykłady w konstrukcji liczb rzeczywistych

Poniżej przedstawione zostaną fragmenty rozumowań Dedekinda, stanowiące przykład konsekwencji i precyzji w jego praktyce matematycznej. Będzie to kolejny argument na to, iż świadomie stosował on metodę modelowania zagadnień matematycznych. Jak wspominaliśmy, cechy te dowodzą wcześniej przedsięwziętego zamiaru wprowadzenia struktury rozwiązującej konkretny problem.

Konstrukcję liczb rzeczywistych (jako uzupełnienie zbioru liczb wymiernych do zbioru, który będzie miał własność ciągłości) zaczyna Dedekind od podania przykładu przekroju, który nie jest „wyprodukowany" przez liczbę wymierną[328]. Posługuje się do tego celu pojęciem dodatniej liczby całkowitej D, która nie jest (z założenia) kwadratem żadnej liczby całkowitej. Pisze, że wtedy istnieje taka dodatnia całkowita liczba λ, że[329]:

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Następnie, poprzez pojęcie wcześniej zdefiniowanego przekroju, Dedekind chce pokazać, iż liczba, która jest rozwiązaniem owej nierówności, nie jest wymierna. A bardziej szczegółowo – że przekrój tworzony przez dwa zbiory A_1 oraz A_2, gdzie A_2 jest zbiorem

[328] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 324.

[329] Por. „Es sei D eine positive ganze Zahl, aber nicht das Quadrat einer ganzen Zahl, so gibt es eine positive ganze Zahl λ von der Art., daβ

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

wird". R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 324.

wszystkich liczb wymiernych, których kwadrat jest większy od wielkości D, nie jest „wytworzony" przez żadną liczbę wymierną.

Po bezpośrednim, ogólnym odniesieniu się do właściwości ciągłości, Dedekind porównuje do prostej (posiadającej tę własność) zbiór liczb rzeczywistych. Pokazał dzięki temu, że liczby wymierne tworzą za mały zbiór, aby posiadał własność ciągłości, tak jak posiada ją prosta. To obrazuje, że dla Dedekinda wystarczające było rozpatrywanie idealnej i wystarczającej zarazem (w kontekście użytkowania w matematycznej analizie) prostej posiadającej właściwość ciągłości. Dedekind używał odniesienia do wyobrażenia prostej, jednak tylko do pewnego momentu, który uznał za wystarczający[330] do przejścia na czysto formalny poziom prac matematycznych. Dlatego też można powiedzieć, iż formułując właściwość ciągłości, Dedekind posługiwał się właściwością ciągłości prostej geometrycznej. Wykorzystał tę własność w swojej formalnej definicji, czerpiąc również z intuicji dotyczących pojęcia przekroju kontinuum punktowego.

Badając stosunki między dwoma przekrojami (tj. między liczbami wyznaczanymi przez te przekroje, Dedekind doszedł do wniosku, że liczb między dwoma liczbami wytworzonymi przez przekroje może być nieskończenie wiele:

> „Z tego w końcu wyłania się następująca rzecz. Jeżeli $\alpha > \beta$, to w A_1 jest zawartych nieskończenie wiele liczb, które nie są zawarte B_1, a zarazem istnieje nieskończenie wiele takich liczb, które są różne od α i od β jednocześnie; każda taka wymierna liczba c jest $< \alpha$, ponieważ jest zawarta w A_1, oraz jednocześnie jest $> \beta$, ponieważ jest zawarta w B_2"[331].

Można mówić o kilku aspektach strukturalizmu w kontekście badania problemu niewymierności u Dedekinda. Po pierwsze, liczby wymierne (jako byty istniejące w oczywisty i bezsprzeczny sposób) traktuje jako elementy konkretnej struktury, jaką tworzą wraz z relacjami i działaniami określonymi na całym zbiorze tych liczb. Tak samo traktuje prostą geometryczną złożoną z punktów (tu zwłaszcza kładzie nacisk na zasadę ciągłości tej struktury), jak w końcu cały zbiór liczb rzeczywistych, wraz z działaniami, porządkiem, a także

---

[330] Czyli do momentu, kiedy formalnie zdefiniował własność ciągłości, łącząc własność ciągłości ze zbiorem punktów, aby następnie tę definicję wykorzystać w analizie.

[331] Por. „Hieraus ergibt sich endlich noch folgendes. Ist $\alpha > \beta$, gibt es also unendlich viele Zahlen in A_1, welche nicht in B_1 enthalten sind, so gibt es auch unendlich viele solche Zahlen, welche zugleich von α und von β verschieden sind; jede solche rationale Zahl c ist $< \alpha$, weil sie in A_1 enthalten ist, und sie ist zugleich $> \beta$, weil sie in B_2 enthalten ist". R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 328.

niezbędną zasadą ciągłości tego porządku. Postrzega więc byty matematyczne w kontekście struktur, w jakich one występują.

Można powiedzieć, że postrzegając te byty w kontekście strukturalistycznym, odwołuje się do ich sensu matematycznego – ich stosowalności (matematycznego użytkowania). Tak podchodząc do matematycznego podmiotu, Dedekind nie poszerza niepotrzebnie owych struktur o części „nieużytkowe", ponieważ byłoby to bezsensowne z konstrukcjonistycznego punktu widzenia. Tym samym można nazwać strukturalizm Dedekinda praktycznym, ponieważ w sposób uporządkowany ogranicza zakres bytów matematycznych, które wchodzą w skład opracowywanych przez niego teorii matematycznych, do niezbędnych w kontekście stosowalności do danego problemu.

Powyższe wyjaśnienia rzucają nieco światła na odpowiedź na pytanie: „Dlaczego Dedekind nie zajmował się i nie czuł potrzeby zajmowania się kwestią (aktualnie) nieskończenie małych wielkości?". Warto zauważyć, że ten sam problem zajmował Cantorowi dużo czasu i uwagi[332]. Otóż można założyć, że Dedekind najzwyczajniej zdawał sobie sprawę z tego, że jego konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych jest tak zbudowana, iż w zasadzie wyklucza problem nieścisłości związany z pojęciem nieskończenie małych wielkości. Przynajmniej na tyle, iż nie stwarza żadnych dodatkowych problemów czy wątpliwości w kontekście praktycznej stosowalności w analizie czy arytmetyce. Co okazało się – jak wiadomo dzisiaj – prawdą.

Dedekind w procesie konstrukcji liczb rzeczywistych odwołuje się do kluczowej w jego teorii własności ciągłości. Zapożyczając owo pojęcie z intuicji geometrycznej, formalizuje je tak, aby jako bezpośrednio związane ze zbiorem liczb rzeczywistych charakteryzowało ów zbiór w sposób wystarczający i maksymalny. Pojęcie to wzięte spoza analitycznej teorii funkcji oraz spoza arytmetycznej teorii działań na liczbach zyskało dzięki precyzyjnemu opisowi i dokładnemu połączeniu z pozageometrycznymi sformalizowanymi teoriami matematycznymi

[332] Jeśli wziąć również pod uwagę kwestię Hipotezy Kontinuum, to Cantor rozważał tego typu problemy do końca życia. Natomiast odnośnie do nieskończenie małych próbował udowadniać nie tylko filozoficznie (choćby pejoratywnie określając nieskończenie małe „zarazkami cholery matematyki" por. G. Cantor, *Letter from Cantor to Vivanti, December 13, 1893. Aus den Briefbüchern Georg Cantor*, 505; J. Dadaczyński, *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*..., *dz. cyt.*, 34.), ale przede wszystkim matematycznie, wykazując sprzeczności wynikające z ich istnienia (por. G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)*..., *dz. cyt.*; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*..., *dz. cyt.*).

nie tylko formalne brzmienie, ale również nowy kontekst matematyczny, jako element (właściwość) skonstruowanej struktury zbioru liczb rzeczywistych w teorii Dedekinda.

W związku z powyższym, można stwierdzić, iż matematyk z Brunszwiku, wykorzystywał w abstrakcyjnym i precyzyjnym sposobie działania naukowego odniesienia do pozamatematycznych źródeł, tj. umysłowych wyobrażeń, takich jak ciągła prosta. Nawiązując do odniesienia Dedekinda do pojęcia przekroju, można stwierdzić w jego przypadku bardziej świadome odniesienia (niż u Cantora) do kantowskiego oglądu-intuicji (*Anschauung*)[333].

Przykłady teoriomnogościowe

W kontekście teorii mnogości znajdujemy u Dedekinda kolejne przykłady na spójność i konsekwencję prowadzonych przez niego wywodów. Wraz z przedstawianymi założeniami i celami, które przyjmował i komunikował na początku wprowadzanych teorii, przykłady te stanowią argument za tym, że charakterystyczne dla jego praktyki matematycznej było modelowanie matematycznych problemów przy pomocy narzędzi teoriomnogościowych (tj. obiektów, zależności i metod wchodzących w zakres wprowadzonej przez niego teorii mnogości). Należy zwrócić uwagę na fakt, iż Dedekind, przedstawiając pewne założenia i cele, w trakcie rozwiązywania problemów skupiał się na niezbędnych aspektach obiektów, związanych z konkretnym modelem, ekonomicznie odpowiadającym na konkretne potrzeby matematyczne. Stąd, przyjmując niezbędne podstawy swojej teorii (w przypadku liczb rzeczywistych był to zbiór liczb wymiernych i linia prosta z własnością ciągłości, zaś w przypadku teorii mnogości i arytmetyki liczb naturalnych – przedmioty myślenia, ich zbiory oraz funkcje stanowiące podstawę dla nieskończoności potencjalnej i aktualnej), dalej

[333] Jak zauważa Dadaczyński, dziewiętnastowieczne filozofie matematyki były zawsze w jakimś stopniu odnoszone do kantowskiej myśli, niezależnie, czy ją podtrzymywały, czy odpierały. Kant dzielił sądy (za G.W. Leibnizem oraz empirystami angielskimi) na prawdy rozumu i faktyczne. Prawdy rozumu były sądami analitycznymi, a prawdy faktyczne sądami syntetycznymi. Dalej, sądy syntetyczne mogły być empiryczne (a *posteriori*), oraz nieempiryczne (*a priori*). Sądy *a priori* (syntetyczne) są intuicyjne oraz dyskursywne. Twierdzenia matematyki Kant utożsamił z intuicyjnymi sądami syntetycznymi *a priori,* natomiast w tradycji kontynentalnej i angielskiej zdania matematyki były prawdami rozumu, tj. analitycznymi. Kant uzasadniał to następująco: czas i przestrzeń były dla niego tym, czego dotyczą sądy matematyczne (odpowiednio arytmetyka i geometria). Jednakże nie były one „przedmiotami", a formą zmysłowości. Dodawane do wszystkich wrażeń, tworzą wyobrażenia. Dlatego sądy na nich oparte były aprioryczne, konieczne oraz powszechne. Dodatkowo posiadały swoją treść (czas i przestrzeń), nie mogły być więc zdaniami analitycznymi (tj. logiki). J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki Immanuela Kanta jako punkt odniesienia filozofii matematyki stowarzyszonych z klasycznymi kierunkami badań podstaw matematyki*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne" 32, (1999), 22–36; T. Kupś, *Kant a Newton (z perspektywy opus postumum)*, „IDEA – Studia nad strukturą i rozwojem pojęć filozoficznych. Białystok" XXVII, (2015).

wyprowadzał na ich podstawie wszelkie potrzebne struktury i twierdzenia, budując cały model-strukturę (R i N).

W pracy z 1888 roku, po wprowadzeniu podstawowych, teoriomnogościowych pojęć (rzeczy, które mogą być przedmiotami myślenia – *Dingen*, oraz zbioru tych rzeczy, który można stworzyć, zbierając w umyśle te rzeczy w jedną całość – System), w pierwszym rozdziale swojego dzieła Dedekind opisuje relację między dwoma zbiorami: bycia przez jeden zbiór częścią innego zbioru (współcześnie powiedzielibyśmy o należeniu jednego zbioru do drugiego)[334]. Punkt 4 i 5 paragrafu 1 opisują proste zasady tej relacji: *A 3 A* oraz (*A 3 B* i *B 3 A*) => *A*==*B*[335]. Dowód tych zasad, jak stwierdza, wynika wprost z wcześniejszych punktów (2 oraz 3)[336].

---

[334] Fakt, że system *A* jest częścią systemu *S*, Dedekind zapisuje przy pomocy symbolu „*A 3 S*". Zaznacza, że symbol ten jest tożsamy z następującym: „*S Ɛ A*". Co więcej, Dedekind pisze, że ponieważ z 2 wynika, iż każdy element systemu może być traktowany jako sam w sobie system, można również pisać, że: „*s 3 S*". Por. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 345.

[335] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 345. Obustronne symbole opisywanej relacji w możliwie najbliższy sposób mają odwzorować symbol używany w oryginalnych pracach Dedekinda. .

[336] W punkcie 2 Dedekind rozważa również (oprócz konstrukcji systemów i ich ewentualnej równości) szczegóły „tworzenia" Systemu przez jego elementy (i na odwrót – szczegóły przynależności elementów do systemu). Twierdzi, iż jest całkowicie określone, czy dana rzecz jest elementem danego systemu, czy też nie. W przypisie dodaje, że sprzeciwia się przy tym ograniczeniom, nakładanym przez Kroneckera na „swobodne tworzenie pojęć" („*der freien Begriffsbildung*"), dlatego że szczegółowy plan konstrukcji dla tak ogólnych pojęć jak „zbiór", „elementy", „należenie" czy „tworzenie" nie jest absolutnie konieczny. Te ogólne pojęcia i konstrukcje (struktury) są rządzone ogólnymi prawami, które zachodzą w „każdych okolicznościach" („*unter allen Umständen*"). R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344–345. W tym kontekście możemy porównać definicję zbioru Dedekinda z definicją zbioru Cantora, ponieważ Dedekind jakby broni stanowiska Cantora przed Kroneckerem. Przypomnijmy, że Cantor w pierwszej definicji pisze: „jest wewnętrznie ustalone, czy dowolny przedmiot tej sfery pojęciowej należy do rozmaitości, czy też nie, a także, czy dwa przedmioty w zbiorze, pomimo formalnych różnic w sposobie ich podania, są równe, czy nie", choć: w praktyce nie można dokonać z pewnością i dokładnością odpowiednich rozróżnień*"*. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)...*, *dz. cyt.*, 150. Natomiast w późniejszej definicji pisał, że zbiór to: „dowolne zebranie w całość [Zusammenfassung] M pewnych dobrze zróżnicowanych obiektów m naszej intuicji lub naszego myślenia*"*. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)...*, *dz. cyt.*, 282. Jak widzimy, Dedekind równolegle z podaniem ogólnej definicji zbiorów jest całkowicie pewny, że na poziomie abstrakcyjnym (w teorii) jest to wystarczające do odpowiedniego określenia takiego zbioru (choć znowu Dedekind nie uznaje za konieczne, aby mieć dokładny, szczegółowy przepis na konstruowanie takiego zbioru – nie jest to konieczne dla stwierdzenia skutecznego i funkcjonalnego (użytecznego) jego zaistnienia). Natomiast Cantor przy pierwszej definicji zaznacza istnienie wewnętrznego ustalenia, który element należy do zbioru oraz jak one się mają w stosunku do siebie nawzajem, jednak nie jest pewny tego w praktycznym wymiarze. W przeciwieństwie do Dedekinda, który twierdzi, że zbiory są rządzone prawami ogólnymi w „każdych okolicznościach" („*unter allen Umständen*"). Druga definicja Cantora bardziej w swoim poziomie abstrakcji i formalizmu (czy też po prostu precyzji i ograniczenia do tego, co konieczne) przypomina podejście Dedekindowskie.

Natomiast w punkcie 3 Dedekind określa dokładnie relację zbioru, bycia częścią innego zbioru. O ile uznaje odpowiednią przemienność tej relacji (tj. że: „*A 3 S*" ⇔ „*S Ɛ A*"), to zaznacza, iż drugiego z kolejności zapisu będzie unikał, ze względu na „jasność i prostotę" („werde ich der Deutlichkeit und Einfachheit halber gänzlich vermeiden"). Jednakże czasem dodaje, że może wyrazić tę zależność (teoretycznie niczym nieróżniącą się od zapisu „*A 3 S*", jedynie jak kolejnością) słowami, iż system *S* jest „całością" systemu *A* („daß *S* Ganzes von

Następnie Dedekind wprowadza strukturę systemu, złożonego z innych systemów. Oznacza ją przy pomocy symbolu $\mathfrak{M}$ (*A*, *B*, *C*...)[337]. Wyjaśnia, że każdy element tego „nadsystemu" musi należeć do któregoś z „podsystemów" (tj. do *A*, lub do *B*, lub do *C*…)[338], czyli musi być w relacji „bycia częścią innego zbioru". Kolejne podpunkty stanowią twierdzenia, związane z relacją *bycia częścią* (3)[339].

A ist"). Oznaczało to będzie to samo, a mianowicie, że „wśród elementów *S*, znajdują się wszystkie elementy *A*" („*wodurch also ausgedrückt werden soll, daß unter den Elementen von S sich auch alle Elemente von A befinden*"). R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 345. Teoretycznie treść ta sama, jednak Dedekind zwraca uwagę na odpowiednią dla symbolu i szyku zdania kolejność. W tym kontekście symbol przedstawiający z lewej strony konkretny zbiór w wyjaśnieniu powinien uwzględnić tę kolejność. I tak dla symbolu *A 3 S* wyjaśnienie polega na przedstawieniu, iż wszystkie elementy zbioru *A* należą również do *S*. Natomiast dla symbolu *S Ɛ A* wyjaśnienie przedstawia, iż wśród elementów S znajdują się wszystkie elementy A. To silnie konstrukcjonistyczna cecha, i warto zauważyć, że u Dedekinda ten konstrukcjonizm nie jest bezpośrednio związany z samym konstruowaniem struktur. Dedekind po prostu nie bierze pod uwagę treści matematycznej, której nie da się otrzymać na podstawie „matematycznego przepisu" (tak jak również w przypadku zbioru pustego, o którym wypowiada się niechętnie, z perspektywy jego niekonstruktywności). Jednakże nie uważa on za konieczne przyjmować aż tak szczegółowych i dokładnych „przepisów" konstruowania, jak robi to np. Kronecker. W tym kontekście można mówić o osadzeniu konstrukcjonizmu Dedekinda (choć nie bezpośrednim) w kontekście struktury teorii (jej składowych, funkcjonalności i stosowalności).

[337] Warto w tym miejscu poczynić uwagę, porównującą pomysł analogicznej (podobnej) struktury u Dedekinda i Cantora oraz jej zapis symboliczny. Wyraźnie widać różnicę w formie zapisu, jakiego użyli Cantor i Dedekind. W praktyce matematycznej Dedekinda można zauważyć większą dokładność i prezyzję nie tylko zapisu, ale również całego kontekstu teoretycznego, w jakim ów „nadsystem" może być rozpatrywany. Sama nazwa „nadsystem" jest pewnego rodzaju wyjaśnieniem, że grupowanie pewnej liczby zbiorów (jak Cantor tę operację określał) tworzy pewien „nadzbiór", choć nie o sam „nadzbiór" ma chodzić, a o funkcję na nim określoną, która to „zbiera w całość" wszystkie elementy z każdego zbioru, z zebranych w „nadzbiór". Cantor natomiast na określenie zbioru elementów z wszystkich zgrupowanych zbiorów użył symbolu (*M, N, P*…). Przy czym należy zaznaczyć, iż Cantor wyraźnie podkreślił, że grupowane zbiory muszą być rozłączne, czego Dedekind w swojej strukturze nie wymagał. Ponadto, pomimo że Cantor pod symbolem (*M, N, P*…) napisał, iż chodzi o tutaj o zbiór, powstały przez „zebranie w całość" wszystkich elementów ze wszystkich zgrupowanych zbiorów, nie zaznaczył tego odpowiednio symbolicznie, tak dokładnie przynajmniej, jak zrobił to Dedekind.

Por. „Połączenie [Vereinigung] kilku zbiorów [Mengen] *M, N, P, ...,* które nie mają wspólnych elementów, w jeden, oznaczamy przez:

(M, N, P, ...).

Elementy tego zbioru są odpowiednio elementami zbiorów *M, N, P itd.,* zebranymi w całość*".* G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)..., dz. cyt.*, 282.

[338] Ów system złożony z systemów przypomina bardziej strukturę mereologiczną niż sumę zbiorów czy „zbiór zbiorów". Elementem np. sumy zbiorów rozłącznych jest element, który należy tylko do jednego z tych zbiorów – tj. do pierwszego lub drugiego lub trzeciego itd. Tu elementami są zbiory, pozostające w ścisłej relacji („bycia częścią") ze sobą. Por. „Unter dem aus irgendwelchen Systemen *A,B,C...* zusammengesetzten System, welches mit *$\mathfrak{M}$(A,B,C...)* bezeichnet werden soll, wird dasjenige System verstanden, dessen Elemente durch folgende Vorschrift bestimmt werden: ein Ding gilt dann und nur dann als Element von *$\mathfrak{M}$(A,B,C...),* wenn es Element von irgendeinem der Systeme *A,B,C...* d. h. Element von *A* oder *B* oder *C* . . . ist. Wir lassen auch den Fall zu, daß nur ein einziges System A vorliegt; dann ist offenbar *$\mathfrak{M}$(A)=A.* Wir bemerken ferner, daß das aus *A,B,C...* zusammengesetzte System *$\mathfrak{M}$(A,B,C...)* wohl zu unterscheiden ist von demjenigen System, dessen Elemente die Systeme *A,B,C...* selbst sind*".* R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 346.

[339] Takie jak: (9) systemy *A, B, C*… są częściami $\mathfrak{M}$ *(A, B, C...);* (10) jeśli *A, B, C*… są częściami ***S*** to $\mathfrak{M}$ *(A, B, C...) 3* ***S***; (11) jeśli *P* jest częścią jednego z systemów *A, B, C*… to *P 3* $\mathfrak{M}$ *(A, B, C...)*; (12) jeśli każdy z

Ostatnie trzy punkty pierwszego rozdziału dotyczą pojęć: wspólnego elementu *g*, wspólnej części *T* oraz największej wspólnej części (*Gemeinheit*) danych systemów[340]. Symboliczny zapis tego ostatniego pojęcia dla systemów *A*, *B*, *C*... wygląda następująco: $\mathfrak{G}$(*A*, *B*, *C*...) i oznacza system składający się ze wszystkich wspólnych elementów systemów *A*, *B*, *C*…, a więc (największą) wspólną część tychże systemów (tj. systemów *A*, *B*, *C*…)[341].

Na koniec podpunktu 21 w rozdziale 2 Dedekind ustala, że litery ze znakiem (*s'*, *T'*) będą oznaczały odwzorowania (odpowiednio: elementu *s* oraz systemu *T*)[342]. Następne punkty drugiego rozdziału (paragrafu) to twierdzenia:

(22) *A 3 B => A' 3 B'*;

(23) obraz *($\mathfrak{M}$ (A*, *B*, *C...))' to $\mathfrak{M}$ (A'*, *B'*, *C'...);*

(24) obraz każdej części wspólnej *A*, *B*, *C*..., a więc również obraz największej wspólnej części (*Gemeinheit*) *$\mathfrak{G}$ (A*, *B*, *C...)*[343] jest częścią *$\mathfrak{G}$ (A'*, *B'*, *C'...)*[344].

Dalej, w rozdziale 3, opisane są: podobieństwo (*Ähnlichkeit*) przekształceń oraz podobne (*Ähnliche*) systemy. Odwzorowanie *φ* (z *S*) jest podobne (*änliche* lub *deutlich*), jeśli dwa różne elementy z systemu *S: a*, *b* odpowiadają co do zasady (tj. zawsze) dwóm różnym

---

systemów *P, Q…* jest częścią jednego z systemów *A, B, C…* to *$\mathfrak{M}$ (P, Q...) 3 $\mathfrak{M}$ (A, B, C...);* (13) jeśli *A* składa się z dowolnego z systemów *P, Q…* to *A 3 $\mathfrak{M}$ (A, B, C...);* (14) jeśli każdy sytem *A, B, C…* składa się z dowolnego z systemów *P, Q…* to *$\mathfrak{M}$ (A, B, C...) 3 $\mathfrak{M}$ (P, Q...);* (15) jeśli każdy z systemów *P, Q…* jest częścią jednego z systemów *A, B, C…* a każdy z tych ostatnich składa się z dowolnego z tych pierwszych to *$\mathfrak{M}$ (A, B, C...) == $\mathfrak{M}$ (P, Q...);* (16) jeśli *A= $\mathfrak{M}$ (P, Q)* oraz *B= $\mathfrak{M}$ (Q, R)* to *$\mathfrak{M}$ (A, R) == $\mathfrak{M}$ (B, P)* . Powyższe twierdzenia przeważnie wynikają z poprzednich. Por. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 346–347.

[340] Chodzi o następujące twierdzenia: (18) każda część wpólna *A, B, C…* jest częścią *$\mathfrak{G}$ (A, B, C...);* (19) każda część *$\mathfrak{G}$ (A, B, C...)* jest częścią wspólną *A, B, C…*; (20) jeśli każdy z systemów jest całością jednego z systemów *P, Q…* to *$\mathfrak{G}$ (P, Q...) 3 $\mathfrak{G}$ (A, B, C...).* Jeśli chodzi o relację bycia całością, Dedekind opisuje to zasadą: *S* jest całością *A*, jeśli wśród elementów z *S* są również wszystkie elementy z *A*. Por: „Wortes bisweilen sagen, daß *S* Ganzes von *A* ist, wodurch also ausgedrückt werden soll, daß unter den Elementen von *S* sich auch alle Elemente von *A* befinden". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 345.

[341] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 348. Przy czym elementem wspólnym systemów *A, B, C…* nazywamy rzecz g, która jest zawarta w każdym z tych systemów, natomiast część wspólna systemów *A, B, C…* oznacza system T, który jest częścią każdego z tych systemów. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 348.

[342] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 349.

[343] Symbolicznie, podążając za wskazówkami Dedekinda, możemy zapisać obraz największej wspólnej części (*Gemeinheit*) następująco: (*$\mathfrak{G}$(A, B, C...)*)'.

[344] Wszystkie trzy stwierdzenia pochodzą z: R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 349–350.

obrazom: $\varphi(a)$ oraz $\varphi(b)$[345]. Należy wyjaśnić, że własność, o której Dedekind tutaj pisze, to nic innego, jak różnowartościowość funkcji (iniekcja)[346]. Dalej dodaje, że jeśli zachodzi: $(s' \neq t' \Rightarrow s \neq t)$, wówczas każdy element systemu *S'* jest obrazem jednego, konkretnego elementu systemu *S*[347]. Odwzorowanie φ posiada więc w takiej sytuacji odwzorowanie odwrotne, $\bar{\varphi}$. Odwzorowanie $\bar{\varphi}$ polega na przyporządkowaniu każdemu elementowi *s'* z systemu *S'* jego obrazu oznaczonego symbolicznie $\bar{\varphi}(s')=s$. W dodatku Dedekind zaznacza, iż każdy element *s'* (z systemu *S'*) odpowiada obrazowi $\varphi(s')$ (równemu s) i jest do niego również podobny[348]. Jednocześnie przekształcenie tożsamościowe (*identische Abbildung*) systemu *S* można zapisać jako odwzorowanie skomponowane z φ oraz $\bar{\varphi}$, czyli ($\varphi\bar{\varphi}$).

Dedekind również zamieszcza kilka twierdzeń. Punkty 27, 28 są intuicyjnie dosyć oczywiste, zawierają bowiem implikacje: (27) $A' \mathcal{E} B' \Rightarrow A \mathcal{E} B$; (28) $A'==B' \Rightarrow A==B$[349]. W punkcie 29 Dedekind pisze, że jeśli $G = \mathfrak{G}(A, B, C\ldots)$, to $G'=\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$[350]. Tutaj w dowodzie korzysta z faktu, że każdy element $\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$, tj. *s'* jest zawarty w *S'*. Element *s'* to obraz elementu *s* należącego do *S*, więc element *g'*, jako obraz elementu *g* z *S* również należy do *S'*. Dodatkowo stwierdzenie, że *g'* jest elementem wspólnym systemów *A'*, *B'*, *C'*…, pociąga za sobą stwierdzenie, że *g* jest elementem wspólnym systemów *A*, *B*, *C*… . Czyli każdy element z $\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$ jest obrazem elementu *g* z *G*. Innymi słowy: $\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$ 3 G'. Następnie Dedekind przedstawia twierdzenie bez dowodu, które mówi, że przekształcenie

[345] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 351.

[346] Iniekcja jest to funkcja różnowartościowa, tzn. że: dla $f{:}X \to Y$, jeśli $y_1=f(x_1)=f(x_2)=y_2$ to $x_1=x_2$.

[347] Por. „so ist jedes Element des Systems $S' == \varphi(S)$ das Bild s' von einem einzigen, vollständig bestimmten Elemente s des Systems *S*". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 351.

[348] Por. „daß jedem Elemente *s'* von *S'* das Bild $\varphi(s') ==$ s entspricht und offenbar ebenfalls ähnlich ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 351.

[349] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 351. W przypadku punktu 27, Dedekind korzysta w dowodzie z przejścia: jeśli $a \in A \Rightarrow a' \in A' \Rightarrow a' \in B' \Rightarrow \exists b' \in B'$: $a'=b'$; oraz z implikacji: $a'=b' \Rightarrow a=b$.

[350] Por. „mithin ist jedes Element von $\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$ Bild eines Elementes *g* von *G*, also Element von *G'*, d. h. es ist $\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$ 3 G', und hieraus folgt unser Satz mit Rücksicht auf 24, 5". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 351.

tożsamościowe (*identische Abbildung*) jest zawsze przekształceniem podobnym (*ähnliche Abbildung*)[351].

Twierdzenie w punkcie 31 dotyczy tego, że złożenie dwóch podobnych przekształceń φ z S oraz ϕ z $\varphi(S)$ jest również podobne *(ähnliche)* oraz odwzorowanie odwrotne do złożonego jest równe $\overline{\phi\varphi} == \bar{\varphi}\bar{\phi}$. Wprawdzie Dedekind nie tłumaczy, skąd się bierze to równanie, ma ono sens na poziomie symboliki wykonywanych operacji, obowiązującej kolejności reguł. Odwrotność złożonego odwzorowania $\phi\varphi$ oznacza wykonanie dwóch, odwrotnych operacji, w odwrotnej kolejności, tj. najpierw $\bar{\phi}$, a następnie $\bar{\varphi}$.

Punkt 32 zawiera ściślejszą niż na początku rozdziału definicję systemów podobnych. Dedekind uzależnia w tym miejscu owo podobieństwo systemów A, B od istnienia odwzorowania φ takiego, że: $\varphi(A) = B$ oraz $\bar{\varphi}(B) = A$[352]. W punkcie 33 stwierdzona jest przechodniość relacji podobieństwa systemów[353]. Następnie Dedekind wprowadza pojęcie *klasy* systemów, stwierdzając, że wszystkie systemy można podzielić na klasy, do określonej klasy włączając tylko te systemy, które są podobne (*ähnlich*) do jednego, reprezentatywnego dla tej klasy[354]. Zgodnie natomiast z punktem 33, systemy w tej samej klasie są podobne do siebie nawzajem[355].

Natomiast jeśli dwa systemy S i R są podobne, to dla każdej części systemu S, istnieje taka część R, że są one do siebie podobne; ponadto dla każdej części właściwej S istnieje również część właściwa R, że również są one do siebie podobne[356].

[351] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 351.

[352] Przy czym Dedekind zaznacza, że w ramach twierdzenia w punkcie 30, jest oczywiste, iż każdy system jest zawsze podobny do siebie samego. A to dzięki przekształceniu tożsamościowemu. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352.

[353] Oczywiście Dedekind nie używa sformalizowanej wersji definicji przechodniości, jednak wystarczająco jasno opisuje ją słownie. Por. „Sind *R, S* ähnliche Systeme, so ist jedes mit *R* ähnliche System *Q* auch mit *S* ähnlich". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352.

[354] Por. „indem man in eine bestimmte Klasse alle und nur die Systeme *Q, R, S* ... aufnimmt, welche einem bestimmten System *R,* dem Repräsentanten der Klasse, ähnlich sind". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352.

[355] Por. „nach dem vorher-gehenden Satze 33 ändert sich die Klasse nicht, wenn irgendein anderes ihr angehöriges System *S* als Repräsentant gewählt wird". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352.

[356] Por. „Sind R, S ähnliche Systeme, so ist jeder Teil von *S* auch einem Teile von *R*, jeder echte Teil von *S* auch einem echten Teile von *R* ähnlich". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352. Dowód tego twierdzenia brzmi następująco: „Denn wenn φ eine ähnliche Abbildung von *S,* $\varphi(S)$== *R,* und *T 3 S* ist, so ist nach 22 das mit *T* ähnliche System $\varphi(T)$ *3 R;* ist ferner T echter Teil von *S,* und *s* ein nicht in *T* enthaltenes

Rozdział 4 poświęcony jest odwzorowaniu φ systemu S w samego siebie[357]. Formalny zapis tej definicji zawiera się w warunku: $\varphi(S)\ 3\ S$[358]. I tak, w kontekście odwzorowania φ przekształcającego ten system w siebie samego, dany system S jest nazywany *łańcuchem* (*Kette*)[359]. W punktach 38-43 jest przedstawionych 6 twierdzeń związanych z pojęciem łańcucha. Od najprostszych, pozostawionych przez Dedekinda bez żadnego dowodu czy też wyjaśnienia[360], po bardziej skomplikowane, nawiązujące do pojęć systemu złożonego z innych systemów czy największą wspólną część (*Gemeinheit*)[361].

Od punktu 44 paragrafu 4 Dedekind wprowadza i rozważa pojęcie największej wspólnej części (*Gemeinheit*) wszystkich łańcuchów, których pewien system A jest częścią[362]. Warto zauważyć, że Dedekind wprowadza to pojęcie, założywszy najpierw istnienie ogólnego systemu S oraz jego pewnej części A. W związku z tym istnienie A_0, tj. owego *Gemeinheit* zbiorów, których A jest częścią, jest zapewnione przez istnienie A[363].

I tak, Dedekind w punktach 45-47 wymienia twierdzenia, związane z pojęciem nie tyle łańcucha, co największą wspólną część (*Gemeinheit*) pewnych łańcuchów[364]. Twierdzenia te

---

Element von *S,* so kann das in *R* enthaltene Element $\varphi(s)$ nach 27 nicht in $\varphi(T)$ enthalten sein; mithin ist $\varphi(T)$ echter Teil von *R,* w. z. b. w*"*. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352.

[357] „Abbildung eines Systems in sich selbst". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 352.

[358] W tym kontekście, jak Dedekind pisze dalej, $s'=\varphi(s)$ jest elementem systemu *S*, a $T'=\varphi(T)$ jest częścią systemu S. Por. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 353.

[359] Kontekst odwzorowania jest istotny, ponieważ, jak pisze Dedekind: „Wir bemerken ausdrücklich, daß dieser Name dem Teile *K* des Systems *S* nicht etwa an sich zukommt, sondern nur in Beziehung auf die bestimmte Abbildung cp erteilt wird; in bezug auf eine andere Abbildung des Systems *S* in sich selbst kann *K* sehr wohl keine Kette sein". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 353.

[360] Jak twierdzenie 38: „S jest łańcuchem". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 353. Tutaj Dedekind zapewne traktuje jako oczywisty fakt, że dla każdego systemu może istnieć takie odwzorowanie, w kontekście którego system ten będzie łańcuchem.

[361] Twierdzenia w punktach 42 i 43 dotyczą tego, że jeśli systemy *A, B, C*... są łańcuchami, to zarówno $\mathfrak{M}(A, B, C...)$, jak i $\mathfrak{G}(A, B, C...)$ również są łańcuchami. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 353.

[362] Por. „Ist *A* irgendein Teil von *S,* so wollen wir mit A_0 die Gemeinheit aller derjenigen Ketten (z. B. S) bezeichnen, von welchen *A* Teil ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 354.

[363] Por. „diese Gemeinheit A_0 existiert (vgl. 17), weil ja *A* selbst Gemeinteil aller dieser Ketten ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1939, s. 10. Dodatkowo, A_0 samo również jest łańcuchem. Por. *„Da ferner A_0 nach 43 eine Kette ist"*. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 354.

[364] Chodzi w dalszym ciągu o łańcuchy, których częścią jest pewien system *A*. *Gemeinheit* tych łańcuchów oznaczamy symbolem A_0.

brzmią: (45) $A\ 3\ A0$; (46) $(A0)'\ 3\ A0$; oraz (47) $A\ 3\ K \Rightarrow A_0\ 3\ K$, gdzie K-łańcuch[365]. Następnie Dedekind stwierdza, że w zasadzie powyższe twierdzenia wystarczająco charakteryzują A_0[366]. Co to oznacza? Otóż uczony korzysta z tych twierdzeń w trakcie udowadniania kolejnych[367]. W każdym kolejnym twierdzeniu wykorzystuje w dowodzie, wtedy gdy jest to możliwe lub wskazane, jedno bądź więcej poprzednich twierdzeń[368]. Jest to, co prawda, właściwość samej metody matematycznej, jednak w przypadku Dedekinda jest ona używana w sposób niezwykle precyzyjny i klarowny. Na to należy zwrócić uwagę i podkreślić ze względu na okres, w jakim Dedekind miał okazję swoją metodę zaprezentować (XIX wiek obfitował jeszcze w ślady intuicyjnego wspierania się przy uprawianiu matematyki)[369]. Przy pomocy pojęcia „łańcucha z systemu", dochodzimy do twierdzenia o indukcji zupełnej. Twierdzenie to będzie omówione w dalszej części pracy, więc przedstawimy tutaj trzy wersje, jakie podaje Dedekind. Najpierw pisze, że:

> „59. Aby udowodnić, że łańcuch A_0 jest częścią jakiegoś systemu Σ – niezależnie od tego, czy ten ostatni jest częścią systemu S, czy nie – wystarczy pokazać:
>
> 1. $A\ 3\ \Sigma$,
>
> 2. obraz każdego wspólnego elementu A_0 i Σ jest również elementem Σ"[370].

[365] Por. „45. Satz. Es ist $A\ 3\ A_0$. [...] 46. Satz. Es ist $(A_0)'\ 3\ A_0$. [...] 47. Satz. Ist A Teil einer Kette K, so ist auch $A_0\ 3\ K$". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 354.

[366] „Man überzeugt sich leicht, daß der in 44 erklärte Begriff der Kette A_0 durch die vorstehenden Sätze 45, 46, 47 vollständig charakterisiert ist". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 354.

[367] Twierdzenia te są następujące: (49) $A'\ 3\ (A_0)'$; (50) $A'\ 3\ A_0$; (51) jeśli A jest łańcuchem to: $A_0 == A$; (52) jeśli $B\ 3\ A$ to $B\ 3\ A_0$; (53) jeśli $B\ 3\ A_0$ to $B_0\ 3\ A_0$; (54) jeśli $B\ 3\ A$ to $B_0\ 3\ A_0$; (55) jeśli $B\ 3\ A_0$ to $B'\ 3\ A_0$; (56) jeśli $B\ 3\ A0$ to $(B_0)'\ 3\ (A_0)'$; (57) $(A_0)' == (A')_0$, lub inaczej: $\varphi(\varphi_0(A)) == \varphi_0(\varphi(A))$; (58) $A_0 == \mathfrak{M}(A, A_0')$, słownie: łańcuch z A składa się z A oraz z łańcucha-obrazu *(Bildkette)* z *A*. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 354–355.

[368] Mimo że dla większości filozofów klasyczne ujęcie uprawiania matematyki sprowadza się właśnie do wyprowadzania kolejnych zdań z wcześniej przyjętych pojęć pierwotnych i aksjomatów (połączonych ze sobą związkami logicznymi, będących swego rodzaju wnioskowaniem), to należy zwrócić uwagę na niezwykłą jasność i precyzję wywodów Dedekinda. Nie ma u niego miejsca ani na „zbyt wiele" (zwłaszcza niepotrzebnych) treści, ani na treści niejednoznaczne – treść przedstawiona przez niego jest zarówno konieczna, jak i wystarczająca dla modelów matematyki, jakich on używa, w ramach których pracuje czy też które tworzy.

[369] Wtedy dopiero wdrażano formalizację i arytmetyzację matematyki i „oczyszczano" ją z intuicji np. geometrycznych.

[370] Por. „59. Satz der vollständigen Induktion. Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Teil irgendeines Systems Σ ist – magletzteres Teil von S sein oder nicht – genügt es zu zeigen,

ϱ. daß $A\ 3\ \Sigma$, und

Następnie Dedekind przedstawia drugą wersję twierdzenia o indukcji zupełnej, która – jak zaznacza – jest równoważna z pierwszą, pod warunkiem, że system Σ wyznacza rzeczy, które mają własność $\mathfrak{E}$ (lub do których odnosi się zdanie $\mathfrak{S}$)[371]*:*

„60. [...] Aby udowodnić, że wszystkie elementy łańcucha A_0 mają pewną własność $\mathfrak{E}$ (lub że zdanie $\mathfrak{S}$, w którym wspomniana jest nieokreślona rzecz n, jest rzeczywiście prawdziwe dla wszystkich elementów n łańcucha A_0), wystarczy wykazać, że:

ϱ. wszystkie elementy a systemu A mają własność $\mathfrak{E}$ (lub $\mathfrak{S}$ zachowuje ją dla wszystkich a) i

σ. obraz n' każdego elementu n z A_0, takiego który ma własność $\mathfrak{E}$, ma tę samą własność $\mathfrak{E}$ (lub że zdanie $\mathfrak{S}$, jeśli odnosi się do elementu n z A_0, z całą pewnością musi odnosić się również do jego obrazu n')”[372].

Dodatkowo, w kontekście wprowadzenia modelu liczb naturalnych, Dedekind przedstawia trzecią wersję twierdzenia o indukcji zupełnej. Wprost pisze, iż wynika ono z poprzednich, bardziej ogólnych wersji:

„80. Twierdzenie o indukcji zupełnej (wnioskowanie od n do n'). Aby pokazać, że twierdzenie obowiązuje dla wszystkich liczb n łańcucha m_0, wystarczy wykazać,

ρ. że obowiązuje dla $n = m$, oraz

σ. że z ważności twierdzenia dla liczby n łańcucha m_0 wynika zawsze jego ważność dla kolejnej liczby n'”[373].

σ. daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ebenfalls Element von Σ ist”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 355–356.

[371] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 356.

[372] Por. „Um zu beweisen, daß alle Elemente der Kette A_0 eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß ein Satz $\mathfrak{S}$, in welchem von einem unbestimmten Dinge n die Rede ist, wirklich für alle Elemente n der Kette A_0 gilt), genügt es zu zeigen,

ϱ. daß alle Elemente a des Systems A die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß $\mathfrak{S}$ für alle a gilt), und

σ. daß dem Bilde n' jedes solchen Elementes n von A_0, welches die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, dieselbe Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt (oder daß der Satz $\mathfrak{S}$, sobald er für ein Element n von A_0 gilt, gewiß auch für dessen Bild n' gelten muß)*”.* R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 356.

[373] Por. „80. Satz der vollständigen Induktion (Schluβ von n auf n'*).* Um zu beweisen, daβ ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_0 gilt, genügt es zu zeigen,

ρ. daβ er für $n = m$ gilt, und

Wracając do głównego wątku niniejszego podrozdziału: rozdział 4 pracy Dedekinda z 1888 roku kończy się trzema twierdzeniami. Pierwsze z nich brzmi: łańcuch z $\mathfrak{M}(A, B, C...)$ to $\mathfrak{M}(A_0, B_0, C_0...)$[374], drugie: łańcuch z $\mathfrak{G}(A, B, C...)$ jest częścią $\mathfrak{G}(A_0, B_0, C_0...)$[375]. Trzecie twierdzenie jest dosyć rozbudowane i – co więcej – Dedekind pozostawia czytelnikowi jego dowód[376]. Twierdzenie to brzmi następująco:

> „Jeśli *K' 3 L 3 K*, to jeśli *K* jest łańcuchem, to *L* również jest łańcuchem. Samo [*L* – przyp. K.T.] jest właściwą częścią *K*, *U* jest systemem złożonym z wszystkich elementów *K*, które nie są zawarte w *L*, ponadto łańcuch U_0 jest właściwą częścią *K*, natomiast *V* jest układem wszystkich tych elementów *K*, które nie są zawarte w U_0, a więc $K = \mathfrak{M}(U_0,V)$ i $L = \mathfrak{M}(U_0',V)$. Jeśli *L=K'* jest skończone to *V 3 V'* ”[377].

Powyższe analizy pokazują, że Dedekind nie tylko wyprowadził swoją teorię mnogości w sposób spójny z założeniami. Zrobił to, opierając się konsekwentnie jedynie na kilku podstawowych, przyjętych na początku pierwotnych obiektach i relacjach. Innymi słowy, zbudował wszelkie potrzebne teoriomnogościowe struktury z kilku bardzo prostych elementów. Z pozoru mamy tu do czynienia z podobnym jak u Cantora dedukcyjnym, szczegółowym wyprowadzaniem kolejnych pojęć z już istniejących (zdefiniowanych). Jednakże należy zauważyć, iż w perspektywie tego wyprowadzania pojęć, Dedekind tworzy bezpośrednio model liczbowy *N*, w którym zostają uchwycone aspekty kojarzone z *N* dotąd w

---

σ. daβ aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl *n* der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl *n'* folgt.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem allgemeineren Satze 59 oder 60. Am häufigsten wird der Fall auftreten, wo $m = 1$, also m_0 die volle Zahlenreihe *N* ist".

R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 361.

[374] Por. „Die Kette von $\mathfrak{M}(A, B, C...)$ ist $\mathfrak{M}(A_0, B_0, C_0)$". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 356.

[375] Por. „Die Kette von $\mathfrak{G}(A, B, C...)$ ist Teil von $\mathfrak{G}(A_0, B_0, C_0...)$". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357.

[376] Por. „Der Beweis dieses Satzes, von dem wir (wie von den beiden vorhergehenden) keinen Gebrauch machen werden, möge dem Leser überlassen bleiben". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357.

[377] Por. „Ist dieselbe echter Teil von *K,* und *U* das System aller derjenigen Elemente von *K,* die nicht in *L* enthalten sind, ist ferner die Kette U_0 echter Teil von *K,* und *V* das System aller derjenigen Elemente von *K,* die nicht in U_0 enthalten sind, so ist $K=\mathfrak{M}(U_0, V)$ und $L=\mathfrak{M}(U_0', V)$. Ist endlich *L = K',* so ist *V<V'* ". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357.

sposób intuicyjny – element pierwszy, możliwość powiększania zbioru liczb w nieskończoność o jeden (funkcja następnika), a także możliwość ujęcia zbioru *N* w całość.

Chociaż w samej teorii mnogości nie mamy bezpośrednio do czynienia z modelowaniem, a jedynie z tworzeniem narzędzi do modelowania, należy zwrócić uwagę na to, że owe narzędzia posłużyły do stworzenia teoriomnogościowego modelu zbioru prosto nieskończonego, przez który Dedekind opisał i wyraził zbiór liczb naturalnych i jego arytmetykę.

Istotny jest tu również fakt, iż dla Dedekinda zasadniczym pojęciem (dość abstrakcyjnym) w jego teorii mnogości jest pojęcie łańcucha (*Kette*). Odgrywa ono też fundamentalną rolę w opisie i uzasadnianiu pojęć i twierdzeń teorii (a także w modelu arytmetyki liczb naturalnych). Pokazuje to, że opracowanie teorii mnogości było precyzyjne i kompletne, właśnie dzięki osiągniętemu w nim poziomowi abstrakcji. W tym kontekście, można nawet mówić o epistemologiczno-metodologicznym aspekcie stylu Dedekinda[378], jako o pewnym aspekcie jego precyzyjnej i strukturalistycznej abstrakcji. Styl ten wyrażał się w budowaniu i posługiwaniu się abstrakcyjnymi, intencjonalnie opracowywanymi, kompletnymi (niezawierającymi niepotrzebnych elementów) modelami matematycznymi.

Oprócz tendencji do modelowania matematycznych kwestii (tj. do tworzenia ich teoriomnogościowych modeli), znajdujemy u Dedekinda w jego podstawach matematyki wiele struktur: począwszy od nazwy „systemu" zamiast określenia „zbioru", poprzez strukturalistyczny sposób traktowania zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb rzeczywistych (jako strukturę złożoną ze zbioru, oraz nieodłącznie z określonych na nim działań oraz relacji porządku – we współczesnej matematyce chodziłoby o ciała algebraiczne), rozpatrywanie elementów zbioru w kontekście tego, co można o nich pomyśleć, różne skomplikowane elementy jego teorii zbiorów jak największa wspólna część (*Gemeinheit*) czy łańcuch, a także sama struktura zbioru prosto nieskończonego.

„System" zamiast zbioru

Już na tle samego nazewnictwa, które stosował Dedekind, widoczne jest jego strukturalistyczne podejście. Nie używa on określenia „zbiór", a „system". System jest

[378] Można w tym miejscu się powołać np. na: J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions…*, *dz. cyt.*; E.H. Reck, G. Schiemer (red.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, New York 2020.

pojęciem bardziej zbliżonym do pojęcia struktury niż zbiór. Określa bowiem raczej sposób funkcjonowania pewnego zbioru niż samo jego istnienie.

Tutaj, wobec dyskusji między strukturalizmem oraz konstrukcjonizmem u Dedekinda, można zauważyć, że już sam pojedynczy element jest pewnego rodzaju strukturą, bowiem jest ściśle związany ze wszystkim, „co można o nim pomyśleć lub powiedzieć". Można nawet się zastanawiać, czy dla Dedekinda sama rzecz (pojedynczy element) nie jest zbiorem wszystkiego, „co można o niej pomyśleć lub powiedzieć" (tj. zbiorem swoich właściwości). Lecz wziąwszy pod uwagę to, że Dedekind pisze na samym początku wyraźnie o „rzeczy", a dopiero potem o tym, co można o niej pomyśleć lub powiedzieć (mimo że rzecz też jest dla niego wszystkim tym, co może być obiektem myśli), przyjmujemy, że „rzecz" nie była jedynie zbiorem swoich własności.

Strukturalistyczne aspekty zbiorów liczbowych w ujęciu Dedekinda

Zbiór liczb wymiernych

Podobnie jak Cantor, Dedekind posłużył się na początku konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych, liczbami wymiernymi. Cantor przyjmował arbitralnie istnienie liczb wymiernych jako pewnych oczywistych bytów matematycznych. Natomiast Dedekind traktował je jako elementy pewnego zbioru, w którym operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia są wewnętrzne, dodawanie i mnożenie są przemienne oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:

> „System ten, który oznaczać będę przez *R*, charakteryzuje się przede wszystkim pewną zupełnością i zamkniętością [...], które polegają na tym, że cztery podstawowe operacje są zawsze wykonalne na dwu indywiduach z *R*, tzn. wynik jest zawsze pewnym określonym indywiduum z R, jeśli tylko wykluczyć jedyny przypadek dzielenia przez zero" [379].

Należy zwrócić w tym miejscu uwagę na jeden istotny fakt. W takim określeniu liczb wymiernych (symbol zwykłe *R* określał liczby wiemierne, natomiast liczbom rzeczywistym u Dedekinda był przypisany symbol $\mathfrak{R}$), kryje się nie tyle algebraiczne podejście, co ogólniej

[379] Por. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 315; R. Dedekind, *Ciągłość i liczby niewymierne*, w: R. Murawski, *Antologia tekstów klasycznych*, tłum. R. Murawski, Poznań 1994, 136. Istotnym faktem jest to, że Dedekind prawdopodobnie pierwszy uznał wewnętrzność działań za cechę charakteryzującą ciało liczbowe. Por. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 21.

strukturalistyczne. Algebra jako taka bada struktury, w powyższym cytacie mamy do czynienia z algebraicznym opisem ciała liczb wymiernych[380]. Obecnie wiadomo, iż zbiór liczb rzeczywistych, z dodawaniem i mnożeniem jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły. W powyższym cytacie Dedekind nie wymienia wszystkich warunków ciała, natomiast *implicite* przyjmuje łączność obu działań oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Istotą porządku zbioru liczb wymiernych według Dedekinda było to, co następuje: „Różność dwóch liczb wymiernych objawia się w tym, że różnica $a-b$ ma albo wartość dodatnią, albo ujemną"[381].

Jak widać, porządek w zbiorze liczb rzeczywistych łączy się u Dedekinda ściśle z określonymi na tym zbiorze działaniami. W związku z tym, strukturalistyczne podejście, spowodowało że matematyk z Brunszwiku przyjął na początku istnienie całej struktury matematycznej wraz z operacjami, które ją charakteryzują – zbiór liczb wymiernych wraz z określonym porządkiem oraz działaniami[382].

---

[380] Ciało (K,+,·,0,1) to struktura spełniająca następujące warunki:

- zbiór K zawiera przynajmniej dwa elementy: 0 oraz 1,
- na zbiorze K istnieją dwa działania + oraz ·, spełniające określone warunki:
  - $\forall a,b,c \in K: a+(b+c)=(a+b)+c$,
  - $\forall a \in K: a+0=a$ (zero jest elementem neutralnym względem dodawania),
  - $\forall a \in K \exists b \in K: a+b=0$ (dla każdego elementu z K istnieje element odwrotny względem dodawania),
  - $\forall a,b \in K: a+b=b+a$ (przemienność dodawania),
  - $\forall a,b,c \in K: a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$,
  - $\forall a \in K: a\cdot 1=a$ (jedynka jest elementem neutralnym względem mnożenia),
  - $\forall a,b,c \in K: a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania),
  - $\forall a,b \in K: a\cdot b=b\cdot a$ (przemienność mnożenia),
  - $\forall a \in K\setminus\{0\} \exists b \in K: a\cdot b=1$ (dla każdego niezerowego elementu z K istnieje element odwrotny względem mnożenia).

[381] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 316; R. Dedekind, *Ciągłość i liczby niewymierne*..., *dz. cyt.*, 138.

[382] Błaszczyk zastanawia się nad brakiem opisu własności liniowości porządku u Dedekinda, tj. jego zgodności z działaniami. Można przyjąć, iż brak potrzeby opisu tej własności przez Dedekinda może być interpretowany jako pewien argument za teorią matematyki ucieleśnionej, czy też po prostu za – ponownie – strukturalistycznym podejściem matematyka z Bruszhwiku. Dlatego, że nieujęcie przez Dedekinda pewnej ogólnej własności w teorii (co nie było równoznaczne z jej niespełnieniem przez tę teorię), mogło wynikać z tego, że w procesie abstrahowania i formalizowania pewnych aspektów intuicji po prostu o tej własności zapomniał. Mogła być ona w zbyt oczywisty sposób związana z intuicją o strukturze, którą zamierzał formalnie opisać i uporządkować. Mogłoby więc to ostatecznie oznaczać, że matematyka, mimo iż tylko jej początki sięgają bardzo praktycznych aspektów życia i obserwacji świata zewnętrznego (por. K. Devlin, *Myślenie matematyczne. Twój*

Trzy główne prawa charakteryzujące liczby wymierne według Dedekinda to:

„**I**. Jeśli $a > b$ *i* $b > c$, to $a > c$. Ilekroć a, c są dwiema różnymi (lub nierównymi) liczbami oraz b jest większa od jednej i mniejsza od drugiej, powinniśmy bez wahania z powodu sugestii geometrycznych idei wyrazić to krótko, mówiąc: *b* leży między liczbami *a*, *c*.
II. Jeśli *a*, *c* są dwiema różnymi liczbami, istnieje nieskończenie wiele różnych liczb leżących między *a*, *c*.
III. Jeśli *a* jest dowolną określoną liczbą, wówczas wszystkie liczby zbioru *R* [liczb wymiernych – przyp. K.T.][383] dzielą się na dwie klasy, A_1 i A_2, z których każda zawiera nieskończenie wiele elementów; pierwsza klasa A_1 obejmuje wszystkie liczby a_1, które są $<a$, druga klasa A_2 obejmuje wszystkie liczby a_2, które są $> a$; liczba *a* może być w dowolności przypisany pierwszej lub drugiej klasie, będąc odpowiednio największą liczbą pierwszej klasy lub najmniejszą z drugiej. W każdym przypadku rozdzielenie układu *R* na dwie klasy A_1, A_2 jest takie, że każda liczba pierwszej klasy A_1 jest mniejsza niż każda liczba drugiej klasy A_2"[384].

Pierwszą własnością opisaną przez Dedekinda jest własność porządku zbioru liczb wymiernych – wskazuje on na przechodniość tej relacji. Druga własność dotyczy gęstości tego porządku (gęstości zbioru liczb wymiernych). Trzecia natomiast to wstępny opis przekroju zbioru liczb wymiernych. Dedekind już tutaj przedstawia koncepcję przekroju, dzieląc jeden zbiór na dwa rozłączne, mające tę właściwość, że każda liczba jednego zbioru jest mniejsza niż każda liczba drugiego zbioru. To dość istotne, ponieważ uczony przedstawia tym samym bazę

---

nowy sposób pojmowania świata, tłum. T. Walczak, Gliwice 2019.), współcześnie, pomimo swojego zaawansowanego poziomu abstrakcji, na jakim jest rozwijana, również jest związana z komunikacją międzyludzką czy intuicją a także nieodłącznym od nich pewnym oglądem świata zewnętrznego (B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny*, Kraków 2014; G. Lakoff, R.E. Núñez, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York 2000.). Więcej o tym w rozdziałach podsumowujących niniejszą pracę.

[383] Dedekind używał zwykłego symbolu *R* na zbiór liczb wymiernych, natomiast zbiór liczb rzeczywistych określał symbolem $\mathfrak{R}$ – o czym więcej dalej. Cytując, staramy się zachować oryginalną symbolikę, natomiast poza cytatami staramy się zachować symbolikę współczesną. Cantor natomiast używał w 1872 roku symbolu A dla zbioru liczb wymiernych, natomiast symbolu B (i dalszych) dla zbioru liczb rzeczywistych.

[384] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 319. Oryginał brzmi następująco: „**I.** Ist $a>b$, und $b>c$, so ist $a>c$. Wir wollen jedesmal, wenn *a, c* zwei verschiedene (oder ungleiche) Zahlen sind, und wenn *b* größer als die eine, kleiner als die andere ist, ohne Scheu vor dem Anklang an geometrische Vorstellungen dies kurz so ausdrücken*:* *b* liegt zwischen den beiden Zahlen *a, c.* **II.** Sind *a,* c zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen *b,* welche zwischen *a, c* liegen**. III**. Ist *a* eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen des Systems *R* in zwei Klassen*,* A_1 und A_2, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse P_1 umfaßt alle die Punkte p_1, welche links von *p* liegen, und die zweite Klasse P_2 umfaßt alle die Punkte p_2, welche rechts von *p* liegen; der Punkt *p* selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden. In jedem Falle ist die Zerlegung der Geraden *L* in die beiden Klassen oder Stücke P_1, P_2 von der Art., daß jeder Punkt der ersten Klasse P_1 links von jedem Punkte der zweiten Klasse P_2 liegt*".*

dla dalszego rozwijania i uściślania tego pojęcia, zwłaszcza w kontekście późniejszej definicji ciągłości. Tego typu praktyka matematyczna jest charakterystyczna dla Dedekinda, u którego obserwujemy skupienie na całej strukturze, i konsekwentne wprowadzanie krok po kroku wszystkich niezbędnych jej elementów.

Zbiór liczb rzeczywistych i prosta rzeczywista

Wobec powyższego, matematyk z Brunszwiku w rozdziale następnym (§5) wprowadza charakterystykę porządku zbioru liczb rzeczywistych, przy założeniu, że działania są zdefiniowane analogicznie, jak w przypadku liczb wymiernych oraz zgodne z porządkiem. Sformułował ją następująco:

> „I. Jeśli $\alpha > \beta$ i $\beta > \gamma$, to $\alpha > \gamma$. Chcemy powiedzieć, że liczba β leży między liczbami α, γ.
> II. Jeśli α, γ są dwiema różnymi liczbami, to między nimi leży zawsze nieskończenie wiele różnych liczb β.
> III. Jeśli α jest pewną liczbą, to wszystkie liczby systemu $\mathfrak{R}$ [liczb rzeczywistych – przyp. K. T.] należą do dwóch klas $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$, z których każda zawiera nieskończenie wiele indywiduów; pierwsza klasa $\mathfrak{A}_1$ obejmuje wszystkie liczby α_1, które są < α; druga klasa $\mathfrak{A}_2$ obejmuje wszystkie liczby α_2, które są > α; sama liczba α może być dowolnie przypisana do pierwszej lub drugiej klasy i jest to wówczas odpowiednio największa liczba pierwszej lub najmniejsza liczba klasy drugiej. W każdym razie podział systemu $\mathfrak{R}$ na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ jest taki, że każda liczba w pierwszej klasie $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza niż każda liczba w drugiej klasie $\mathfrak{A}_2$ i mówimy, że podział ten wynika z tego, jaka będzie liczba α. […]
> Oprócz tych własności dziedzina $\mathfrak{R}$ – ma również własność ciągłości, czyli spełnione jest twierdzenie: IV. Jeżeli system $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych dzieli się na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tego rodzaju, że każda liczba α_1 klasy $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza niż każda liczba α_2 klasy $\mathfrak{A}_2$, to istnieje jedna i tylko jedna liczba α, względem której powstaje rozkład”[385].

---

[385] Por. „ I. Ist $\alpha > \beta$, und $\beta > \gamma$, so ist auch $\alpha > \gamma$. Wir wollen sagen, daβ die Zahl β zwischen den Zahlen α, γ liegt.

II. Sind α, γ zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen β, welche zwischen α, γ liegen.

III. Ist α eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen des Systems $\mathfrak{R}$ in zwei Klassen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse $\mathfrak{A}_1$ umfaβt alle die Zahlen α_1, welche < α sind; die zweite Klasse $\mathfrak{A}_2$ umfaβt alle die Zahlen α_2, welche > α sind; die Zahl α selbst kann nach Belieben der ersten oder der

Pierwsze dwa punkty opisują zasady przechodniość porządku oraz gęstość. Następne dwa punkty wprowadzają własność ciągłości porządku zbioru liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$. Punkt III opisuje sam przekrój Dedekinda (można też interpretować go jako spójność porządku), natomiast punkt IV zapewnia wykluczenie (obecnie w kontekście współcześnie wprowadzonego porządku liniowego) luki [386] w takim przekroju – opisuje własność ciągłości.

Należy zauważyć w kontekście powyżej zacytowanych własności opisujących zbiór liczb rzeczywistych, że tak samo (jedynie bez własności ciągłości) Dedekind opisał własności liczb wymiernych. To kolejny przejaw precyzji i konsekwencji w przedstawianiu przez niego teorii. Dedekind od początku, po pierwsze, traktuje oba zbiory – liczb wymiernych i rzeczywistych jak struktury (tj. rozważa zbiory wraz z określonymi na nich relacjami i własnościami – przechodniości, gęstości porządku oraz relacji przekroju, a w przypadku zbioru liczb rzeczywistych – rozważa również własność ciągłości). Po drugie zaś, przedstawiana przez niego teoria wydaje się spójna i całościowo przemyślana w każdym wprowadzonym przez niego fragmencie – tak, jakby miał wgląd do pełnej struktury, jaką opracowywał. Potwierdza to interpretację podejścia Dedekinda jako strukturalistycznego.

Dla porównania, współczesna konstrukcja Dedekinda liczb rzeczywistych zaczyna się zdefiniowaniem przekroju na pewnym (liniowo uporządkowanym[387]) zbiorze *X*. Przekrój (*A*, *B*) – innymi słowy para uporządkowana – na zbiorze *R*, to taki podział tego zbioru, że:

1. $A, B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = X$

---

zweiten Klasse zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die gröβte Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Klasse. In jedem Falle ist die Zerlegung des Systems $\mathfrak{R}$ in die beiden Klassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art., daβ jede Zahl der ersten Klasse $\mathfrak{A}_1$ kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse $\mathfrak{A}_2$ ist, und wir sagen, daβ diese Zerlegung durch die Zahl α hervorgebracht wird.

[...]Auβer diesen Eigenschaften besitzt aber das Gebiet $\mathfrak{R}$ auch Stetigkeit, d. h. folgender Satz: IV. Zerfällt das System $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Klassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art., daβ jede Zahl α_1 der Klasse V1 kleiner ist als jede Zahl α_2 der Klasse $\mathfrak{A}_2$, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird".

R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 328–329.

[386] Pojęcia używane we współczesnej definicji ciągłości w sensie Dedekinda. Definicja ta i wszelkie wyjaśnienia współczesnych pojęć zostaną podane pod koniec niniejszego rozdziału, w ramach przedstawienia współczesnej konstrukcji liczb rzeczywistych według Dedekinda.

[387] Porządek w zbiorze *X* jest liniowy, gdy:

$$\forall x, y \in X: (x < y) \vee (y < x) \vee (x = y).$$

3. $\forall x \in A, \forall y \in B \ (x < y)$.

Przy czym wyróżnia się cztery różne możliwe przekroje:

1. $(\exists x_{max} \in A) \wedge (\exists y_{min} \in B)$
2. $(\exists x_{max} \in A) \wedge \neg(\exists y_{min} \in B)$
3. $\neg(\exists x_{max} \in A) \wedge (\exists y_{min} \in B)$
4. $\neg(\exists x_{max} \in A) \wedge \neg(\exists y_{min} \in B)$.

Przekrój pierwszego rodzaju nazywa się skokiem, natomiast przekrój czwartego rodzaju nazywa się luką.

Uporządkowany (liniowo) zbiór *X*, w którym żaden przekrój nie wyznacza luki ani skoku, jest ciągły w sensie Dedekinda. Warunek ten jest równoważny również stwierdzeniu, iż zbiór (*X*, *<)* jest gęsty[388] i żaden przekrój nie wyznacza luki[389]. W tym sensie gęstość zbioru zapewnia to, że żaden przekrój nie wyznacza skoku.

Mając zbiór liczb wymiernych *Q*, który jest liniowo uporządkowany i gęsty, możemy go uzupełnić liczbami niewymiernymi, „powstającymi" w miejscu każdej wyznaczonej w zbiorze liczb wymiernych, przez przekrój Dedekinda (*A*, *B*), luki. Otrzymujemy w ten sposób zbiór liczb rzeczywistych *R*, ciągły w sensie Dedekinda.

Strukturalizm struktur teoriomnogościowych w ujęciu Dedekinda

Należy zwrócić również uwagę na kwestię strukturalizmu, pojawiającą się u Dedekinda w podstawach teorii mnogości. Mówimy tu o samym obiekcie myślenia, który jest określany przez wszystko, co się o nim myśli lub mówi; mówimy o „myśleniu razem" zbiorów elementów jako całości, a sam zbiór jest przez Dedekinda określany pojęciem systemu. Możemy również podać przykłady bardziej skomplikowanych, formalnych struktur teoriomnogościowych: $\mathfrak{M}$, oraz $\mathfrak{G}$.

Największa wspólna część (*Gemeinheit*), jak i łańcuch (*Kette*) są pojęciami oznaczającymi bardzo ściśle i jednoznacznie określone struktury matematyczne. Największa

---

[388] Porządek w zbiorze X jest gęsty gdy:

$$\forall x, y \in X, \exists z \in X: (x < y \rightarrow x < z < y).$$

[389] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen…*, *dz. cyt.*, 16.

część wspólna jest zdefiniowana przy pomocy i w kontekście konkretnego zbioru będącego częścią oraz konkretnych zbiorów zawierających ową część wspólną. Łańcuch natomiast jest przedstawiony w ścisłej zależności od konkretnego odwzorowania (tj. odwzorowania przekształcającego dany zbiór-system w siebie samego) oraz konkretnego systemu S. Tak więc korzystając z różnych związków oraz uprzednio określonych matematycznych bytów i struktur, Dedekind konstruuje nowe, jednoznacznie określone struktury.

Pojęcie łańcucha jest również argumentem za jego strukturalistycznym podejściem. Jest to bardzo ważna struktura dla Dedekinda, na niej opiera on np. twierdzenie o indukcji zupełnej, ale również cała teoria mnogości jest z tym pojęciem ściśle związana. To istotne, bo łańcuch nie dość, że stanowił strukturę, to był w ujęciu Dedekinda strukturą dynamiczną. Jest to zbiór rozpatrywany w nieodłącznym kontekście odwzorowania – dynamicznej czynności przypisywania elementom zbioru, ich obrazów. Ponadto stanowi on dodatkowy argument na precyzyjne i konsekwentne wyprowadzanie modelu liczb naturalnych – najpierw Dedekind wyprowadza fundamentalne pojęcia-podstruktury, aby następnie w sposób zamierzony skonstruować określone struktury przy ich pomocy. Możemy twierdzić na tej podstawie, że podejście strukturalistyczne było dla Dedekinda w pewien sposób fundamentalne.

Odmienne postępowanie widzimy u Cantora, który choć również konstruuje struktury, to jednak tylko w kontekście dedukcji i niekiedy tylko pewnego uogólniania obiektów. Dedekind, przedstawiając swoją teorię, robi to tak, że można dokładnie śledzić proces jej powstawania. Jest to teoria podana w jasnej, precyzyjnej formie, prezentująca byty, związki między nimi, i bardziej skomplikowane struktury, gotowa jako pewna całość. Wszystko to nie jest redukowalne do czysto logicznych twierdzeń, ponieważ zawiera określoną treść (wszystkie byty, struktury posiadają pewne znaczenie, odnoszące się – pośrednio lub bezpośrednio – do fundamentalnego świata myśli). Dedekind przedstawia teorię jako „tworzoną” (ale nie „stwarzaną”), a nie odkrywaną, jednakże nie możemy przypisać mu przekonań nominalistycznych. Jego twierdzenia i pojęcia zawierają związek z opracowywaną strukturą, której elementy pochodzą ze „świata myśli”, stąd zawartość owego modelu-struktury również się do niego odnosi, ale przy tym zawiera elementy twórcze, umysłowej konstrukcji danej struktury[390].

[390] Cantor natomiast porusza się w świecie matematycznym również przy pomocy intuicji – niekoniecznie chodzi o intuicję potoczną czy błędną. W jego praktyce matematycznej można dostrzec elementy konstrukcjonistyczne, których efektem są zazwyczaj poszczególne struktury, ale również mamy u niego do czynienia z intuicją zupełnie niezwiązaną ze strukturami.

Dodatkowo, należy przypomnieć omówione wcześniej największe i najbardziej abstrakcyjne struktury, jakimi były u Dedekinda modele liczb rzeczywistych (powstałe przez wprowadzenie formalnie opisanej własności ciągłości) oraz liczb naturalnych (jakie reprezentował bezpośrednio zbiór prosto nieskończony). Należy zwrócić uwagę w ich przypadku na fakt, wspomnianej wcześniej, ich własności kategoryczności (przypisywaną im pod pewnymi warunkami)[391]. Kategoryczność jest własnością, która określa daną strukturę jako zbudowaną z dokładnością co do izomorfizmu. Oznacza to, że jeśli mamy dwie struktury, spełniające pewne warunki kategorycznie skonstruowanej struktury, to muszą być one ze sobą izomorficzne. To z kolei oznacza, że dana kategorycznie struktura jest zbudowana w sposób optymalnie określający zadany problem. Świadczy to o tym, iż dana struktura została zbudowana efektywnie.

3.3 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawione zostały dwa aspekty strukturalizmu – aspekt ontologiczny oraz aspekt epistemiczny (a dokładniej epistemiczno-metodologiczny). Głównymi propozycjami rozprawy są epistemiczny konstrukcjonizm oraz ontologiczny realizm, dlatego poruszane aspekty strukturalizmu mają za zadanie odpowiednie dookreślenie owych propozycje w praktyce matematycznej zarówno Cantora, jak i Dedekinda – strukturalizm ontologiczny propozycję realizmu, natomiast strukturalizm epistemologiczny (czy epistemiczno-metodologiczny) propozycję konstrukcjonizmu.

O ile strukturalizm ontologiczny, rekonstruowany w oparciu o same matematyczne struktury wprowadzone (mniej lub bardziej intencjonalnie) do podstaw matematyki, jest odnajdywany zarówno u Cantora, jak i u Dedekinda, o tyle strukturalizm epistemologiczno-metodologiczny jest rekonstruowany w zasadzie jedynie w kontekście praktyki matematycznej Dedekinda. Należy zastrzec, iż dopuszczamy pewien wpływ strukturalnej ontologii matematycznych obiektów na epistemologię Cantora, jest to jednak wpływ raczej nieuświadomiony.

U obu matematyków można odnaleźć wiele struktur, stanowiących zasadniczą i niezbędną część opracowywanej przez nich matematyki. U Cantora jest to zarówno zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb rzeczywistych, nieskończony iloczyn zbiorów potęgowych, jak i inne

[391] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen…*, *dz. cyt.*, 11; D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 15.

teoriomnogościowe struktury – liczby porządkowe czy kardynalne. U Dedekinda są to też zbiory liczb wymiernych i rzeczywistych (chociaż przedstawione nieco bardziej bezpośrednio strukturalnie, jako zbiory w nieodłącznym kontekście działań i porządku na nich określonych, jak to się robi we współczesnej algebrze), natomiast w kontekście teorii mnogości można wymienić same zbiory określane przez Dedekinda mianem systemów, największa wspólna część, łańcuch czy zbiór prosto nieskończony będący modelem zbioru liczb naturalnych. Już na poziomie samego strukturalizmu ontologicznego można wskazać pewne różnice między Cantorem i Dedekindem, dlatego że struktury Dedekinda (wraz z samymi systemami, tj. zbiorami, ale również modelami liczbowymi) były bardziej precyzyjnie określone wprost jako struktury.

Przechodząc do epistemiczno-metodologicznego aspektu strukturalizmu, można wskazać, iż opieramy się tu oprócz analiz niniejszego rozdziału również na wynikach innych prac (np. Ferreirósa lub Recka)[392], w których przypisuje się Dedekindowi – szeroko rozumiane – stanowisko strukturalistyczne względem zarówno epistemologii, jak i metodologii. Jeśli chodzi o wyniki naszych analiz, można wskazać na poparcie tego stanowiska przede wszystkim metodę modelowania teoriomnogościowego, jaką można Dedekindowi przypisać na podstawie kilku zauważonych kwestii w zakresie analizowanych tu podstaw matematyki. Wspominaliśmy o jasnym przedstawianiu przez Dedekinda jego matematycznych zamiarów (intencji) – jak formalne wprowadzenie własności ciągłości czy bardziej formalne przedstawienie arytmetyki N; następnie analizowaliśmy jego konsekwencję i precyzję wprowadzania modeli liczbowych (zarówno R, jak i N), a na końcu wskazaliśmy kategoryczność tych modeli. U Cantora nie rozpoznajemy strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego z uwagi na kilka kwestii: po pierwsze, wprowadzony przez niego zbiór liczb rzeczywistych ani nie był modelem zbioru R, ani nie był – jako struktura – kategoryczny. Cantor formalnie nie wprowadził zbioru liczb naturalnych, zaś w ramach przypisywanego mu quasi-nominalizmu mógł unikać bezpośrednich odwołań (zarówno wizualnych, jak i intencjonalnych) do treści wprowadzanych pojęć, do pewnej poglądowości na ich temat, nie mówiąc już o poglądowości, która miałaby kształtować wprowadzane w sposób zamierzony nowe struktury (co, jak pokazaliśmy i jeszcze do tego wrócimy, mogło wspomagać konstruowanie kategorycznych modeli u Dedekinda).

[392] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions...*, *dz. cyt.*

Powyższa perspektywa pozwala przedstawić strukturalizm jako stanowisko pierwotne względem elementów konstrukcjonistycznych, odnajdywanych w praktyce matematycznej Dedekinda (jak sugestywny język wskazujący na czynności umysłowe i pewną dynamikę teorii matematycznych oraz optymalną konstruowalność przedstawianych struktur). Przyczyną wyżej opisanego modelowania były matematyczne problemy (brak formalnie wprowadzonej własności ciągłości zbioru, jak również brak wystarczająco formalnie wprowadzonej arytmetyki N). Celem Dedekinda nie tyle było badanie matematycznych problemów, co zbudowanie modeli dla ich rozwiązania i wyjaśnienia.

Poprawność budowanych modeli (tj. odpowiedni dobór elementów i zależności, jakie je łączą) możemy powiązać z ich kategorycznością, rozumianą jako ich efektywność i skuteczność. W przypadku liczb rzeczywistych była to trafnie sformalizowana własność ciągłości, jednoznacznie wykluczająca wielkości infinitezymalne (w kontekście teorii ciał uporządkowanych), natomiast w przypadku zbioru liczb naturalnych była na przykład właściwość nieskończoności potencjalnej, wyrażonej w nieprzerwanej samokonstrukcji tego zbioru przez funkcję następnika, połączona z właściwością nieskończoności aktualnej, zapewnionej przez istnienie tego zbioru w całości.

4 Zagadnienie realizmu ontologicznego u Cantora i Dedekinda

Rozdział drugi oraz pierwsza część trzeciego dotyczyły głównie poznania i metodologii praktyki matematycznej twórców – tak Cantora, jak i Dedekinda. Największa zauważona różnica pomiędzy oboma matematykami dotyczyła metodologii ich praktyki matematycznej (a konkretnie ukazywanych przez nich intencji oraz intuicji względem konstruowania nowych struktur). Strukturalizm ontologiczny oraz ontologiczny realizm dotyczą natomiast ontologii matematycznych obiektów.

Poniżej przedstawimy propozycję opisu sposobu istnienia matematycznych obiektów, tak, aby pogodzić ich istnienie z proponowanym konstrukcjonizmem oraz obydwoma aspektami strukturalizmu, przypisywanymi jak wyżej wskazano odpowiednio różnie obu matematykom. Zaproponujemy wewnętrzny realizm ontologiczny, oznaczający możliwość abstrakcyjnego istnienia obiektów matematycznych (zarówno względem indywidualnej praktyki matematycznej, jak i względem perspektywy historyczno-społecznej), ponieważ są wynikiem oraz przedmiotem matematycznego dyskursu[393] oraz możemy je efektywnie konstruować i badać[394]. Jak się okazuje, rekonstruowana ontologia nie zawiera wiele różnic pomiędzy Cantorem i Dedekindem. Być może dlatego, że rekonstruowana jest w oparciu o drugi filar PMP – samą matematykę.

Pomimo iż metodologie (a więc kształt praktyki matematycznej) różniły się między sobą pod względem strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, nie skutkowało to zasadniczymi różnicami w przedmiocie teorii matematycznych, a tylko w stopniu dopracowania jej formy[395]. Wskażemy możliwe wytłumaczenie takiego stanu rzeczy poprzez

---

[393] O. Chateaubriand, *The Ontology of Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*

[394] J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*

[395] Nie sposób nie wspomnieć w tym miejscu współczesnych propozycji odnośnie do nawet nie konstruktywizmu, a – konstrukcjonizmu społecznego. Chociaż perspektywa społeczna nie jest główną perspektywą badawczą niniejszej pracy – taką jest perspektywa dwóch konkretnych matematyków – nie można pominąć tej kwestii w kontekście dyskusji ontologii matematycznych obiektów. Wydaje się, że takie postawienie sprawy, że matematyka jest w jakiś sposób wytworem kultury, a obiekty istniejące w tym kontekście obiektami istniejącymi w sposób abstrakcyjny, ale też w sposób ciągły w kontekście perspektywy historyczno-społecznej, jest rzetelną alternatywą dla wyidealizowanych, często oderwanych od samej praktyki matematycznej metafizycznych stwierdzeń tradycyjnej filozofii matematyki (np. z punktu widzenia platonizmu, fikcjonalizmu). Por. M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic*..., *dz. cyt.*; S. Kaufman, *On the Emergence of a New Mathematical Object: An Ethnography of a Duality Transform*, w: *Mathematical Cultures*, red. B. Larvor, Cham 2016, 91–110; E. Piotrowska, *Dokąd zmierza filozofia matematyki?*..., *dz. cyt.*

połączenie ich praktyk z obiektywną, już wytworzoną wcześniej wiedzą. Będziemy korzystać z pragmatycznej propozycji PMP, jak i z koncepcji trzech światów Poppera[396].

W kontekście Tezy I istotne jest to, że poprzez analizy niniejszego rozdziału można nieco osłabić skrajny realizm Cantora oraz spróbować przypisać pewien rodzaj realizmu Dedekindowi.

4.1 Realizm ontologiczny Cantora

Jeśli chodzi o Cantora, istotnym punktem wyjścia analiz są jego własne przekonania. Uważał on, iż odkrywa matematykę, że umysł ma dostęp *a priori* do matematycznych obiektów. Wiedzę matematyczną traktował również jak całkowicie pewną (*episteme*). Postulował nawet stosowanie teorii mnogości do świata zewnętrznego. Za realistycznym podejściem Cantora przemawia również użycie przez niego argumentów pozamatematycznych na istnienie nieskończoności aktualnej, nad którą zaczął się zastanawiać w kontekście rozwijanej przez siebie teorii mnogości[397].

Jednakże można zauważyć jednocześnie, iż to, jakim obiektom przyznawał (i jaką) ontologię, było związane z pewnymi czynnikami poza-matematycznymi. Na jego praktykę matematyczną miały wpływ ówcześnie panujące przekonania i paradygmaty, które uformowały jego przednaukowe założenia. Dodatkowo przednaukowe założenia Cantora były kształtowane przez jego przywiązanie do teorii mnogości – podejmował pozamatematyczną obronę twierdzenia o istnieniu nieskończoności aktualnej, próbował udowodnić (bez skutku) Hipotezę Kontinuum, jak i podejmował próby udowadniania niemożliwości istnienia wielkości aktualnie nieskończenie małych.

W związku z powyższym, można wnioskować, że nie wszystkie elementy jego twórczości mogły być czystym odkrywaniem matematyki, związane były bowiem z wpływem pewnych przedzałożeń, a nawet pewnego rodzaju przywiązań ideologicznych. Cantor nie potrafił rozpoznać racjonalnych związków tych przedzałożeń z rozważanymi problemami matematycznymi i konstruowanymi strukturami. Problematyczność filozoficznych,

---

[396] K.R. Popper, *Epistemology Without a Knowing Subject (pl: A. Tonalskiei (tł.) „Literatura na świecie" 161, 1984)*, w: *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Oxford 1972; K.R. Popper, *Wiedza obiektywna..., dz. cyt.*

[397] Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*

teologicznych i innych przedzałożeń Cantora wskazuje, że należy osłabić platonizm przypisywany przez niego obiektom matematycznym, zwłaszcza w teorii mnogości. W związku z czym podejmiemy analizę wskazującą, na ile należy osłabić deklarowane przez niego założenia platonistyczne.

Trzeba tu zastrzec, że nie uważamy, iż obiektom matematycznym w praktyce matematycznej Cantora nie można przypisać żadnego rodzaju realizmu ontologicznego. Rozważania dotychczas zaprezentowane w rozrawie ukazują doniosłą rolę konstrukcji matematycznej, rozumianej jako czynność umysłowa w praktyce matematycznej Cantora i Dedekinda. Oznacza to, iż ontologia matematycznych przedmiotów powinna być uzależniona od owej konstrukcji. Jako że do pojęcia konstrukcji, rozumianej według zaleceń PMP, zaliczamy rozumowanie, matematyczne intencje oraz matematyczną intuicję (pewien ogląd wizualnych reprezentacji odpowiadających i opisujących matematyczne obiekty), należy je uwzględnić przy rozważaniu ontologii matematyki u Cantora i Dedekinda.

Biorąc pod uwagę jedynie intencję oraz intuicję, mogłyby się wydawać, że najbardziej stosownym mógłby być sposób istnienia określony przez Romana Ingardena na potrzeby opisu przedmiotów sztuki – chodzi o istnienie przedmiotów intencjonalnych. Za taki przedmiot zostały uznane przez Błaszczyka konstrukcje zbioru liczb rzeczywistych Cantora i Dedekinda[398]. Niemniej jednak, chociaż nie będziemy argumentować przeciwko tej propozycji jako interesującej możliwości interpretacyjnej, należy zaznaczyć, iż rozważania w niniejszej pracy (również te odnoszące się do ontologii) różnią się od wspomnianych rozważań Błaszczyka na temat podmiotu intencjonalnego pod względem stawianych pytań i badanych kwestii szczegółowych. Nie zajmujemy się formalnym opisem ontologii, ale raczej próbą odpowiedzi na pytania, jak jest możliwe istnienie obiektów matematycznych oraz jak mogą one istnieć w ścisłym kontekście praktyki matematycznej (zarówno indywidualnej, jak i historyczno-społecznej). Dlatego nie możemy wykorzystać bezpośrednio propozycji Ingardenowskiej. Dodatkowo z powodu argumentów wskazujących różnice pomiędzy sztuką a

[398] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*

nauką (tu matematyką)[399] czy z powodu niejasności jak bardzo obie perspektywy różnią się[400], można i należy przeprowadzić bardziej zaawansowane badania, rozwijające i uzgadniające propozycję Błaszczyka. Innymi słowy możemy przyjąć, że tym, co odróżnia proces wprowadzania obiektów matematycznych od procesu wprowadzania obiektów estetycznych, jest rodzaj rozumowania. Nie możemy wyłączyć samego rozumowania z działalności artystycznej.

Jak już zostało wskazane, ów realizm ontologiczny będzie oznaczał raczej możliwość istnienia abstrakcyjnych obiektów w sposób obiektywny (tj. że obiekty te w swej istocie są intersubiektywnie poznawane i komunikowane, a także odtwarzane przy pomocy matematycznych tekstów), powstałych w wyniku praktyki matematycznej konkretnych matematyków (ale w kontekście perspektywy historyczno-społecznej). Zamierzamy tutaj opisać tę ontologię przy pomocy scharakteryzowania obiektów matematycznych, jakim przyznajemy istnienie. Dodatkowo wskażemy na możliwość opisu wymagań filozofii praktyki matematycznej poprzez propozycję trzech światów u Poppera. Będziemy prezentować elementy wiedzy, które Cantor i Dedekind przejęli („odziedziczyli") w ramach wiedzy przez siebie zastanej, oraz elementy, które wprowadzili w oparciu o kontekst swojej matematycznej praktyki. Ontologię obiektów rozpatrywanych względem indywidualnej (jak również historyczno-społecznej) praktyki matematycznej będziemy nazywać „wewnętrzną", w opozycji do ontologii rozpatrywanej przy pomocy argumentów poza-matematycznych.

Wiedza tła u Catora

Problem ciągłe-dyskretne

Przede wszystkim można wskazać, iż Cantor przyjmował bez zastrzeżeń pewne matematyczne elementy, ale również podejścia. Miały one znaczący wpływ na rozwijane przez niego teorie i przyjmowane postawy względem matematycznych problemów. Część z tych

[399] Por. „matematyka różni się od fikcji literackiej tym, że postacie fikcyjne są zwykle ograniczone do jednego dzieła fikcyjnego, podczas gdy te same byty matematyczne pojawiają się w różnych teoriach matematycznych". J. Burgess, *Mathematics and Bleak House*, „Philosophia Mathematica" 12, (2004), 37–53; L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[400] Można podjąć pogłębione analizy tego, jak różnią się formalne struktury przedmiotu intencjonalnego oraz proponowanych w niniejszej pracy ogólnych ram dla praktyki matematycznej: konstrukcjonizmu epistemologicznego i pragmatycznego realizmu. Dodatkową kwestią jest specyfika dzieła sztuki, które mimo genezy w twórczości ludzkiej przeznaczone są do innych celów niż stworzone przez matematyków obiekty i struktury matematyczne.

postaw nie miała charakteru ściśle naukowego, a wynikały one z ogólnych, czasem intuicyjnych przekonań na temat konkretnych zagadnień. Kwestia ta zostanie omówiona szerzej w rozdziale dyskutującym Tezę II, niemniej już teraz można wspomnieć, iż głównymi, przykładowymi kwestiami matematycznymi, względem których rekonstruujemy takie podejście Cantora, jest kwestia nieskończenie małych wielkości (związana z programem Weierstrassa)[401] oraz kwestia Hipotezy Kontinuum.

Znaczące wpływy zastanego środowiska naukowego oraz wpływy przywiązania do skonstruowanej teorii mnogości raczej nie wskazują na bezpośrednie odkrywanie idealnych bytów sfery transsubiektywnej (nawet poprzez definiowanie pojęć w sferze intrasubiektywnej). Oczywiście należy zauważyć, iż powyższe stwierdzenie nie stanowi dowodu na niemożliwość zastosowania radykalnego stanowiska platonistycznego, a jedynie podkreśla brak wystarczająco mocnych dowodów naukowych na jego poparcie i wskazuje na brak konieczności jego przyjmowania (jako stanowiska zewnętrznego względem ogólnie pojętej praktyki matematycznej). Poprzez analizy praktyki matematycznej Cantora zamierzamy pokazać niezbędność założenia jedynie o pewnym minimalnym realizmie wewnętrznej ontologii matematycznych obiektów.

Jak twierdzi Steward Shapiro, filozofia matematyki powinna odnosić się do samej matematyki, do podmiotu matematycznego, jak również do świata, w którym matematyka jest stosowana[402]. Można również dodać, że chodzi o świat, w którym ta matematyka powstała i się rozwija – najściślejszym tego kontekstem jest sama praktyka matematyczna. Stąd na kwestie matematyczne, analizowane w niniejszej pracy, należy spojrzeć z perspektywy tak indywidualnej, jak i historycznej praktyki matematycznej. Poniżej przedstawimy kolejno przykłady obszarów matematycznej wiedzy, jakie zostały przez Cantora zaadaptowane jako jego założenia i podstawy jego praktyki matematycznej.

Kwestia konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych wiąże się u swoich podstaw ze starożytnym kryzysem oraz przewrotem w starożytnej myśli greckiej, jakie dokonały się pod wpływem odkrycia problemu niewymierności przez Hippasosa z Metapontu[403]. Wcześniej,

[401] F. Klein, *The arithmetizing of mathematics*..., *dz. cyt.*

[402] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford 2000, VII–VIII.

[403] B. Dembiński, *Powstanie i upadek pitagorejskiego punktualizmu*..., *dz. cyt.*, 23.

przyjęta została przez pitagorejczyków zasada, że „wszystko odpowiada liczbie”[404] oraz że „liczby wydają się pierwszymi w całej naturze”[405]. Zasada ta wynikała z potrzeby poszukiwania sposobu wyrażenia idealnej harmonii stworzonego świata. Ściślej rzecz biorąc pitagorejczycy wyznawali tzw. punktualizm – pogląd, zgodnie z którym świat jest zbudowany z punktów, natomiast każda zbudowana z punktów struktura wyraża pewną określoną liczbę, a każda liczba z kolei jest rzeczą[406].

Powyższy pogląd czy wręcz wiara pitagorejczyków w tzw. *aritmetica universalis* zostały zburzone, gdy odkryto wielkości, niebędące ilorazem dwóch liczb naturalnych (a więc niedające się wyrazić stosunkiem tych liczb, niebędące więc żadną proporcją umożliwiającą opisywanie harmonii w świecie)[407]. U podstaw tego kryzysu leżało przekonanie, że w takim razie istnieje więcej odcinków (wielkości geometrycznych) niż liczb (wielkości arytmetycznych), co oznaczało również, że istnieją „rzeczy”, których nie da się opisać liczbami[408]. Emocje, jakie budziło owe odkrycie w pitagorejczykach, a także okres, jaki upłynął do pełnego rozwiązania problemu niewymierności, mogą budzić obecnie zdziwienie[409].

---

[404] Jamblich, *Jamblich, Vit. Pyth. 162*, w: *Die Vorsokratiker. Griechisch/Deutsch*, red. J. Mansfeld, Stuttgart 1987, 146.

[405] Arystoteles, *Metafizyka*, w: *Arystoteles „Dzieła wszystkie"*, tłum. K. Leśniak, t. II, Warszawa 1990, cz. I 986a.

[406] Jako że przyjmowano iż zadania filozofii polegają na zgłębianiu zasady „ograniczone (πέρας) nałożone na nieograniczone (ἄπειρον)” – ponieważ odpowiednie zestrojenie (αρμονία) było źródłem wszelkiego ładu i porządku – ostatecznie liczba, jako warunek matematycznej proporcji, zdobyła najwyższe uznanie, jako narzędzie do badania i wyrażania owej poszukiwanej przez starożytnych filozofów harmonii. B. Dembiński, *Powstanie i upadek pitagorejskiego punktualizmu..., dz. cyt.*, 24–25. Do tego stopnia liczba była traktowana na poważnie w świecie pitagorejczyków, iż wyrażano przekonanie: „elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy, a całe niebo jest harmonią i liczbą”. Por. Arystoteles, *Metafizyka..., dz. cyt.*, cz. I, 986a.

[407] Por. B. Dembiński, *Powstanie i upadek pitagorejskiego punktualizmu..., dz. cyt.*, 26. Platon owo odkrycie niewymierności określił bardziej szczegółowo jako odkrycie „przekątni nie dającej się wypowiedzieć”. Platon, *Państwo*, tłum. W. Witwicki, Kęty 1997, cz. VIII 546c. Miało to związek z tym, iż wielkość niewymierna została odkryta w ramach badań własności trójkąta prostokątnego równoramiennego (gdzie, jak wiadomo dziś, korzystając z równania $2a^2 = b^2$, gdzie a jest długością przyprostokątnych zaś b długością przeciwprostokątnej, otrzymujemy, w stosunku do długości przyprostokątnej, niewymierną długość przeciwprostokątnej $b = a\sqrt{2}$). Zob. K. von Fritz, *Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont*, w: K. von Fritz, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin, New York 1971, 545–576. Odkrycie to przypisane zostało Hippasosowi z Metapontu, za ujawnienie zaś tego odkrycia ponieść miał karę, ginąc śmiercią tragiczną.

[408] Z. Jordan, *O matematycznych podstawach systemu Platona*, Poznań 1937, 35.

[409] Warto wspomnieć w kontekście starożytnej, hellenistycznej perspektywy o propozycji Russo, który w Dedekindzie widzi kontynuatora myśli hellenistycznej. L. Russo, *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna*, tłum. I. Kania, Kraków 2005. Jednakże jego propozycja nie do końca wpisuje się w przyjętą w niniejszej pracy. Niektórzy zauważają, rozumienie paradygmatu przez Russo niejako wyklucza możliwość przełomów naukowych w trakcie jej rozwoju – jedyne, jakie wskazuje, są paradygmaty, który powstają wraz z narodzinami myśli (np. hellenistycznej). S. Zamecki, *Na marginesie książki: Lucio Russo : Zapomniana rewolucja.*

Jednak należy pamiętać, iż problem ten osadzony był w szerszym kontekście niż same wielkości niewymierne. Po pierwsze, do samej konstrukcji liczb rzeczywistych (zbioru zawierającego również liczby niewymierne) potrzebne są w jednej z metod (Cantora) ciągi nieskończone, a w drugiej (Dedekinda) zbiór nieskończony oraz jego nieskończone podzbiory – a więc struktury bardziej skomplikowane niż proste stosunki liczb wymiernych. Po drugie, kwestia nieskończonych rozwinięć dziesiętnych liczb zawsze pociąga za sobą problem nieskończoności – zarówno potencjalnej, jak i aktualnej[410]. Po trzecie zaś, problem niewymierności u starożytnych Greków był osadzony w ich braku rozróżniania perspektyw geometrycznej i arytmetycznej. Tak bardzo utożsamiali oni liczby z ich geometryczną interpretacją (i na odwrót), że w konsekwencji odkrycie niewymiernych wielkości w geometrii utożsamili z ostrym, radykalnym rozdzieleniem tych dwóch, przenikających się w ich mniemaniu dziedzin.

Wiek XIX przyniósł rozwiązanie problemu niewymierności poprzez konstrukcję liczb rzeczywistych, w tym brakujących liczb, tj. liczb niewymiernych. Zarówno Georg Cantor[411], jak i Richard Dedekind stworzyli i przedstawili swoje propozycje konstrukcji liczb rzeczywistych[412].

Georg Cantor swoją przygodę z teorią mnogości, ale również z podstawami matematyki, do których należy zaliczyć także konstrukcję liczb rzeczywistych, zaczął jeszcze w trakcie prac nad rozwiązaniami problemów z zakresu dziedziny analizy matematycznej. Jego „zbiory wyjątkowe”, które stoją u podstaw całej teorii mnogości, jak również w pewnym sensie u podstaw teorii zbioru liczb rzeczywistych (tj. konstrukcji tego zbioru), o czym pisał już w 1872 roku[413], powstały w trakcie pracy nad analizowaniem i rozwijaniem wyników Riemanna

Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna. Przełożył Ireneusz Kania. Kraków 2005 Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS, 469 s., „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 52, (2007) nr 1, 225–237.

410 Liczby niewymierne w pewnym sensie „stają się” (jak np. liczba π czy e, których aż do teraz w „całości” nie znamy). Aby wziąć taką liczbę w całej jej okazałości, jako gotową „rzecz”, należy dopuścić istnienie aktualnej nieskończoności.

411 H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967.

412 W przypadku Georga Cantora była to praca: G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)..., dz. cyt.*; w przypadku Richarda Dedekinda: R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen..., dz. cyt.*

413 G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)..., dz. cyt.*

w dziedzinie szeregów trygonometrycznych[414]. Matematyk ten rozważał przedstawienia pewnych funkcji przy pomocy szeregów trygonometrycznych, gdzie sprawdzano, jakie zbiory można wykluczyć z dziedziny tych funkcji (najpierw skończonych, a następnie również nieskończonych).

W prace nad podstawami tej teorii byli zaangażowani m.in. Augustin Cauchy, Johann Dirichlet, Georg Riemann, Rudolf Lipschitz czy Heinrich Heine[415]. Jednym z problemów teorii szeregów trygonometrycznych, który zainteresował Cantora, było zagadnienie jednoznaczności reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny. Zwrócił on na nie uwagę dzięki artykułowi Heinego z 1870 roku[416], gdzie zawarte było twierdzenie ustalające jednoznaczność reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny, gdy były spełnione dwa warunki: funkcja była prawie wszędzie ciągła, a szereg jednostajnie zbieżny. Jeszcze w tym samym roku Cantor udowodnił twierdzenie o jednoznaczności dla szeregu trygonometrycznego reprezentującego funkcję oraz zbieżnego w każdym punkcie przedziału[417]. Następnie postawił problem, czy można tak uogólnić twierdzenie o jednoznaczności reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny, aby móc zrezygnować z silnego założenia o zbieżności w „każdym punkcie przedziału"[418]. Otóż okazało się, że można. Co więcej, następnym krokiem Cantora była próba pokazania, że można zrezygnować z założenia o skończonej liczbie punktów osobliwych[419].

[414] J. Dadaczyński, *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne" XXIII/XXIV, (1990), 135–145; J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.* Więcej na temat pracy Cantora nad szeregami Fouriera, a także na temat historii szeregów trygonometrycznych w matematyce można znaleźć w: J.W. Dauben, *The trigonometric background to Georg Cantor's theory of set*, „AHES" 11, (1971) nr 7, 181–216; A. Sachse, *Essai historique sur la representation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une serie trigonometrique*, „BulSMatAst" 15, (1880), 43–64, 83–112.

[415] J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite..., dz. cyt.*

[416] Heine w 1870 roku opublikował wspomniane twierdzenie, natomiast dopiero w 1872 jego dowód por. E. Heine, *Uber trigonometrische Reihen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 71, (1870), 353–365; E. Heine, *Die Elemente der Functionenlehre..., dz. cyt.*

[417] G. Cantor, *Beweis daß eine für jeden reelen Wert von x durch eine trigonometrischen Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1870, 80–83.

[418] G. Cantor, *Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daß eine für jeden reelen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1871, 84–86.

[419] Czyli tych punktów, gdzie nie ma zbieżności. Chodzi cały czas o uogólnianie założeń związanych z twierdzeniem o jednoznaczności reprezentacji funkcji przez szereg. W tym przypadku najbardziej o artykuł: G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*

Tak wyklarowały się wczesne pojęcia punktu granicznego (skupienia) oraz pochodnej zbioru, będące podstawą teorii zbiorów – teorii mnogości[420]. Wprawdzie nie można zapominać, że teoria liczb rzeczywistych została opracowana i opublikowana wtedy, gdy Cantor zaczynał również zajmować się na poważnie teorią mnogości – a więc nie można wykluczyć, że obu tych teorii nie łączyło nic więcej w jego twórczości[421] poza zbieżnością czasową – to jednak należy w miarę możliwości przeanalizować te dwie kwestie osobno (mając na uwadze ich możliwe przenikanie się). Niemniej jednak, warto zauważyć, iż wprowadzenie konstrukcji liczb rzeczywistych miało miejsce w kontekście tego, co Cantor zastał w środowisku naukowym, czym się tam zainteresował i nad czym pracował.

Rola teorii mnogości

W przypadku teorii mnogości jako istotną wiedzą tła Cantora można wskazać typową dziewiętnastowieczną postawę wobec zbiorów jako pojęcia (lub obiektu) pierwotnego w matematyce. W przeciwieństwie do kontekstu praktyki matematycznej Dedekinda, u Cantora znajdujemy oprócz elementów wiedzy zastanej również wyraźne ślady pewnego rodzaju przywiązania do odkrytej (stworzonej) przez siebie teorii.

Przywiązanie Cantora do stworzonej przez siebie teorii mnogości, a przez to wynikające z tego pozamatematyczne założenia, można zaobserwować na przykładzie jego wielu (nieudanych) prób udowodnienia Hipotezy Kontinuum, ale również na przykładzie niedopuszczania do wiadomości tego, co stało w sprzeczności ze sformułowaną przez niego teorią mnogości – jak było ze wspomnianymi wielkościami nieskończenie małymi.

Według Ernsta Zermelo pierwsza i najsłabsza forma słynnej Hipotezy Kontinuum była zawarta w przypuszczeniu Cantora, wyrażonym w artykule z 1878 roku[422] o rozróżnianiu mocy zbiorów nieskończonych. Chodziło w istocie o przypuszczenie, że każdy zbiór nieskończony jest równoliczny (istnieje odpowiedniość „jeden do jednego”) albo ze zbiorem liczb naturalnych, albo ze zbiorem liczb rzeczywistych.

---

[420] J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite…*, *dz. cyt.*, 30–37.

[421] Chodzi w zasadzie o kwestie filozoficzne i metamatematyczne, mające związek z praktyką matematyczną, a więc z procesami umysłowymi i metodologią działań naukowych (zamierzonych i nieuświadomionych); ponieważ wspólnych dla teorii mnogości i teorii liczb rzeczywistych kwestii matematycznych jest dość dużo (pojęcie zbioru/liczby, problem przeliczalności i nieprzeliczalności – a więc Hipoteza Kontinuum, kwestia nieskończoności).

[422] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)…, dz. cyt.*

Cantor pisze:

„pojawia się więc pytanie, na ile i na jakie klasy dzielą się rozmaitości liniowe, gdy rozmaitości jednakowej wielkości są umieszczone w jednej i tej samej klasie, rozmaitości różnej wielkości w różnych klasach. Za pomocą metody indukcyjnej, której nie będziemy tutaj szczegółowo omawiać, wysuwa się na światło dzienne twierdzenie, że liczba klas rozmaitości liniowych wynikająca z tej zasady klasyfikacji jest skończona, jest równa dwa”[423].

Jak zauważa w komentarzu pod artykułem Zermelo, Cantor po raz pierwszy formułuje tutaj Hipotezę Kontinuum[424]. Należy zaznaczyć, że Cantor sformułował ową hipotezę w kontekście odkrycia policzalności zbioru liczb naturalnych czy wymiernych oraz niepoliczalności zbioru liczb rzeczywistych (tj. zbioru liczb wymiernych uzupełnionych o zbiór liczb niewymiernych).

Jednak biorąc pod uwagę jej genezę, można również stwierdzić, że samo rozróżnienie „liczności” zbiorów przeliczalnych (np. *N*) oraz nieprzeliczalnych (*R*) było jakąś jej – przynajmniej częściową – formą (mowa o artykule oraz korespondencji z lat 1873/1874)[425]. Rozróżnienie liczności zbiorów, w naturalny sposób zdeterminowało poszukiwanie odpowiedzi na pytanie: czy tak jest w przypadku każdego zbioru, czy tylko tych konkretnych, które badał (tj. zbioru liczb naturalnych lub z nim równolicznych, i zbioru liczb rzeczywistych lub z nim równolicznych), i co w takim razie pomiędzy tymi ostro rozróżnionymi nieskończonymi wielkościami z matematycznego punktu widzenia „się dzieje”?

[423] Por. „so fragt es sich, in wie viel und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden. Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, daß die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, daß sie gleich Zwei ist”. G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik” 84, 242–258)...*, *dz. cyt.*, 132.

[424] Por. „Hier äußert Cantor zum ersten Male seine Vermutung, daß dem Linearkontinuum die „zweite Mächtigkeit" zukomme: die Cantorsche „KontinuumHypothese’”. G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik” 84, 242–258)...*, *dz. cyt.*, 133 przyp.2.

[425] Można się odnieść do pracy Cantora z 1874 roku, w której uzyskał formalną pewność (przeprowadził pierwszy dowód) tego, iż zbiór liczb rzeczywistych *R* jest większy/różnoliczny od zbioru liczb naturalnych *N*. Por. G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)...*, *dz. cyt.*

W pracy z 1884[426] roku Cantor (bez powodzenia) zajął się ponownie rozważaniem i próbą udowodnienia Hipotezy Kontinuum. Należy zauważyć, że prawdopodobnie niemożność znalezienia rozwiązania dla Hipotezy Kontinuum była dużym obciążeniem psychicznym dla Cantora, wziąwszy pod uwagę jego historię leczenia w szpitalu psychiatrycznym i przypisaną mu diagnozę choroby afetywnej, dwubiegunowej[427]. Twierdzi się również, że jeśli Hipoteza Kontinuum byłaby prawdziwa, oznaczałoby to, że zbiór *R* liczb rzeczywistych może być dobrze uporządkowany[428] – co zresztą było przez Cantora (błędnie) zakładane. Wyrażał on wręcz przekonanie, iż każdy zbiór można uporządkować jako pewne fundamentalne i doniosłe prawo myśli"[429]. Może to świadczyć dodatkowo za zamierzenie intencjonalnym stosunkiem Cantora (przedzałożeniowym) do samych prób udowadniania Hipotezy Kontinuum.

Przy pomocy pozaskończonych liczb porządkowych Cantor ustalił dobrze określoną skalę rosnących pozaskończonych liczb kardynalnych. Notacja „alefów" została wprowadzona dopiero w 1895 roku, gdy porządkował i „formalizował" całą teorię mnogości. Umożliwiło to dokładniejsze sformułowanie problemu kontinuum[430].

Hilbert później zwrócił uwagę zarówno na Hipotezę Kontinuum, jak i na problem porządku na swojej słynnej liście „Mathematische Probleme" (1900)[431]. Oprócz podkreślenia

[426] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten (6)..., dz. cyt.*

[427] W 1884 roku miał on przerwę w działalności naukowej, spowodowaną kryzysem psychicznym. Por. J. Dadaczyński. *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*. Wydawnictwo Naukowe Papieskiej Akademii Teologicznej. Kraków 1994, s. 20, przypis 55.

[428] „Notice too that the Continuum Hypothesis, if true, would entail that the set R of real numbers can indeed be well-ordered". J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), red. E.N. Zalta, URL = https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/settheory-early/. Uogólniona Hipoteza Kontinuum pociąga za sobą Aksjomat Wyboru (por. P. Koellner, *Continuum Hypothesis*, w: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, https://plato.stanford.edu/entries/continuum-hypothesis/, CSLI, Stanford University, 22 maja 2013), jednak wystarczy przyjąć sam Aksjomat Wyboru (równoważny z twierdzeniem Zermelo o dobrym uporządkowaniu, por. Th. Jech, *The Axiom of Choice*, Amsterdam 1973, https://www.gwern.net/docs/math/1973-jech-theaxiomofchoice.pdf.*

[429] J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), red. E.N. Zalta, URL = https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/settheory-early/.

[430] Chodzi o prace z lat 1895/97. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* 1, 2, Math. Annalen nr 46 s. 481–512 (1895); nr 49, S. 207–246 (1897); w GA: s. 282–356.

[431] D. Hilbert, *Mathematische Probleme.Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900*, w: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Kl*,.. Göttingen; 1895, 1933, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6d/Hilbert_-_Mathematische_Probleme.pdf (11.03.2022). Wśród wymienionych przez Hilberta problemów były jeszcze np. problem niesprzeczności aksjomatów arytmetyki (częściowo rozwiązany przez Gödla), problem aksjomatyzacji

wagi problemu, jakim się stała Hipoteza Kontinuum, chciał on podkreślić w ten sposób znaczenie samej teorii mnogości oraz jej metod i problemów[432].

Należy pamiętać, iż Cantor nawiązywał do teorii mnogości znacznie wcześniej, również w pracach niedotyczących bezpośrednio tej dziedziny matematyki. Mowa tu na przykład o niejawnym wprowadzeniu teorii liczb porządkowych w jego dziele z 1872 roku[433]. Przechodząc do późniejszej, bardziej formalnej[434] teorii liczb pozaskończonych, należy zwrócić uwagę na proces nie tyle samego ścisłego ich wprowadzenia przez Cantora, co również na kontekst ich wprowadzenia najpierw pod postacią nieskończonych zbiorów[435]. Dopiero w takiej postaci możemy spojrzeć na pełen zakres tego, co kryje się pod pojęciem liczby pozaskończonej. Możemy wtedy dostrzec chronologię powstawania poszczególnych elementów teorii mnogości, również w pracach Cantora, które tę teorię mnogości poprzedzały czy po niej następowały (w drugim przypadku będzie to raczej jego ogólne odniesienie do arytmetyki liczb naturalnych oraz do możliwości zredukowania jej do teorii mnogości). Tak możemy śledzić pewną ciągłość oraz przyczynowość przemian, które następowały w praktyce matematycznej Cantora oraz w jego podejściu filozoficznym, a przede wszystkim w kontekście ontologii matematycznych obiektów, opartych na obiektach podstawowych.

Tym, co najistotniejsze z filozoficznego punktu widzenia, jest po pierwsze zaskoczenie Cantora, jakie okazał gdy odkrył nierównoliczność zbiorów nieskończonych

fizyki (uznany za niematematyczny), hipoteza Riemanna (otwarta) czy (również otwarty) postulat badań nad topologią powierzchni algebraichnych i krzywych.

432 J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), red. E.N. Zalta, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/settheory-early/>.

433 G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*

434 Oprócz metodycznego formalizmu, przypisywanego Cantorowi (J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*), mowa tu o zwiększeniu poziomu formalizacji w pracach Cantora na przestrzeni czasu. Chodzi o tę formalizację, jaka zawsze (lub prawie zawsze) była wymagana w matematyce ze względu na jej naukową specyfikę (potrzeba przejrzystości, precyzji), choć standardy poziomów owej formalizacji również były różne dla różnych okresów historycznych. Z. Król, *Uwagi o stylu historycznym matematyki i rozwoju matematyki..., dz. cyt.*, 203.

435 Lub sumy nieskończonego procesu „powiększania" zbioru/zbiorów.

(głównie N i R)[436], po drugie zaś, jego usilne próby dowiedzenia postawionej przez siebie tezy o nieistnieniu zbioru, którego moc jest większa od mocy N oraz mniejsza od mocy R[437].

Obie te kwestie mogą potwierdzać przekonanie Cantora o istnieniu rzeczywistości matematycznej, której poznanie implikowałoby wiedzę na temat wszystkich matematycznych twierdzeń, obiektów i takih problemów jak np. Hipoteza Kontinuum. Jego próby usilnego udowadniania tej hipotezy, mogły świadczyć o dążeniu do poznania prawdy na ten temat, jak również mogły świadczyć o jego przywiązaniu do stworzonej przez siebie teorii mnogości. Badał ten problem przez okres 1878–1895, a także – pomimo niepowodzeń – publikował wyniki pracy nad tą kwestią. Można nawet dopuścić elementy intuicji (rozumianej w tym wypadku jako pozaracjonalne przekonanie)[438], która motywowała Cantora do badania takich problemów, jak właśnie Hipoteza Kontinuum (albo np. problem istnienia nieskończenie małych wielkości). Nie przedstawiał on bowiem konkretnych wyników, powodów ani też konkretnych kierunków analiz tych problemów. Jednakże z jakichś powodów chciał to badać i bardzo się w to zaangażował.

Drugą istotną kwestią jest zagadnienie aktualnie nieskończenie małych wielkości. Karl Weierstrass formalnie wykluczył owe wielkości z analizy, zastępując je pojęciem granicy, co widać u Cantora i Dedekinda i co potwierdza np. Hilbert. Jednak ostatecznie nie są one wykluczone w całości z matematyki: obecnie istnieje wiele opracowań, opisujących systemy niestandardowe, tj. zawierające nieskończenie małe wielkości. Posiadają one interesujący związek z ontologicznymi kwestiami, dotyczącymi geometrycznej linii prostej.

Na przykład John L. Bellprzykład pisze: „nieskończenie małą wielkość można uznać za to, co pozostaje po poddaniu kontinuum wyczerpującej analizie”[439].

Wcześniej wspomniano, że w XIX wieku odchodzono w matematyce od intuicji i dowodów geometrycznych na rzecz arytmetyzacji matematyki. Na przykładzie nieskończenie

---

436 Por. „und ich schliesse daraus, dass es unter den Inbegriffen und Werthmengen Wesenverschiedenheiten gibt, die ich bis vor kurzem nicht ergründen konnnte”. Por. G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 9.12.1873*, w: *Briefweschel Cantor-Dedekind*, red. J. Cavaillès, E. Noether, Paris 1937, 16.

437 Opracowywanie kwestii różnoliczności zbiorów nieskończonych było związane – jak zauważył sam Zermelo w przypisie do pracy Cantora z 1878 roku – z pracami nad Hipotezą Kontinuum. Por. G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik” 84, 242–258)..., dz. cyt.*, 133 przyp. 2.

438 R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics..., dz. cyt.*

439 J.L. Bell, *Continuity and Infinitesimals*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2017.

małych wielkości można dostrzec, iż te dwie płaszczyzny (arytmetyka i geometria) nie muszą być od siebie całkowicie odseparowane. Widać to również w kontekście podstaw matematyki, nawet analizy[440]. Z punktu widzenia analizy porównawczej istotne jest, że choć Cantor deklarował naukową niechęć do nieskończenie małych wielkości, nazywając je pejoratywnie „bakcylami cholery"[441], własność zupełności, charakteryzująca zbiór liczb rzeczywistych, może być spełniona przez zbiory zawierające te wielkości (nieskończenie małe). Natomiast własność ciągłości, którą zdefiniował Dedekind, aby scharakteryzować zbiór liczb rzeczywistych, nie jest spełniana w systemach niestandardowych[442]. Temat tej interesującej różnicy pomiędzy zarówno podejściem, jak i wynikami uzyskanymi przez obydwu matematyków zostanie omówiony w dalszej części.

To, że Cantor nie przyznawał nieskończenie małym istnienia (w przeciwieństwie do np. nieskończonych liczb porządkowych), związane było nie tylko z jego osobistymi preferencjami, ale i z ogólnie przyjętymi ówcześnie przekonaniami i postawami środowiska naukowego (jak program arytmetyzacji analizy).

Zestawiając u Cantora kwestie teoriomnogościowe z problemem nieskończenie małych[443], należy uznać rolę ontologii teorii mnogości za punkt odniesienia dla działalności matematyka. Z perspektywy przyjętej w rozprawie[444] nie podejmujemy analizy samych

[440] Oprócz tego, że zauważymy pewne aspekty tego na przykładzie analizy praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda, można podać przykład konstrukcji zbioru niestandardowego Paula du Bois-Reymonda, który wykorzystywał analizę tempa wzrostu funkcji. P.D. Bois-Reymond, *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions*, „Annali di matematica pura ed applicata" 4, (1870), 338–353.

[441] G. Cantor, *Letter from Cantor to Vivanti, December 13, 1893. Aus den Briefbüchern Georg Cantor...*, *dz. cyt.*

[442] P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych...*, *dz. cyt.*

[443] Obserwujemy zmienność założeń filozoficznych u Cantora w przypadku dwóch różnych aspektów nieskończoności – tj. wielkości aktualnie nieskończenie dużych (jak liczby kardynalne/moce zbiorów nieskończonych) oraz wielkości aktualnie nieskończenie małych, które Cantor nazywał potocznie „bakcylami cholery" w matematyce. Pomimo iż można argumentować za tym, że podejście Cantora do nieskończenie małych wynikało bezpośrednio z uzyskanych przez niego wyników badań matematycznych, to jednak po pierwsze owe dowodzenia wskazuje się jako błędne (por. np. z: P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective...*, *dz. cyt.*, 155; J. Dadaczyński, *Pojęcie nieskończoności w matematyce*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne" 35, (2002) nr 2, 267 przyp.3.), a po drugie, nie można wykluczyć u Cantora połączenia przedmatematycznej *intencji* wykluczenia nieskończenie małych, z mylną ich intuicją, jako potencjalnie nieskończenie małych.

[444] W niniejszej pracy: 1. po pierwsze porównujemy filozofie matematyki Cantora i Dedekinda, a żeby było to możliwe, należy porównanie to robić w oparciu o analizę przede wszystkim ich praktyki matematycznej, nie zaś w oparciu o artykułowane założenia filozoficzne matematyków, ponieważ te ostatnie są rozłożone nierównomiernie (filozoficznych tekstów Cantora jest znacznie więcej niż filozoficznych tekstów Dedekinda, co nie pozwoliłoby, bez szczegółowej odpowiedzi na pytanie „dlaczego Cantor wypowiadał się stosunkowo często z perspektywy matematycznej, zaś Dedekind prawie w ogóle?", na rzetelną analizę porównawczą wyartykułowanych założeń filozoficznych obu matematyków); 2. po drugie zaś, za pośrednictwem analizy

deklaracji Cantora, gdyż są dobrze znane. Jednakże należy zaznaczyć, że owo przywiązanie do teorii mnogości nie wyklucza związku tej teorii i wprowadzanych w niej struktur z kontekstem historyczno-społecznym, choćby poprzez pewne odniesienia do obiektów topologicznych, jakie były fundamentami tej teorii, a które były ówcześnie używane w środowisku matematycznym. Jako najprostszy przykład można tu podać pojęcie punktu skupienia, które Cantor przejął od Karla Weierstrassa[445], a które stanęło u podstaw jego zbiorów pochodnych, a w konsekwencji nieskończonościowych symboli i liczb.

Powyższe rozważania pokazują, że zarówno zastana wiedza, jak i przekonania środowiska naukowego miały znaczący wpływ na Cantora i jego matematyczną praktykę. Dodatkowo, zauważalne jest jego przywiązanie do teorii mnogości, co może niejako uzależniać ontologię matematyki Cantora od postrzegania ontologii tej dziedziny. Kwestia ta będzie go również różnić od Dedekinda.

Nieskończenie małe

Badając praktykę matematyczną, natrafiamy na głęboko w nią uwikłany problem nieskończoności, który jest kwestią nie tylko matematyki, ale również filozofii. Od czasów Arystotelesa w matematyce akceptowano jedynie nieskończoność potencjalną[446]. Nie oznacza to, że w żaden sposób nie odwoływano się do tzw. nieskończoności aktualnej. Niemniej jednak, zarówno dla Cantora, jak i dla Dedekinda temat ten stał się powodem zasadniczym, dla którego sięgali oni do poza- lub meta-matematycznych argumentów.

W kontekście rekonstruowanego w niniejszej pracy realizmu prześledzimy stosunek Cantora i Dedekinda do wielkości aktualnie i potencjalnie nieskończenie małych. Wykażemy, że mimo panującego wtedy paradygmatu ich odrzucania, obydwaj mieli odmienne podejście do tych wielkości w swojej matematycznej praktyce (może to wskazywać na większy, z jakichś powodów, wpływ paradygmatów środowiska naukowego na Cantora w porównaniu z Dedekindem), a także, że ich konstrukcje liczb rzeczywistych przyjmują zaskakująco nieoczekiwane relacje do systemów niestandardowych (tj. systemów zawierających wielkości aktualnie nieskończenie małe).

---

porównawczej, a także poniekąd dzięki niej, próbujemy odpowiedzieć (przynajmniej częściowo) na pytanie o związek między przypisywanymi do danego matematyka założeniami filozoficznymi a jego metodologią naukową, związaną z wyznawanymi pozamatematycznymi szeroko pojętymi intencjami.

[445] J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory*..., *dz. cyt.*

[446] G. Oppy i in., *Infinity*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.

Oprócz tego w innym miejscu skupimy się na kwestii tego, jak „umysłowe zetknięcie” z nieskończonością aktualnie dużą wpłynęło na analizowanych tutaj matematyków, ich zdolności poznawcze oraz stosunek do ontologii matematycznych obiektów.

Po propozycji Weierstrassa (który zastąpił nieskończenie małe wielkości granicami i językiem „delt i epsilonów”), jak zauważył Hilbert:

> „nieskończoność [...] pojawia się w nieskończonym ciągu liczbowym, który definiuje system liczb rzeczywistych, oraz w koncepcji systemu liczb rzeczywistych, który jest uważany za kompletną całość, istniejącą jednocześnie”[447].

W kontekście filozofii wydaje się istotną rzeczą, iż akceptacja nieskończoności aktualnej w matematyce przyniosła konkretne efekty, np. w postaci rozwiązania matematycznego problemu niewymierności, który został odkryty przez ucznia Pitagorasa[448].

Wiadomo jednak, że Cantor próbował formalnie zaprzeczyć istnieniu wielkości nieskończenie małych, podczas gdy istnienie wielkości nieskończenie dużych uzasadniał nie tylko narzędziami matematyki, ale i filozofii. O ile Cantor zamierzał wykluczyć nieskończenie małe wielkości z analizy matematycznej, a nawet – jak zostało wcześniej wspomniane – próbował udowadniać że nie istnieją[449], to nieskończenie małych zmiennych (potencjalnych) nie odrzucał.

[447] D. Hilbert, *Über das Unendliche*..., *dz. cyt.*, 183; Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 62–64.

[448] Zob. przypis 407.

[449] Kwestię wielkości aktualnie nieskończenie małych podsumował Bertrand Russell w: B. Russel, *Recent Work on the Principles of Mathematics*, „International Monthly” 4, (1901), 88–90. Napisał tam, że trzy problemy tradycyjnej filozofii matematyki zostały rozwiązane: kwestia nieskończoności i kontinuum zostały rozwiązane przez Cantora i Dedekinda, natomiast kwestia nieskończenie małych została uznana za niespójną i wyrzucona poza obręb matematyki przez Weierstrassa i resztę. Jednakże Ehrlich zauważa, że pomimo iż w XIX wieku *infinitesimals* zostały wyparte, to jednak zostały formalnie „przywrócone do łask w latach sześćdziesiątych XX wieku przez Abrahama Robinsona, w ramach narzędzi teorii modeli i logiki. Analiza niestandardowa stworzona przez Robinsona wprowadzała ściśle liczby nieskończone (nieskończenie duże) i nieskończenie małe. Por. P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*..., *dz. cyt.*, 1–2. Co więcej, niektórzy wyrażają przekonanie, iż owa analiza niestandardowa nadała ostatecznie sens pojęciu nieskończenie małej wielkości (aktualnie nieksończenie małej), która jest większa od 0, a przy tym mniejsza od każdej skończonej liczby. Por. A.W. Moore, *The Infinite*, London 1990, 69.. Fakt formalnego wprowadzenia aktualnie nieskończenie małych wielkości wymagał zrewidowania stanowiska opozycyjnego wobec *infinitesimals* w matematyce (por. J.W. Dauben, *Arguments, Logic and Proof: Mathematics, Logic and the Infinite*, w: *History of Mathematics and Education: Ideas and Experience”; Papers from the Conference held at the University of Essen*, red. H. N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte, Göttingen 1992.), lecz wypada dodać, że przede wszystkim ów fakt wymagał zrewidowania opozycyjnych stanowisk względem *infinitesimals* w filozofii. Wypada nadmienić, że obecnie pojęcie wielkości aktualnie nieskończenie małej jest wykorzystywane w zastosowaniach matematyki do problemów pozamatematycznych, jak fizyka czy nawet etyka. Por. K. Tytko, *Modele wartości godności człowieka i kwestia sprawiedliwości*, „Logos i Ethos” 55, (2020) nr 2,

Co więcej, traktował nawet jako pewną oczywistość, że: „Z punktu widzenia czystej analizy arytmetycznej, nie istnieją żadne nieskończenie małe wielkości, lecz [istnieją] zmienne wielkości stające się nieskończenie małymi”[450].

Warto zaznaczyć, że takie definiowanie nieskończenie małych zmiennych było wcześniej czymś normalnym (np. u Cauchy'ego). W słynnym dziele francuskiego matematyka[451] znajdujemy już na samym początkuwzmiankę o zmiennej, która staje się nieskończenie mała. Cauchy definiuje ją następująco: „Mówi się, że zmienna wielkość staje się nieskończenie mała, gdy jej wartość liczbowa maleje nieograniczenie, tak że jest zbieżna do granicy zero”[452].

Weierstrass, jako matematyk mający bezpośredni wpływ na Cantora (ponieważ był przez 30 lat profesorem na Friedrich-Wilhelms-Universität w Berlinie, tam właśnie wykładał między innymi dla Georga Cantora[453]) był twórcą nowego określenia ciągłości funkcji w języku „epsilon-delta”, które wprowadził w 1861 roku[454], a które dalej było rozwijane przez takich matematyków jak Heine, Dedekind czy Cantor[455]. Oczywiście mowa tutaj o ciągłości funkcji. Jednakże ciągłość zbioru wartości, dziedziny, jaką formułuje się, aby scharakteryzować np. zbiór liczb rzeczywistych, choć jest czymś innym, podlega podobnym schematom definiowania (a w XIX wieku uważano, iż ciągłość dziedziny jest konieczna dla ciągłości funkcji).

167–188, doi: http://dx.doi.org/10.15633/lie.3812; K. Tytko, *Wartość godności osoby w kontekście zależności społecznych. Modelowanie grafowe*, w: *Człowiek w relacji do... Rozważania o człowieku jako istocie relacyjnej*, red. G. Wąchol, Kraków 2020; C. Woźniak, *Analiza niestandardowa w mechanice newtonowskiej punktu materialnego*, „Mechanika Teoretyczna i Stosowana” 19, (1981) nr 3, 355–374..

[450] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)..., dz. cyt.*, 156–157; Tłumaczenie: G. Cantor, *O nieskończonych liniowych rozmaitościach punktowych (Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. Mathematische Annalen XX, 113–121. 1882)*, w: http://www.eudoxos.pl/tlumaczenia/.

[451] A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*, Paris 1821.

[452] Oryginał w języku francuskim brzmi następująco: „On dit qu'une quantité variable devient infiniment petit lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de maniére á converger vers la limite zero”. A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique..., dz. cyt.*, 26.

[453] G. Iwanowna-Sinkiewicz, *Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznej: M. Rolle, B. Bolzano, A. L. Cauchy*, w: *Dzieje matematyki polskiej II*, red. W. Więsław, Wrocław 2013, 177.

[454] K. Weierstrass, *Differentialrechnung. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersemester 1861*, w: H. Schwarz, P. Dugac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Paris 1972.

[455] G. Iwanowna-Sinkiewicz, *Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznej: M. Rolle, B. Bolzano, A. L. Cauchy..., dz. cyt.*, 177.

Definiując relację kongruencji pomiędzy ciągami, Cantor skorzystał z już istniejącego pojęcia granicy, które zastępowało nieskończenie małe. Jego definicja relacji kongruencji między ciągami była następująca: „$a_n - a'_n$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n”[456].

Należy zauważyć, iż Cantor, przypisując temu przypadkowi znaczenie równoważności granic obu ciągów, nie może formalnie wykluczać, że następujący przypadek: $b - b' = \frac{1}{\infty}$, gdzie symbol $\frac{1}{\infty}$ oznacza pewną nieskończenie małą wielkość (aktualną), tj. jest spełniony poza jego konstrukcją liczb rzeczywistych.

Błaszczyk na przykład pisze, że wystarczyłoby, żeby Cantor skorzystał z Aksjomatu Archimedesa, aby swoim systemie pozbyć się niechcianych nieskończenie małych. Jednak aksjomat ten nie został przez matematyka z Halle rozpoznany[457]. Można zastanawiać się, czy możliwe jest, iż Cantor (przynajmniej w zamiarze) w pewnym sensie wykluczył nieskończenie małe ową relacją kongruencji. Deklarował przecież ich odrzucenie (dopiero później zbudował dowód ich nieistnienia), jednak takie deklaracje, bez formalnego i wystarczająco zaznaczonego postulatu o niewystępowaniu nieskończenie małych w danej konstrukcji liczbowej, przywodzą na myśl równie ogólne wypowiedzi Cantora o możliwości i potrzebie zredukowania matematyki do teorii mnogości. Wydaje się, że w obu przypadkach zabrakło formalnego wyprowadzenia pewnych właściwości i zależności.

Następną kwestią, świadczącą o podejściu Cantora do aktualnie nieskończenie małych wielkości, jest fakt zbudowania formalnego argumentu przeciwko tym wielkościom. Warto zaznaczyć, iż uwzględniając podejście Cantora do nieskończenie małych, z technicznego punktu widzenia można przypuszczać, iż w pewnym sensie brał on pod uwagę możliwość ich „istnienia” na poziomie symbolicznym, jednak wykazywał nieprawdopodobność takiego podejścia[458] oraz sprzeczność ich właściwości z właściwościami wprowadzonych przez siebie nieskończonych liczb porządkowych.

---

[456] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 93; G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych...*, *dz. cyt.*, 170.

[457] P. Błaszczyk, *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 162.

[458] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)...*, *dz. cyt.*

To, co dla niego (z określonych powodów) oczywiste, nie było już takie dla Benno Kerry'ego, który pisał:

„Określone, nieskończenie małe liczby byłyby odpowiednio oznaczone jako:

$$\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega+1}, \ldots, \frac{1}{2\omega}, \ldots, \frac{1}{\omega^2}$$ " [459].

Cantor przygotował więc swój dowód na to, że nieskończenie małe wielkości są wewnętrznie sprzeczne. Wykorzystał przy tym pojęcie bliżej nieokreślonej „wielkości liniowej" (*lineare Grössenbegriffe*) względem nich i stwierdził, że symbolu $\frac{1}{\omega}$ nie da się pogodzić z pojęciem owej wielkości[460]. Obecnie wiadomo, że dowód Cantora na nieistnienie nieskończenie małych da się obalić w matematyce, przy założeniu odpowiednich warunków[461]. Wynika to stąd, że Cantor, formułując tezę o nieistnieniu nieskończenie małych, mógł nie określić wystarczająco dokładnie dwóch pojęć, które w tym stwierdzeniu oraz w jego dowodzie odgrywały istotną rolę: wielkości liniowej, ale również nieskończonej liczby porządkowej[462].

Sformułował on dwie zasady (aksjomaty), jakie wielkości liniowe powinny spełniać. Są one następujące:

1. Po pierwsze, suma dowolnych dwóch wielkości liniowych sama w sobie jest wielkością liniową. Philip Ehrlih komentuje, że ten aksjomat powoduje, iż zbiór wielkości liniowych jest uporządkowaną strukturą półgrupy $L(0,\omega_1)$ [463].

---

[459] B. Kerry, *Ueber G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen*, „Vierteljahresschrift für wissensch. Philos." 9, (1885), 212.

[460] „Der Beweis, daß Zahlgrössen von der Art $\frac{1}{\omega}$ sich selbst widersprechen, geht von den minimalsten Bedingungen aus, welchen lineare Grössenbegriffe zu genügen haben und zeigt, dass sie nicht in Einklang mit der in dem Symbol $\frac{1}{\omega}$ ausgedrückten Forderung zu bringen sind." G. Cantor, *Letter from Cantor to Kerry, February 4, 1887*..., *dz. cyt.*, 275–276; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*..., *dz. cyt.*, 29.

[461] Więcej na ten temat w: P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective*..., *dz. cyt.*

[462] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective*..., *dz. cyt.*, 151.

[463] G. Cantor, *Letter from Cantor to Kerry, February 4, 1887*..., *dz. cyt.*; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*..., *dz. cyt.*, 30–31.

2. Po drugie, wartość nieskończonej sumy, dobrze zdefiniowanych dodatnich wielkości liniowych $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$, jest równa najmniejszej górnej granicy jej sum cząstkowych $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3 \ldots$[464].

Swoją argumentację wewnętrznej sprzeczności wielkości typu $\frac{1}{\omega}$ oparł Cantor na założeniu, iż są one niezgodne z koncepcją wielkości liniowej, zdefiniowanej jak wyżej. Ma to jednak określone minusy. Po pierwsze, argumentacja ta nie wyklucza nieskończenie małych, zgodnych z jakąś inną koncepcji wielkości, a nawet z koncepcją wielkości liniowej zdefiniowaną inaczej – i było to krytykowane[465]. Po drugie, jak zauważają Piotr Błaszczyk i Marlena Fila, ważną motywacją Cantora walki z nieskończenie małymi było jego przekonanie o tym, iż te wielkości zagrażają jego teorii pozaskończonych liczb porządkowych[466].

Jak bowiem twierdził Cantor: „Fakt aktualnie nieskończonych liczb jest zatem tak małą podstawą dla istnienia aktualnie nieskończenie małych wielkości, że wręcz przeciwnie, niemożliwość tych ostatnich można udowodnić za pomocą tych pierwszych”[467].

Niekoniecznie musiał uważać wielkości nieskończenie małe za zagrożenie. Jednak mógł uważać je za niespójne ze swoją teorią pozaskończonych liczb porządkowych.

Kiedy się próbuje udowadniać sprzeczność istnienia nieskończenie małych w całej matematyce, nie jest jasne, czy Cantor popełnił błąd filozoficzny, czy raczej nieścisłość matematyczną lub logiczną (jak wskazują Laugwitz, a za nim Ehrlich)[468].

---

[464] G. Cantor, *Letter from Cantor to Kerry, February 4, 1887..., dz. cyt.*; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes..., dz. cyt.*, 30–31.

[465] P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes..., dz. cyt.*, 34.

[466] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective..., dz. cyt.*, 151.

[467] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)..., dz. cyt.*, 408.

[468] P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes..., dz. cyt.*, 105; D. Laugwitz, *Debates about infinity in mathematics around 1890: the Cantor-Veronese controversy, its origins and its outcome*, „N.T.M. Neue Serie. Internationale Zeitschrift Für Geschichte und Ethik der Naturwissenscaften, Technik und Medizn” 10, (2002) nr 1–3, 113–114.

Piotr Błaszczyk i Marlena Fila w sposób przejrzysty wskazują, iż dowód Cantora przeciwko istnieniu nieskończenie małych wielkości (aktualnych), przeprowadzony przez niego w 1887 roku[469], można obecnie uznać za błędny z matematycznego punktu widzenia.

Cantor założył najpierw istnienie pewnej dodatniej wielkości aktualnie nieskończenie małej ζ·ν (tj. takiej, że $\forall n \in N(\zeta < \frac{1}{n})$). Następnie stwierdził, że dla każdej pozaskończonej liczby porządkowej ν, produkt ζ·ν, jest mniejszy niż jakakolwiek wartość (wielkość) skończona[470]. Symbolicznie możemy za Filą i Błaszczykiem napisać tonastępująco:

$$(\forall n \in N)\left(\zeta < \frac{1}{n}\right) => (\forall \nu \in \mathrm{Ord})(\forall n \in N)\left(\zeta \cdot \nu < \frac{1}{n}\right).$$

Piotr Błaszczyk i Marlena Fila skupiają się przede wszystkim na tym, iż Cantor nie sprecyzował, czym była dla niego wielkość liniowa oraz produkt wielkości nieskończenie małej oraz pozaskończonej liczby porządkowej. Twierdzą również, że wielkość liniowa oznaczała dla Cantora liczbę rzeczywistą[471].

Błaszczyk w oparciu o podejście Leonharda Eulera podaje przykład uporządkowanego ciała niestandardowego, (F,+,·,0,1) z porządkiem liniowym, oraz działaniami zgodnymi z porządkiem, gdzie wyróżnia m.in. następujące podzbiory F:

$$\Psi = \{\mathrm{x} \in \mathrm{F}: (\exists \mathrm{n} \in \mathrm{N})(|\mathrm{x}| > \mathrm{n})\},$$

$$\Omega = \left\{x \in F: (\exists n \in N)\left(|x| < \frac{1}{n}\right)\right\},$$

w których obowiązuje m.in. jedna z zasad ΩΨ:

$$(\forall\, x \neq 0)(x \in \Omega \Leftrightarrow x^{(-1)} \in \Psi).$$

Można jeszcze inaczej zinterpretować kolejne zdanie z wywodu Cantora i zamiast poszukiwać błędu w założeniach filozoficznych oraz w eksplikacji matematycznej próbować

---

469 G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)..., dz. cyt.*

470 G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)..., dz. cyt.*, 408.

471 P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective..., dz. cyt.*, 152.

poszukiwać różnic w wizualnej reprezentacji umysłowej tych dwóch rodzajów nieskończoności, które związane byłyby ze wspomnianymi różnicami w ich ontologii.

Interpretując wcześniejsze rozumowanie, Cantor pisze:

„ζ nie może być uczynione skończonym przez żadne aktualnie nieskończone mnożenie [Vervielfachung], a zatem z pewnością nie jest elementem o skończonej wielkości. Zatem przyjęte przez nas założenie jest sprzeczne z koncepcją wielkości liniowej, która jest tego rodzaju, że według niego każda wielkość liniowa musi być traktowana jako integralna część innej wielkości, w szczególności wielkości skończonej. Nie pozostaje więc nic innego, jak odrzucić założenie, że istnieje wielkość ζ, która dla dowolnej skończonej liczby całkowitej n byłaby mniejsza niż $\frac{1}{n}$, i dzięki temu nasze twierdzenie zostało udowodnione”[472].

Cantor mógł postrzegać nieskończenie małe wielkości jako pozostające w nieustannym ruchu, który powodował ich „zanikanie”, a przez to ich nieuchwytność, stąd żadne „aktualnie nieskończone mnożenie” nie mogło uczynić z tych wielkości – wielkości „skończonych”. Oznaczałoby to bowiem, iż wielkości te mogą przestać się w pewnym momencie „zmniejszać”, a to z kolei przeczyłoby intuicji, jaka – jak sądzimy – była im przez Cantora przypisywana.

Uważał on, że iloczyn $\zeta\cdot v$, gdzie ζ jest nieskończenie małą, a v jest dowolnie dużą, pozaskończoną liczbą porządkową, jest mniejszy niż jakakolwiek skończona wielkość. To oznaczało, że mógł przypisywać nieskończoności małej większą „siłę”, niż miała według niego nieskończoność duża.

Jeśli weźmiemy dla przykładu ciało algebraiczne, jak proponują Piotr Błaszczyk i Marlena Fila – stworzone przy pomocy sumy i produktu (iloczynu) Hessenberga liczb porządkowych (*normal sums and products*), a także ram zbioru liczb nadrzeczywistych (*surreal numbers*), oraz podstawowych narzędzi teorii ciał uporządkowanych – możemy za nimi nadać znaczenie iloczynowi $\zeta\cdot v$ oraz pokazać, że równoważna alternatywa stwierdzenia Cantora:

$$(\forall\, n \in N)\, (\zeta < \frac{1}{n}) \Rightarrow (\forall\, v \in Ord)\, (\zeta \cdot v < 1)$$

[472] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)...*, *dz. cyt.*, 408.

nie jest spełniona, ponieważ:

dla każdej ζ istnieje $\zeta^{(-1)}$, t.ż. $\zeta^{(-1)}$ jest nieskończenie duża, a więc możemy znaleźć takie $\alpha > \zeta^{(-1)}$, że iloczyn $\zeta\cdot\alpha$ jest większy od 1, a iloczyn $\zeta\cdot\alpha^2$ jest nieskończoną liczbą nadrzeczywistą[473].

W powyższym kontekście można również przedstawić przypuszczenie, że formułując dowód przeciwko nieskończenie małym wielkościom, Cantor miał tak naprawdę na myśli, iż wielkości te nie mogą istnieć inaczej niż tylko jako potencjalnie nieskończenie małe. A jako że są potencjalnie nieskończenie małe, nigdy nie znajdziemy „aktualnie” nieskończenie dużej liczby, która by taką wielkość „przeprowadzić” do – przynajmniej – wielkości skończonej.

Matematyk z Halle, twierdząc, że iloczyn $\zeta\cdot v$ będzie zawsze nieskończenie mały (a np. skończony lub nieskończenie duży), mógł mieć na myśli, że dla żadnej v (równej $\zeta^{(-1)}$), nie możemy znaleźć $\alpha > v$, jeśli ζ zależy od czasu (jest opisywana przy pomocy symboli iteracyjnych – ζ_{ti}), ponieważ jeśli w chwili t_0, wielkość $\zeta_{t0} = \zeta$, to w chwili t_1, wielkość $\zeta_{t1} < \zeta_{t0}$, natomiast w chwili t_2, $\zeta_{t2} < \zeta_{t1} < \zeta_{t0}$. Możemy dla każdego v równego $\zeta_{tm}^{(-1)}$zawsze znaleźć takie n, że dla czasu tn, $\zeta_{tn} < \zeta_{tm}$, a wtedy $\zeta_{tn}^{(-1)} > \zeta_{tm}^{(-1)}$. Wtedy iloczyn $\zeta_{tn}\cdot\zeta_{tm}^{(-1)} = \frac{\zeta_{tn}}{\zeta_{tm}}$ nie byłby skończony, a tym bardziej nadrzeczywisty.

Cantor jednak powyższego nie wyartykułował bezpośrednio, chociaż pisał np. „w przypadkach, gdy równanie $\xi + \alpha = \beta$ jest rozwiązywalne dla ξ, często zdarza się, że spełnia je nieskończenie wiele wartości liczbowych ξ; ale spośród tych różnych rozwiązań jedno zawsze będzie najmniejsze”[474].

Oprócz tego, że byłoby to podejście błędne pod względem matematycznym (można pokazać, iż taki produkt $\zeta\cdot v$, nie musi być nieskończenie mały, może być większy od 1, ale

---

[473] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective*..., *dz. cyt.*, 174–176.

[474] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)*..., *dz. cyt.*, 201–202; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*..., *dz. cyt.*, 37; W. Ewald, *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*..., *dz. cyt.*, t. 2, 913.

również może być nieskończenie duży – wszystko zależy od tego, jak dobierzemy obydwie wielkości ζ oraz v), stąd to podejście jest niepełne pod względem filozoficznym.

Powyższe spostrzeżenie wymaga jednak dodatkowych, odrębnych badań, w których zakres wejdą zarówno analizy matematyczne, jak i filozoficzne, określające rodzaj intuicji, która mogła wpływać na decyzje naukowe Cantora (zawierające także porównanie intuicji przypisywanej matematykowi z Halle z tą, jaką można przypisać Dedekindowi).

W kontekście przedstawionych tu analiz zauważmy kilka istotnych kwestii. Przede wszystkim Cantor próbował udowodnić „nieistnienie" aktualnie nieskończenie małych wielkości w całej matematyce[475] (a nie tylko w zbiorze liczb rzeczywistych lub teorii mnogości). Obecnie wiadomo zaś, że można ich używać w matematyce[476]. Do tego Cantor przywiązany był naukowo do wprowadzonych przez siebie aktualnie dużych nieskończonych liczb porządkowych, a w celu uzasadniania ich istnienia sięgał nawet po argumenty poza-matematyczne.

W związku z powyższym, można również stwierdzić że Cantor rozróżniał ontologię nieskończenie dużych i nieskończenie małych wielkości. Tym pierwszym przyznawał aktualność, rodzaj zebrania w całość nieskończonego procesu (nawet w kontekście intuicji wizualnej)[477], te drugie pozostawały nieskończonym procesem. Uważamy, iż nie robił tego na podstawie racjonalnych przesłanek, a raczej na podstawieprzejętych postaw oraz przekonań.

---

[475] Nie tylko nazwał nieskończenie małe np. „bakcylami cholery" (por. G. Cantor, *Letter from Cantor to Vivanti, December 13, 1893. Aus den Briefbüchern Georg Cantor..., dz. cyt.*), wyrażając tym jedynie zgodę i stanowcze poparcie dla paradygmatu opracowania analizy wyłącznie na liczbach rzeczywistych. Lecz dodatkowo, jeszcze wcześniej próbował udowodnić niespójność owych nieskończenie małych (G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)..., dz. cyt.* Innymi słowy, próbował formalnym językiem matematycznym pokazać jako błędne korzystanie z nieskończoności aktualnej zamiast potencjalnej, w przypadku nieskończenie małych wielkości.

[476] Można zapoznać się z częścią matematyki niestandardowej np. w pozycji: H.J. Keisler, *Foundations of infinitesimal calculus*, Prindle 1976; K.D. Stroyan, W.A.J. Luxemburg, *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, New York 1976.

[477] Cantor, dyskutując próbę udowodnienia niemożliwości istnienia aktualnie nieskończonego odcinka linii, autorstwa Constantina Gutberleta, pisze: „Tutaj wielkość wyobrażonej rzeczywistej nieskończonej linii *AO* odpowiada najmniejszej liczbie porządkowej pozaskończonej oznaczonej przeze mnie przez ω, zatem powyższe twierdzenie obejmuje równanie $1+\omega = \omega$, o którym również wiadomo, że nie zawiera najmniejszej sprzeczności, gdzie $1 = A'A$ jest po lewej stronie, co oznacza Augendus [augend] i $\omega = AO$ jest Addendus [addend]. Jednak dla porównania $\omega+1$... jest liczbą pozaskończoną różną od ω, a konkretnie całością pozaskończoną, następującą po najmniejszej liczbie porządkowej ω; jednakże to drugie nie ma zastosowania w twoim przykładzie, gdzie dla ciebie Augendus jest skończoną wielkością $1 = A'A$ leżącą w skończoności, a Addendus $AO = \omega$ jest aktualną nieskończonością". G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)..., dz. cyt.*, 397–398; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes..., dz. cyt.*, 38.

Może to być argumentem bezpośrednio przeciwko przypisywanemu Cantorowi i deklarowanemu przez niego platonizmowi.

Cantor nie określił relacji pomiędzy nieskończenie dużymi wielkościami a wielkościami nieskończenie małymi. Jest to rzecz, jaką należało zrobić, aby dostatecznie ująć i wyjaśnić strukturalny (relacyjny) sens nieskończoności matematycznej tak, jak robi to współczesna teoria ciał uporządkowanych[478]. W swoim dowodzie Cantor postrzegał nieskończoność w sposób niesprecyzowany, również pod kątem filozoficznym. Nie dookreślił jak mają się do siebie obie nieskończoności, jaki jest cel (sens) ich wprowadzania lub odrzucania. Stąd postulujemy, że Cantor zasadniczo różnił się w swoim podejściu od Dedekinda.

Podsumowując, Cantor mógł błędnie wnioskować, że nieskończenie małym wielkościom można przyznać jedynie aspekt potencjalności, jako jedyny sposób traktowania takich wielkości w całej matematyce. Co prawda, nie było nic dziwnego ani błędnego w tym, że pozostając pod wpływem Bolzano, Cauchy'ego czy Weierstrassa (swojego nauczyciela), podtrzymywał ich paradygmat, zgodnie z którym nie należało sięgać poza konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych (np. po wielkości nieskończenie małe, które miała wykluczyć arytmetyzacja analizy). Jednakże poglądem tym próbował ograniczyć całą matematykę. Świadczy to o wpływie obowiązujących paradygmatów, o przywiązaniu do teorii mnogości i nawet o wynikającej z przyzwyczajeń, na praktykę matematyczną Cantora, a przez to – częściowo – na ontologię jego podstaw matematyki.

Wewnętrzny realizm ontologiczny Cantora

W tym podrozdziale zamierzamy pokazać, że tak jak w przypadku Dedekinda, teorie Cantora zakładały podstawową, wewnętrzną względem indywidualnej praktyki matematycznej ontologię, rozumianą jako istnienie podstawowych, pierwotnych obiektów matematycznych. Cantor przede wszystkim zdaje się traktować jako pojęcia pierwotne liczby wymierne, a także zbiory. Co prawda z biegiem czasu skłaniał się do twierdzeń, iż cała matematyka jest teorią mnogości – liczby wymierne mogłyby w tym kontekście stracić miano pojęć pierwotnych. Jednakże nie przedstawił formalnie tej propozycji, więc pokażemy, iż podstawowa ontologia u Cantora była oparta zarówno o liczby wymierne, jak i same zbiory.

[478] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective…, dz. cyt.*

Obiekty podstawowe

Poczynania Cantora, utrwalone w artykule z roku 1871, umotywowały i rozpoczęły intensywniejsze prace nad badaniem – w sposób bardzo ogólny – własności dziedziny funkcji. Innymi słowy – Cantor zaczął badać własności i budowę różnych zbiorów i podzbiorów, co zaprowadziło go do pracy nad konstrukcją zbioru liczb rzeczywistych, jak również liczb porządkowych i kardynalnych. Już w 1872 roku, Cantor opublikował artykuł[479], w którym zamieścił swoją konstrukcję tego zbioru. Dziedzina funkcji miała być w zamierzeniu ciągła, więc oczywistym wydaje się fakt, iż Cantor w pierwszej kolejności opracował formalną konstrukcję tego ciągłego zbioru (tj. liczb rzeczywistych). Zajął się w tej pracy również ogólniejszą teorią zbiorów[480], stąd można sądzić, iż tak naprawdę konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych była częścią teorii mnogości Cantora, a więc jego założenia filozoficzne dotyczące przedmiotu i podmiotu matematyki, w późniejszym czasie wyraźnie przez niego przedstawiane, mogły dotyczyć również teorii liczb rzeczywistych, naturalnych, a nawet teorii liczb w ogóle.

Cantor zaczyna swą konstrukcję liczb rzeczywistych od uwagi, iż liczby wymierne stanowią podstawę dla innych wielkości liczbowych. Pisze on: „Liczby wymierne stanowią podstawę dla ustalenia szerszego pojęcia wielkości liczbowej; będę je oznaczał jako dziedzinę *A* (z włączeniem zera)”[481].

Pisząc o szerszym aspekcie pojęcia liczby, ma na myśli liczby niewymierne, które konstruuje na podstawie tych przyjętych *a priori* – czyli liczb wymiernych. Należy zauważyć, że w tym miejscu nie robi żadnych filozoficznych odniesień odnośnie do ontologii i epistemologii związanej ze zbiorem liczb wymiernych czy też z pojedynczymi liczbami wymiernymi. Skupia się na konstrukcji matematycznej, nie zaś na tym, aby sposób czy zasadność tej konstrukcji pokazywać. Interpretujemy to następująco, że przyjmuje ich istnienie *a priori*[482].

---

[479] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)..., dz. cyt.*

[480] Chodzi o pierwszy sygnał o zbiorach pozaskończonych – więcej na ten temat znajdzie się w rozdziale następnym, dotyczącym teorii mnogości.

[481] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen” 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 92–93. Tłumaczenie pochodzi z: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych..., dz. cyt.*

[482] Można się w tym miejscu zastanowić, jak Cantor postrzega istnienie liczb wymiernych. Czy jego podejście aprioryczne może świadczyć o założeniach platonistycznych (podobnie jak u pitagorejczyków – liczba

Matematyczny problem konstrukcji liczb rzeczywistych, inaczej – problem niewymierności – był związany z filozoficznymi pytaniami o same liczby, własność ciągłości ich zbioru oraz kwestię nieskończoności. Historycznie w starożytności niemożność rozwiązania problemu niewymierności pozostawała w związku czasowym ze specyficznym rozumieniem i postrzeganiem liczb jako podstawowych elementów, które stanowią fundament nie tylko matematyki, ale otaczającego świata zewnętrznego. W XIX wieku, nie tylko już nie przypisywano liczbom takiej roli, ale starano się je świadomie oddzielać od geometrycznych konotacji. Konstruowano je przy pomocy metod arytmetycznych.

Własność ciągłości, jakiej oczekiwano w analizie od zbioru liczb rzeczywistych, również miała być opisana w języku arytmetyki, nie zaś przy pomocy aksjomatów geometrii. Stąd powstała koncepcja, która w starożytności nie spotkałaby się z entuzjastycznym przyjęciem[483] – była to koncepcja kontinuum punktowego. Jak zobaczymy, podstawą matematycznej konstrukcji liczb rzeczywistych, zarówno u Cantora, jak i u Dedekinda, była filozoficzna idea kontinuum, złożonego z punktów. O ile jednak u Cantora liczby rzeczywiste były granicami nieskończonej ilości, nieskończonych ciągów liczb wymiernych, u Dedekinda liczby te były wyznaczane przez przekrój, będący relacją między dwoma nieskończonymi podzbiorami zbioru tych liczb. To ukazuje bardziej skomplikowaną naturę, jaką w XIX wieku przypisywano liczbom, w porównaniu do prostej natury pojedynczych elementów tworzących zbiór, jak postrzegano je w matematyce greckiej okresu klasycznego. U Cantora liczba była skonstruowana bezpośrednio z nieskończonego zbioru (klasy) równoważnych wielkości liczbowych albo odpowiadał jej nieskończony zbiór ciągów kongruentnych.

Jednym z pojęć, na które warto zwrócić uwagę przy ustalaniu genezy teorii mnogości u Cantora, są *zbiory pochodne*. Interesujące jest zwłaszcza to, do czego służyły one Cantorowi i w jakim kierunku teoria tych zbiorów była przez niego rozwijana[484]. Można w tym miejscu również powiedzieć, iż Cantor rozpatrywał zbiory punktów (czy punkty) jako odpowiedniki

---

jest oczywistą podstawą wszystkiego), czy też jest po prostu konsekwencją pewnego „nawyku" umysłowego, oswojenia i przyzwyczajenia umysłu w procesie nauki i powtarzania do pojęcia/bytu liczby wymiernej, również z uwagi na dość prosty kontekst przekazywania o niej wiedzy.

[483] J.L. Bell, *Continuity and Infinitesimals...*, *dz. cyt.*

[484] Więcej na temat kontekstu tej idei w rzeczywistej analizie, można znaleźć w: J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite...*, *dz. cyt.*; J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel 1999; M. Hallett, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford 1984; A. Kanamori, *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, „Bulletin of Symbolic Logic" 2, (1996), 1–71; S. Lavine, *Understanding the Infinite*, Cambridge, MA 1994.

zbiorów liczb rzeczywistych (tj. w ich miejsce, zanim były wprowadzone formalnie jako matematyczne narzędzie). Początek badania owych zbiorów był związany z badaniem *zbiorów wyjątkowych* w twierdzeniu o jednoznaczności reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny[485]. Cantor modyfikował warunki, które zapewniały taką jednoznaczną reprezentację, skupiając się w zasadzie na właściwościach jakościowych dziedziny funkcji (czy jej zbioru wartości), a w szczególności na zbiorach punktów, które można „wyjąć z dziedziny", tak żeby jednoznaczna reprezentacja funkcji przez szereg była dalej możliwa. W związku z takim podejściem Cantor musiał (lub chciał) się skupić na ścisłym i formalnym opisywaniu i charakteryzowaniu zbiorów punktów. Zaczął oczywiście od „wyłączania" skończonych zbiorów punktów[486], natomiast bardzo szybko zapowiedział uogólnienie takiego wyłączenia[487]. W 1872 roku rozszerzył owe skończone zbiory punktów, które wyłączone z dziedziny, nie powodowały, że twierdzenie o jednoznaczności przestawało obowiązywać[488], na zbiory nieskończone.

[485] Historia problemu jednoznaczej reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny sięga połowy XVIII, kiedy Euler i Bernoulli badali zagadnienie drgającej struny. Zadali oni wtedy matematyczne pytanie, czy funkcję periodyczną o okresie 2π, da się rozwinąć w następujący szereg trygonometryczny:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx).$$

Powyższy problem przez cały czas ewoluował, a w czasach kiedy Cantor prowadził działalność naukową, przybrał postać pytania o to, jakie coraz ogólniejsze warunki musi spełniać funkcja, aby była możliwa reprezentacja przez szereg trygonometryczny. Por. A. Sachse, *Essai historique sur la representation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une serie trigonometrique..., dz. cyt.*

[486] G. Cantor, *Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daβ eine für jeden reelen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läβt..., dz. cyt.*

[487] *„Diese Erweiterung des Satzes ist keineswegs die letzte; es ist mir gelungen, eine ebenfalls auf strengem Verfahren beruhende, um vieles weitergehende Ausdehnung desselben zu finden, welche ich bei Gelegenheit mitteilen werde".* G. Cantor, *Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daβ eine für jeden reelen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läβt..., dz. cyt.*, 85. Polskie tłumaczenie: „To rozszerzenie twierdzenia nie jest bynajmniej ostatnim; Udało mi się znaleźć znacznie szersze rozszerzenie tego twierdzenia, które również opiera się na ścisłych procedurach i które będę od czasu do czasu komunikować" [tłum. K.T.].

[488] Por. *„Die hier beabsichtigte Ausdehnung besteht darin,* daβ für eine unendliche Anzahl von Werten des *x* im Intervalle (0,2π) auf die Konvergenz oder auf die Übereinstimmung der Reichesummen verzichtet wird, ohne daβ die Gültigkeit des Satzes aüfhort*".* G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 92. Niektórzy twierdzą, że pomysł rozszerzenia zbiorów na nieskończone mógł być inspirowany pracą H. Henkela, który wskazywał na rolę pewnych charakterystycznych zbiorów punktów w badaniu funkcji. Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 27; W. Purkert, H.J. Ilgadus, *Georg Cantor 1845-1918*, Leipzig 1985, 35–36.

Lektura tej pracy przez Cantora jest udokumentowana jego recenzją. Por. G. Cantor, *Rezension der Schrift von H. Hankel Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, Tübingen 1870*, „LitZB" 22, nr 7, 150–151.

Praca nad zbiorami punktów, która w latach osiemdziesiątych XIX wieku doprowadziła Cantora do wymyślenia (czy raczej sformalizowania i skrystalizowania) pojęcia/konstruktu liczb pozaskończonych[489], była jednym z punktów zwrotnych w jego działalności matematycznej. Od tego momentu zaczął pracować bardziej abstrakcyjnie i skupił się również nad ogólną teorią mnogości, niezależnie od szczegółowych analiz związanych ze zbiorami punktów i ich topologią, do jakich wagę przywiązywał do połowy lat osiemdziesiątych XIX wieku. Od tej pory badał więc pozaskończone liczby kardynalne, porządkowe oraz ogólne typy porządków[490].

To wszystko (owa szersza, bardziej formalna perspektywa prac nad teorią mnogości, ale również konstrukcja R) było możliwe poprzez wprowadzenie przez Cantora pojęć pierwotnych (mamy na myśli ogólnie zbiory, liczby wymierne), które były dla niego dane *a priori*, a nawet – można przypuszczać – że aprobowane w związku z tym, przez intuicję matematyczną, lub oczami „wyobraźni matematycznej"[491]. Jak widać jednak, w dalszym rozwoju teorii mnogości, jak i w konstrukcji liczb rzeczywistych, żadne z pojęć zbiorów oraz liczb nie zyskują jednoznacznie przypisanej roli pierwszeństwa (pewnej uprzedniości) przed drugim. Dlatego obydwa mogą stanowić pojęcia podstawowe w analizowanych fragmentach matematyki Cantora.

---

[489] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 (Mathematische Annalen 21 (1), 51–58)..., dz. cyt.*; G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*; J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics..., dz. cyt.*

[490] J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory..., dz. cyt.*

[491] Nie mamy tu na myśli intuicji potocznej czy też potocznej wyobraźni z nią związanej, ale intuicję matematyczną. Z taką intuicją jest związana wizualizacja, wyobraźnia matematyczna. Davis i Hersh w kontekście rozumienia intuicji przez samych matematyków charakteryzują intuicję jako pewnego rodzaju niekompletne przeciwieństwo ścisłości, ujęcie holistyczne i wizualistyczne, w przeciwieństwie do ujęcia analitycznego i szczegółowego. Intuicja według nich jest prawdopodobna lub przekonująca, a także oparta na fizycznych modelach czy charakterystycznych przykładach. (J.P. Davis, R. Hersh, *Świat Matematyki*, Warszawa 1994, 340–341.). Niektórzy uważają, że intuicja może być również częścią racjonalnego rozumowania (na styku świadomości i podświadomości), wykorzystywaną w modelach myślowych. Przejawia się jako sztuka kojarzenia różnych wiadomości, i na tej podstawie prowadząca do poszerzania wiedzy o nowe fakty, powstałe w wyniku połączenia wcześniej znanych (E. Aronson, T.D. Wilson, R.M. Akert, *Psychologia społeczna*, Poznań 1997, 135.). Jako zdolność umysłu do przetwarzania ogromnej ilości danych, zważywszy na to, iż umysł człowieka nie jest komputerem, który te dane może przetwarzać nieporównywalnie szybciej, intuicja przenosi większość danych do podświadomości, a następnie przejawia potencjał przetwarzania i wykorzystywania owych skumulowanych doświadczeń. D.G. Myers, *Intuicja. Jej siła i słabość*, tłum. A. Sosenko, Wrocław 2004; J. Perikh, *Intuition: the new frontier of management*, Oxford UK 1994, 38.

Wydaje się, że fakt, iż Cantor nie zdefiniował formalnie pojęcia nieskończoności ani zbioru nieskończonego[492], może świadczyć o specyficznym elemencie w jego podejściu do nieskończoności. Mamy tu na myśli akt woli, kierujący umysł w kierunku konkretnych „przedmiotów" matematycznych oraz nadający kierunek postępowania w ramach badania owych przedmiotów. Możemy stwierdzić, że przedmiotem jego badań, tym, co było w sposób podstawowy obecne w jego praktyce matematycznej w zakresie teorii mnogości, były zbiory – również zbiory nieskończone. O podejściu Cantora do zbiorów nieskończonych, w tym do nieskończoności aktualnej, oraz o tym, jak świadczyło to o postrzeganiu przez niego wewnętrznej (względem praktyki matematycznej) ontologii matematycznych obiektów, napiszemy w kolejnym podrozdziale. Niemniej jednak w ramach całej pracy podtrzymujemy stanowisko, iż jego podejście do nieskończoności było częściowo pozamatematyczne oraz silnie platonistyczne.

Nawet jeśli pojawiają się podejścia, które stwierdzają zmiany w założeniach filozoficznych czy w praktyce matematycznej Cantora na przestrzeni jego działalności, nie muszą one wykluczać przedstawionego w niniejszej pracy całokształtu praktyki matematycznej, dlatego, że pojęcie praktyki matematycznej obejmuje całokształt założeń i działań (definiuje właściwości praktyki matematycznej danego matematyka), nie zaś poszczególne poglądy względem okresów historycznych czy problemów[493].

Jeśli chodzi o dokładniejszy opis sposobu istnienia wymienionych obiektów podstawowych w praktyce matematycznej Cantora, można zestawić proponowany tu pragmatyczny realizm z przypisywanym mu przez Dadaczyńskiego quasi-nominalizmem,

[492] W przeciwieństwie do Dedekinda. U Cantora znajdujemy jedynie twierdzenie, w którym występuje własność, która to w definicji Dedekinda zbioru nieskończonego dzieli zbiory na skończone i nieskończone. G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)...*, *dz. cyt.*, 119. Dopóki Cantor nie zaczął formalizować swojej teorii oraz nie zapoznał się z definicjami zbiorów nieskończonych Bolzano i Dedekinda, posługiwał się pojęciem nieskończoności/zbioru nieskończonego w sposób intuicyjny. Należy przypomnieć, że Bolzano, choć wcześniej sformułował ową definicję, nie był tak znany, a jego dzieło w którym ta definicja została zapisana, opublikowane zostało po jego śmierci, dopiero w 1851 roku.

[493] Ogólnie chodzi o całość podejścia do matematyki, do jej uprawiania, na którą składają się przeróżne elementy (jak np. metodologia, zakres zagadnień, sposoby ich rozwiązywania, ich kontekst i rozumienie, stosowalność, ogólne kierunki działań, poziomy formalizacji, abstrakcji czy uporządkowania, itd.). Pomocne dla określenia powyższego mogłoby być pojęcie stylu, niemniej jednak nie wykorzystujemy go w niniejszej pracy do określania indywidualnej praktyki matematycznej – wymaga to kolejnych badań. Style w matematyce można rozróżniać ze względu na okresy historyczne, dany zakres kulturowy i społeczny, czy właśnie ze względu na sam podmiot matematyczny. P. Mancosu, *Mathematical Style*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta.

który kojarzony jest z formalizmem metodycznym Hilberta (Dadaczyński twierdzi, że w swoim podejściu Cantor przejawiał ślady przedhilbertowskiego formalizmu)[494].

W początkowej fazie samodzielnej działalności naukowej Cantor polegał na pewnej głębokiej i szczegółowej dedukcji (ekstrapolacji „w głąb") wybranych zagadnień matematycznych; co następnie prowadziło do odkrywania i przedstawiania nowych pojęć, struktur i zależności matematycznych. W ramach uzasadniania matematycznych odkryć powoływał się również na filozoficzne założenia platonistyczne („odkrywanie" matematyki). Jednocześnie jednak, zwłaszcza pod koniec swojej działalności naukowej, opierał się na dopracowywaniu formalnych zasad swoich odkryć. W pewnym sensie więc formalizacja wprowadzonej teorii mnogości była dla niego istotna.

Jednak jeśli ów pragmatyczny realizm skojarzymy z poglądowością i praktycyzmem, to quasi-nominalizm powinniśmy skojarzyć raczej z odmianą uprawiania matematyki, jako wysoce abstrakcyjnej i oderwanej od rzeczywistości otaczającej człowieka i jego potrzeby[495]. Jak wskazuje Piotrowska (za Murawskim), dla samego Hilberta, matematyka jako taka nie była jedynie systemem formalnym, zwłaszcza bez zawartości treściowej[496] – formalizm Hilberta służył jedynie jako narzędzie do zrealizowania programu, polegającego na „ugruntowaniu" matematyki.

Stwierdzenie, że Cantor zasłużył na miano przedhilbertowskiego formalisty metodycznego, nie do końca jest jasne w kontekście jego przekonań odnośnie do matematycznego poznania. Oprócz tego, że – jak wskazujemy w dalszym ciągu pracy – uważał, iż źródłem poznania matematycznego jest wiedza *a priori*, uważał również, iż jest ona w dodatku w jakiś sposób – oderwany niejako od treści – odkrywana na drodze dedukcyjnego definiowania pojęć (tj. budzenia ich do życia, ponieważ one istniały już wcześniej, niezależnie od poznającego podmiotu). Dodatkowo, pod względem technicznym, Cantor nie stosował, jak Hilbert, na przykład metody aksjomatycznej (która wtedy jeszcze była niedopracowana).

---

494 J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1...*, *dz. cyt.*, 9.

495 Por. z podziałem sposobu uprawiania matematyki, jaki dokonał Ludwig Bieberbach. E. Piotrowska, *Obraz i wizja matematyki Davida Hilberta*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 21, (2013) nr 1, 139–140.

496 R. Murawski, *Rozwój programu Hilberta*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego" XXX, (1993), 57; E. Piotrowska, *Obraz i wizja matematyki Davida Hilberta...*, *dz. cyt.*, 137.

Niemniej jednak, jeśli quasi-nominalizm przypisywany Cantorowi skojarzyć z podejściem Hilberta, mogłoby się okazać, iż może on być kompatybilny z realizmem pragmatycznym, proponowanym w niniejszej pracy jako podstawowa propozycja ontologii matematycznych obiektów. Nie wykluczałby wtedy swoistej poglądowości (rozumianej jako możliwość jakościowego „oglądu" matematycznych obiektów) oraz praktycyzmu (rozumianego jako konstruowanie matematycznych obiektów z intencją rozwiązania konkretnych problemów matematyki).

Podsumowując: w tym paragrafie opisaliśmy dwa pojęcia (obiekty), jakie można uznać za określające podstawowe obiekty względem praktyki matematycznej Cantora – chodzi o liczby oraz zbiory[497]. Uznajemy również, że można określić liczby oraz zbiory, traktowane przez niego jako podstawowe, mianem pojęć treściowo wypełnionych. Nie zaznaczał w ich przypadku (jak robił to odnośnie do definiowania granic lub w przypadku opisywania zbioru pustego), że są to „tylko" pojęcia, symbole.

Osłabienie ontologii w kontekście wielkości nieskończenie dużych

Jak wspomina Dadaczyński, to że Cantor formalnie wprowadził i bronił nieskończoności aktualnej w matematyce, nie oznacza, iż wcześniej matematycy się nią – choćby intuicyjnie – nie posługiwali. Rozróżniano na przykład zbiory skończone i nieskończone w analizie[498]. Uważamy, iż Cantor mógł przejąć owo intuicyjne, niedookreślone podejście do zbiorów nieskończonych. Oznacza to, iż – jak wskazaliśmy wcześniej – pojęcie zbioru nieskończonego mogło być dla Cantora pojęciem pierwotnym, takim, którego nie trzeba definiować. Jeśli chodzi o samo pojęcie zbioru, Cantor próbował je definiować w sposób ogólny, ale robił to w późniejszym etapie swojej działalności naukowej. Stąd również możemy założyć, iż mogło być ono początkowo zaliczane przez niego do pojęć pierwotnych.

[497] W niniejszej pracy nie będziemy szerzej zgłębiać tego problemu – wymagałoby to pogłębionej analizy nie tylko tekstów matematycznych Cantors, ale również filozoficznych, których nie potrzebujemy w takim stopniu do przeprowadzanej analizy porównawczej dorobku Cantora i Dedekinda. W ogólnym sensie chodziłoby tutaj o relację pierwotne-wtórne, jeśli chodzi o liczby i punkty/zbiory. Wydaje się, że u Cantora nie ma wyraźnie zarysowanej opozycji pierwotne-wtórne, mimo że sam deklaruje chęć sprowadzenia np. arytmetyki liczb naturalnych czy w ogóle całej matematyki do teorii mnogości (w tym sensie teoria mnogości byłaby bardziej podstawowa, a więc pierwotna, a reszta matematyki wtórna) oraz zbiory nazywa liczbami (np. porządkowymi). Warto pamiętać, iż teoria mnogości wywodzi się u Cantora w linii prostej z analizy, gdzie używano już liczb (choćby wymiernych), a zbiory są tworzone z liczb (bez względu na to, czy mówimy o wielkościach mierzalnych, czy policzalnych – w potocznym znaczeniu). Propozycję Cantora do samego pojęcia liczby w ogóle przedstawia Dadaczyński w: J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 43–46.

[498] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 25–26, przyp.72.

W 1882 roku Cantor twierdził o zbiorze co następuje:

„Rozmaitość (agregat [*Inbegriff*], zbiór) elementów, które należą do dowolnej sfery pojęciowej, nazywam dobrze zdefiniowaną, jeśli na podstawie jej definicji i w konsekwencji logicznej zasady wykluczonego środka należy ją uznać, że jest wewnętrznie ustalone, czy dowolny przedmiot tej sfery pojęciowej należy do rozmaitości, czy też nie, a także, czy dwa przedmioty w zbiorze, pomimo formalnych różnic w sposobie ich podania, są równe, czy nie. Ogólnie rzecz biorąc, w praktyce nie można dokonać z pewnością i dokładnością odpowiednich rozróżnień na podstawie obecnie dostępnych możliwości lub metod. Ale to nie ma znaczenia. Jedynym problemem jest wewnętrzna determinacja, z której w konkretnych przypadkach, gdy jest to wymagane, rzeczywista (zewnętrzna) determinacja ma być rozwijana poprzez doskonalenie zasobów”[499].

Natomiast w roku 1895 Cantor pisze: „Przez ‘zbiór’ rozumiemy dowolne zebranie w całość [*Zusammenfassung*] *M* pewnych dobrze zróżnicowanych obiektów m naszej intuicji lub naszego myślenia (zwanych ‘elementami’ *M*)”[500].

Pierwsza definicja związana jest z charakterystyką zbioru liczb algebraicznych oraz problemem wystarczającej charakterystyki zbioru (zwłaszcza zbioru nieskończonego)[501]. Druga definicja jest bardziej ogólna, i można stwierdzić w jej kontekście pewien wpływ definicji Dedekinda z 1888 roku. Niemniej jednak żadna z definicji nie zaprzecza temu, iż w

[499] „Eine Mannigfaltigkeite (ein Inbegriff, eine Menge) von Elemente, die irgendwelcher Begriffsphäre angehören, nenne ich wohldefiniert, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als intern bestimmt angesechen werden muβ, sowohl ob irgendein derselben Begriffsphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht, wie auch, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des gegebenseins einander gleich sind oder nicht. Im allgemeinen werden die betreffenden Entscheidungen nicht mit den zu Gebotestehenden Methoden oder Fähigkeiten in Wirklichkeit sicher und genau ausführbar sein; darauf kommt es aber hier durchaus nicht an, sonder allein auf die interne Determination, welche in konkreten Fällen, wo es die Zwecke fordern, durch Vervollkommnung der Hilfsmittel zu einer aktuellen (externen) Determination auszubilden ist”. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)...*, *dz. cyt.*, 150.

[500] Por. „Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von *M* genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M=\{m\}\text{''}.$$

G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)...*, *dz. cyt.*, 282.

[501] W.W. Tait, *Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory*, w: *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*, red. G. Sher, R. Tieszen, Cambridge 2000, 272.

początkowej fazie działalności, jak również później, Cantor mógł traktować zbiór jako pojęcie i obiekt pierwotny.

Chcemy pokazać, że podobnie Cantor mógł traktować również zbiory nieskończone, mimo iż jednocześnie wprowadzał te zbiory w formalny sposób. Tym bardziej, formalne wprowadzanie matematycznej nieskończoności nie może osłabiać proponowanego tu realizmu pragmatycznego ani też podziału na obiekty podstawowe oraz bardziej złożone (struktury). Zbiór nieskończony mógł być ogólnym pojęciem-obiektem podstawowym dla Cantora, a struktury nieskończone (również zbiory, lecz z określonymi na nich relacjami i właściwościami) będą obiektami bardziej złożonymi niż ogólne pojęcie zbioru nieskończonego. Co więcej, takie podejście Cantora do zbioru nieskończonego, które prowadziło go do przedstawiania pozamatematycznych argumentów na istnienie nieskończoności aktualnej, może wręcz sugerować, iż posiadał pewne intuicyjne *Anschauung* wprowadzonej przez siebie matematycznej, „dużej" nieskończoności (tj. wielkości, zbioru, liczby nieskończenie dużej). Po pierwsze dlatego, że sięgając po argumenty pozamatematyczne, nie wyjaśniał matematycznych zasad i prawidłowości nieskończonych struktur, a zasadność istnienia ich istoty (treści), nawet jeśli uważał je za apriorycznie odkrywane treści matematyczne. Po drugie dlatego, że jak można zauważyć na przykładzie jego dowodu przeciwko nieskończenie małym wielkościom, Cantor rozróżniał „treść" wielkości nieskończenie dużych od „treści" wielkości nieskończenie małych, tym drugim przyznając jedynie charakter potencjalnych (a więc w konsekwencji odmawiając przypisywania im owej „treści" – podkreślając tym samym ową „treść" odnośnie do wielkości nieskończenie dużych).

Pierwszym momentem, w którym można zaobserwować u Cantora formalne odniesienie do nieskończoności aktualnej, jest użycie symbolu nieskończonościowego, określającego nieskończoną ilość iloczynów mnogościowych zbiorów potęgowych. Drugim momentem jest definicja zbiorów drugiego gatunku. Jeszcze innym jest jego odniesienie do właściwości równoliczności podzbioru właściwego i samego zbioru nieskończonego. Poniżej przeanalizujemy te najważniejsze (choć nie jedyne) przykłady, aby pokazać, że Cantor bezpośrednio nie definiował i nie udowadniał matematycznie nieskończoności aktualnej, chociaż dochodził do niej na drodze konstrukcji umysłowych.

Przypomnijmy tutaj symbol, którego Cantor użył po raz pierwszy, aby określić iloczyn mnogościowy nieskończonej liczby potęg zbiorów:

$$\forall P_{IIgat} \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P^{(\infty)}.$$

Jak można zauważyć, same zbiory potęgowe, mające przynajmniej jeden punkt skupienia[502], musiały być nieskończone. Tak więc Cantor nie miał problemu z intuicyjnym, matematycznym odniesieniem do nieskończoności aktualnej (jak w przypadku zbiorów potęgowych), ale z jej formalnym wprowadzeniem i oznaczeniem. Przypomnijmy, że w kontekście powyższego symbolu nieskończonościowego napisał później, iż zasługuje na miano liczby[503].

Odwołując się do opisywanej symboliki, przypomnijmy też Cantora definicję zbiorów II gatunku. Chociaż zarówno zbiory I, jak i II gatunku mogły być nieskończone, te drugie posiadały nieskończoną liczbę pochodnych.

Zbiory pierwszego gatunku były zbiorami, gdzie dla każdego zbioru *X* zawsze istniała taka liczba naturalna *n*, że n-ta pochodna zbioru *X*, X^n była złożona ze skończonej liczby punktów, a więc już nie istniała pochodna X^{n+1}. Natomiast zbiory drugiego gatunku (*Y*) Cantor określił jako zbiory, dla których nie istnieje żadna liczba naturalna *n*, taka że Y^n ma skończoną liczbę punktów[504].

Ostatecznie należy przytoczyć opis Cantora tej właściwości zbiorów nieskończonych, która była traktowana przez Bolzano i Dedekinda jak definicja tych zbiorów. Dadaczyński

---

502 Cantor definiował punkt skupienia podobnie jak współcześnie się to robi: „jako punkt skupienia pewnego zbioru punktów *P,* rozumiem punkt prostej o takiej własności, że w dowolnym otoczeniu tego punktu znajduje się nieskończenie wiele punktów z *P,* przy czym może się zdarzyć, że on sam należy do zbioru". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 98; J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 32. Przy czym przypomnijmy, że pochodna zbioru P (P'), to był zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru P

503 W roku 1883, Cantor przypisuje symbolom nieskończonościowym (wprowadzonym w 1872 roku) miano wielkości liczbowych – tak jakby liczby (i również zbiory) nie mogły być rozpatrywane bez odniesienia do semantyki. Por. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 (Mathematische Annalen 21 (1), 51–58)..., dz. cyt.*, 160.

504 G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 98.

twierdzi, iż Cantor traktował ten opis jak twierdzenie[505]. My jednak uważamy, że traktował tę wypowiedź jak stwierdzenie oczywistego faktu, tworzącego podstawy matematyki. Nie oznacza bowiem tej wypowiedzi ani jako definicji, ani jako twierdzenia, ani jej nie dowodzi:

> „Składnik skończonej rozmaitości ma zawsze mniejszą wielkość niż sama rozmaitość; związek ten ustaje całkowicie z nieskończonością, tj. z rozmaitościami złożonymi z nieskończonej liczby elementów. Z samego faktu, że nieskończona rozmaitość *M* jest częścią innego *N* lub może być jednoznacznie i całkowicie przypisana do takiego *N*, to w żadnym wypadku nie należy wnioskować, że jego rozmiar jest mniejszy niż rozmiar *N*; wniosek ten jest ważny tylko wtedy, gdy wiadomo, że rozmiar *M* nie jest równy rozmiarowi *N*; ani też fakt, że *N* jest częścią *M* lub może być do niej jednoznacznie i całkowicie przypisany, nie powinien być uważany za wystarczający, aby liczność *M* była większa niż liczność *N*"[506].

Jako przykład zbioru nieskończonego, równolicznego ze swoim podzbiorem właściwym, podaje Cantor zbiór liczb dodatnich całkowitych oraz zbiór liczb dodatnich całkowitych parzystych[507].

Na podstawie wyżej przedstawionych elementów matematycznej praktyki Cantora, w których obserwujemy jakiś rodzaj odniesienia do nieskończoności, możemy potwierdzić, że Cantor bezpośrednio nie definiował i nie udowadniał matematycznie nieskończoności aktualnej. Jego odniesienia odbywały się w dużej mierze na drodze konstrukcji oraz poprzez negację właściwości skończoności. Możliwe, iż przejmował matematyczną intuicję o możliwości istnienia i korzystania z aktualnej nieskończoności, mimo wielu różnych zastrzeżeń filozoficznych i teologicznych. Być może dlatego jego linia obrony istnienia nieskończoności

---

505 J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 26, przyp.73.

506 „Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieser Verhältnis hört gänzlich auf bei den unendlichen, d. i. aus einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehenden Mannigfaltigkeiten. Aus dem Umstande allein, daß eine unendliche. Mannigfaltigkeit *M* ein Bestandteil einer andern *N* ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, darf keineswegs geschlossen werden, daß ihre Mächtigkeit kleiner ist als.die von *N*; dieser Schluß ist nur dann berechtigt, wenn man weiß, daß die Mächtigkeit von *M* nicht gleich ist derjenigen von *N*; ebensowenig darf der Umstand, daß *N* ein Bestandteil von M ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, als auBreichend dafür betrachtet werden, daß die Mächtigkeit von *M* größer sei als die von *N*". G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)...*, *dz. cyt.*, 119.

507 G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)...*, *dz. cyt.*, 119–120.

aktualnej była skoncentrowana nie na matematyce, a na filozofii i teologii. Niemniej jednak, to również pozwala nam uznać nieskończoność aktualną za pewnego rodzaju przyjmowany przez Cantora obiekt podstawowy (nie mówimy tu o bardziej skomplikowanych strukturach nieskończonych, jak np. liczby porządkowe czy kardynalne). Jednak należy zauważyć, iż sposób konstruowania nieskończoności aktualnej nie odnosił się zasadniczo do jej treści. Dlatego – pomimo wzmacniania przez Cantora ontologii nieskończoności aktualnej argumentami teologicznymi i filozoficznymi, analizując samą jego praktykę matematyczną, chociaż przyznajemy jej podstawową realistyczną ontologię, nie utożsamiamy jej istnienia z formą radykalnego realizmu, a zwłaszcza platonizmu.

4.2 Realizm Dedekinda

W przypadku Dedekinda przede wszystkim należy wskazać na dwie rzeczy – po pierwsze na wewnętrzne, ontologiczne aspekty jego teorii mnogości, a także na odniesienia do wcześniejszych aspektów teorii działań liczbowych (tj. do teorii stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa) w konstrukowaniu liczb rzeczywistych. Oczywiście spróbujemy opisać kwestie wiedzy tła (dziedziczonej) oraz ontologii względem praktyki matematycznej zarówno w przypadku konstrukcji liczb rzeczywistych, jak i przedstawionej przez matematyka z Brunszwiku teorii mnogości.

Należy tutaj zaznaczyć, że sam Dedekind nie komentował specjalnie ontologicznych aspektów tworzonej przez siebie teorii matematycznej, a jego dwie analizowane wcześniej wypowiedzi o liczbach są czasem interpretowane w perspektywie konstruktywizmu, co z kolei może rodzić konotacje konceptualistyczne. Jednakże w tej rozprawie nie opieramy się na deklaracjach pozamatematycznych, a na samej działalności matematyków. W oparciu o nią dopiero rekonstruujemy założenia i przesłanki filozoficzne w duchu programu filozofii w nauce. Dlatego należy wziąć pod uwagę również wcześniej poczynione analizy, które ukazują wypowiedzi w perspektywie metody modelowania matematycznych problemów (nie postulujemy, że to była jedyna jego metoda pracy naukowej w ogóle, a tylko w kontekście dwóch przedstawionych w niniejszej pracy modeli: N i R). Będziemy u Dedekinda wykazywać pewną zależność wewnętrznej, matematycznej ontologii od tej metody, jak również od już istniejącej wiedzy tła, czyli wiedzy wiedzy dziedziczonej, (zastanej).

Wiedza tła u Dedekinda

Problem ciągłe-dyskretne

Jeśli chodzi o kwestię oryginalnego rozwiązania problemu niewymierności przez Dedekinda, należy zwrócić uwagę na fakt, iż mógł on się inspirować starożytną teorią stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa[508], ale przede wszystkim wprowadził brakującą część – własność ciągłości. Propozycja Dedekinda była więc w jakimś sensie bazowała na starożytnym dziedzictwie (odniesienie to dotyczyło również geometrii, na której opierała się teoria stosunków wielkości) – jednakże nie twierdzimy, że Dedekind opierał się na tym dziedzictwie w sposób formalny, zachowując pełną ciągłość wiedzy matematycznej. Jednakże można powiedzieć, że na poziomie indywidualnej praktyki matematycznej jego twórczość zawierała oprócz kontekstu potencjalnie wytworzonej („pomyślanej") wiedzy również kontekst tzw. „wiedzy dziedziczonej", stanowiącej wiedzę tła. Taki argument umożliwia interpretowanie działalności Dedekinda w dwóch wymiarach realizmu pragmatycznego (na kształt II i III świata Popperowskiego) – tj. w kontekście istnienia matematyki w perspektywie historyczno-społecznej, jak i jej istnienia w perspektywie indywidualnej praktyki matematycznej.

Choć Dedekind w swojej pracy nad teorią liczb rzeczywistych odwoływał się do teorii stosunków wielkości Eudoksosa czy Euklidesa[509], należy zwrócić uwagę na fakt, iż fundamentalnym elementem, który Dedekind wprowadził, była własność ciągłości [510]. Analizował on tę własność zarówno pod kątem filozoficznym, jak również podał formalną, matematyczną jej definicję, obowiązującą dla zbioru wielkości.

Niektórzy historycy matematyki, jak Robert Bunn twierdzą, że podstawowym celem Dedekinda w rozprawie *Stetigkeit und irrationale Zahlen* było:

> „zastąpienie niezdefiniowanych pojęć (mniej lub bardziej geometrycznych) i opartych na nich tak zwanych intuicyjnych uzasadnień, dowodami wyprowadzonymi z jasno

---

[508] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen…*, *dz. cyt.*; P. Błaszczyk, *Eudoxos versus Dedekind*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 15, (2007) nr 2, 95–113; H. Stein, *Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics*, „Synthese" 84, (1990), 163–211, doi: https://doi.org/10.1007/BF00485377.

[509] Chodziło o prostą geometryczną, na którą się powoływał, i tworzenie na niej przekrojów, odpowiadających liczbom (rzeczywistym). Należy jednak pamiętać, że prosta geometryczna nie była dokładnie tym samym, co prosta ciągła w sensie Dedekinda, a przekroje tym samym w swej istocie, co liczby.

[510] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych…*, *dz. cyt.*, 151–152.

sformułowanych definicji. Szukał on przede wszystkim takich definicji, z których można wyprowadzić podstawowe twierdzenia o istnieniu granic. W tym celu potrzebował zdefiniować system w pewnym sensie zupełny czy też ciągły"[511].

Zauważmy, że choć celem obydwu matematyków (tak Cantora, jak i Dedekinda), było oczyszczanie matematyki z intuicji geometrycznej, to Dedekind albo nie traktował samej geometrii jako dziedziny czysto intuicyjnej, albo uważał za dopuszczalne odwołanie się do pewnej intuicyjnej rzeczywistości, u samych podstaw budowania teorii matematycznej. Pokażemy w ramach podrozdziału, że Dedekind w pewnym sensie zbudował model liczb rzeczywistych[512], poprzez połączenie wyabstrahowanej z geometrii własności ciągłości z podstawowymi właściwościami zbioru gęstego uporządkowanego (jakim był zbiór liczb wymiernych). Konsekwencje filozoficzne, jakie będą tego następstwem, to przede wszystkim uzasadnienie dla strukturalistycznej perspektywy Dedekinda, ale również próba pokazania, że ten, odwołując się do geometrycznej własności ciągłości prostej, uwzględniał jakiś rodzaj źródła poznawczego (przynajmniej) w intuicyjnej poglądowości.

Dedekind przyjął *a priori* (podobnie jak Cantor, choć z pewnymi różnicami) system liczb wymiernych, a także jego niezupełność, która oznaczała, iż nie każda granica ciągu liczb wymiernych była wyrażalna przy pomocy zbioru (liczb wymiernych). W tym kontekście zainteresował się własnością ciągłości, jako fundamentalną, która optymalnie pozwalała opisać konstruowany zbiór liczb rzeczywistych.

---

[511] Por. R. Bunn, *Developments in the foundations of mathematics, 1870–1920*, w: *From the Calculus to Set Theory 1630–1910. An Introductory History*, red. I. Grattan-Guinness, Princeton 2000, 222. Błaszczyk robi w tym miejscu dwie krytyczne uwagi. Obie dotyczą pojęcia granicy – pierwsza z nich brzmi, że Dedekind nie wymienia tego pojęcia; druga, że błędem Bunna jest przyjęcie, iż granica była ówcześnie jasno określona. Por. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 20. Z filozoficznego punktu widzenia jednak nie do końca jest prawdą to, co pisze Błaszczyk. Po pierwsze dlatego, że twórca słynnego Aksjomatu Ciągłości (niekoniecznie dosłownie, ponieważ Dedekind nie przedstawił własności ciągłości jako aksjomat), poszukując istnienia owych nienachodzących na siebie „punktów" (przekrojów) w każdym miejscu prostej rzeczywistej, upatrywał w tym spełnienia właściwości zupełności, której nazwę stosował zamiennie z właściwością ciągłości. Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*..., *dz. cyt.*, 151–152. Właściwość zaś zupełności związana była już (np. u Cauchy'ego) z istnieniem granic. Dedekind, zbaczając z dobrze znanego kierunku analizy ciągów Cauchy'ego i ich granic oraz konstruowania przy ich pomocy zbioru liczb rzeczywistych, próbował skonstruować je, zapewniając istnienie tychże granic-punktów według własnego przepisu. Poza tym rachunek infinitezymalny ówcześnie oznaczał po prostu rachunek całkowy i różniczkowy (jego aspekt bądź całość). Por. H. Fergo (red.), *Infinitezymalny*, w: *Encyklopedia Gutenberga*, Kraków 1929.

[512] Co mogłoby być zbieżne w pewnym sensie z przedstawioną w pracy: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.* koncepcją przedmiotu intencjonalnego według Ingardena. Jednakże z racji pewnych uwag krytycznych, tj. zwłaszcza wskazując na rodzajową różnicę między sztuką a nauką (tu matematyką), nie będziemy się dalej posługiwać tą analogią.

W drugim paragrafie pracy z 1872 roku Dedekind odwołuje się do linii prostej, aby „zilustrować” budowę zbioru liczb wymiernych[513]. W paragrafie trzecim opisuje ciągłość linii prostej geometrycznej[514]. Robi to w celu ukazania niezupełności systemu złożonego z samych liczb wymiernych. Choć należy założyć że oprócz odwoływania się do prostej geometrycznej, dobrze znał również ówczesny sposób definiowania zupełności zbioru liczb (rzeczywistych) przy pomocy granic ciągów Cauchy'ego[515]. Stąd można nazwać jego propozycję oryginalną, jak również postulować, iż jako punkt wyjścia do własnej konstrukcji przyjął on „już istniejące, gotowe” granice ciągów. Bez komentarza pozostawił jednak konstrukcję tych granic.

Należy zauważyć, że pomimo iż Dedekind traktował geometrię jako odrębną dziedzinę matematyki, nasuwającą intuicyjne skojarzenia i wyobrażenia[516], nie wprowadził w taki sposób, pochodzącej z tych wyobrażeń i funkcjonującej w analizie, właściwości ciągłości. Nie podważał jej geometrycznego pochodzenia, ale wprowadził ją w kontekście panujących ówcześnie, arytmetyzujących matematykę trendów.

W przeciwieństwie do Cantora, Dedekind, odwołując się do pojęcia prostej (czy jej właściwości), nie robił tego w celu ukazania izomorfizmu między linią prostą a już skonstruowanym zbiorem liczb rzeczywistych (nawet po to, aby tę pierwszą zarytmetyzować). Jego celem była analiza ciągłości, wyabstrahowanej z takiego bytu matematycznego, który tę rozważaną przez niego własność ciągłości posiadał, i oparcie na niej konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych. Rozważając ciągłość prostej, razem z własnością zbioru gęsto uporządkowanego, korzystał z wyobrażeń oraz intuicji geometrycznych czy też topologicznych. Na takie wskazuje i do nich się odnosi Jerzy Mioduszewski, analizując w aspekcie topologii genezę powstania oraz sam obiekt przekroju Dedekinda[517].

Mioduszewski interpretuje wizualnie, w kontekście topologicznym zbiór ciągły w sensie Dedekinda jako zbiór punktów leżących ściśle jeden obok drugiego (dosłownie – w linii

513 R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 319–320.

514 R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 320–323.

515 Tak jak zostało wspomniane, metoda stworzenia zbioru R – liczb rzeczywistych, jakiej użył Cantor, była używana (w całości, lub częściowo) również przez Cauchy'ego, Bolzana, Weierstrassa, Heinego czy Meraya.

516 Mówiąc w pracy o intuicji, mamy na myśli głównie wizualizację. Przy czym nie musi ona dotyczyć obiektów rozciągłych, ale również może opisywać struktury, których poszczególnym elementom takiej rozciągłości nie przypisujemy. Może opisywać również matematyczne procesy. Por. M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*

517 J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii...*, *dz. cyt.*, 7, 12.

prostej), niemający luk (miejsc pustych), ale również niemający żadnego miejsca zajętego przez więcej niż jeden punkt. Owa ciągłość charakteryzująca zbiór liczb rzeczywistych była oparta na ciągłości wyznaczanej przez zbiór rozważanych punktów, ale przede wszystkim na pierwotnym pojęciu ciągłości, wywodzącym się z geometrii, a w szczególności związanym z właściwościami prostej. Bez względu na to, czy rozpatrywane przez niego punkty uosabiały granice ciągów, należy pamiętać o tym, że tak jak Dedekind abstrahował pojęcie ciągłości z geometrycznego kontekstu, tak owe punkty, nawet jeśli były odpowiednikami granic, były w pewnym sensie od nich abstrahowane. Natomiast jego przekroje zbioru jedynie wytwarzały liczby rzeczywiste, nie były z nimi w pełni tożsame[518].

Na tej podstawie stwierdzamy, że Dedekind musiał założyć w jakiś sposób istnienie takiego abstrakcyjnego bytu, na podstawie którego definiował tę własność, na jakiej oparł całą tę konstrukcję[519]. Uważamy, że tym bytem dla niego była prosta geometryczna.

Dedekind nie bał się więc – inaczej niż Cantor – bezpośrednio sięgnąć do intuicji geometrycznej, aby na jej podstawie formalnie uzupełnić i rozbudować konstrukcję liczb rzeczywistych. Można się zastanawiać, czy aby przypadkiem nie jest to motywowane jego strukturalistycznym[520] podejściem do działalności w zakresie poszerzania matematycznej wiedzy. Niemniej jednak, tę cechę praktyki matematycznej Dedekinda można też traktować jako (przynajmniej częściowo) niezależną od metody strukturalistycznej.

[518] W tym kontekście należy spostrzec, że Dedekind nie tworzył bezpośrednio liczb rzeczywistych przy pomocy przekrojów, a jedynie przedstawiał modelowo własność ich całego zbioru – struktury. W tym kontekście tworzenie liczb przy pomocy przekrojów jest raczej wykazywaniem, iż własność ciągłości jest spełniana w zbiorze liczb rzeczywistych, niż opisywaniem procesu powstawania liczby rzeczywistej. Tym samym, aspekty konstrukcjonistyczne, wynikają tutaj z perspektywy strukturalistycznej, obejmującej całą strukturę liczb rzeczywistych istniejącą w pewien obiektywny sposób, tak jak przedmioty Popperowskiego świata III.

[519] Jak pisze Błaszczyk – Dedekind patrzy na takie byty matematyczne, intelektualne w sposób intencjonalny (chodzi konkretnie o zbiór liczb rzeczywistych, z określonymi na nim działaniami i relacjami. Por. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*). Jednakże w ramach dyskusji o intencjonalnym przedmiocie matematyki należy zwrócić uwagę na fakt, iż choć byty matematyczne są „nieokreślone” przez matematyczne opisy (choć mogą być identyczne byty w różnych teoriach), to „matematyka różni się od fikcji literackiej tym, że postacie fikcyjne są zwykle ograniczone do jednego dzieła fikcyjnego, podczas gdy te same byty matematyczne pojawiają się w różnych teoriach matematycznych” Por. J. Burgess, *Mathematics and Bleak House*..., *dz. cyt.*; L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[520] Zważywszy na to, że Dedekind miał dużo do czynienia z algebrą, opracował też w sposób quasi-aksjomatyczny arytmetykę liczb naturalnych (w czym też widać było naturalny rys strukturalistycznego podejścia), jest czymś naturalnym, że mógł w ten sposób „wyrobić” u siebie odpowiednią, strukturalistyczną (całościową) metodę i podejście do uprawiania matematyki.

Strukturalistyczne podejście (objawiające się dyktowanym przez opracowywane struktury – a więc byty i relacje – intencjonalizmem[521]) mogło być przyczyną tego, iż Dedekind uwzględnił naturalne relacje matematyczne, jakie w historii matematyki łączyły i łączą teorię liczb rzeczywistych, z wykorzystywanymi w analizie wielkościami ciągłymi, oraz idąc dalej, również z geometrią. Nie ograniczył się do części wiedzy, lecz uchwycił ją w znacznie szerszym kontekście.

To pozwoliło mu skorzystać z określonych przesłanek, które nie wynikały wprost jedynie z czysto analityczno-arytmetycznego zasobu wiedzy matematycznej, ale również z matematycznej intuicji oraz – postrzeganej ówcześnie jako zbyt intuicyjna – poglądowości geometrycznej.

Powyższe analizy pokazują, że Dedekind odniósł się w swojej teorii nie tylko do teorii stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa, ale również – poprzez odwołanie do własności ciągłości prostej geometrycznej oraz formalne połączenie tej własności z wielkością dyskretną (zbiorem) – do problemu ciągłe-dyskretne, a także w pewnym sensie go rozwiązał. W przeciwieństwie do Cantora, u którego zauważyliśmy wpływ obowiązujących w środowisku naukowym paradygmatów, ale również postaw kształtujących jego własną (czasem intuicyjną) postawę, u Dedekinda mamy do czynienia raczej z odnoszeniem i czerpaniem problemów do rozwiązywania ze zbioru skonstruowanej wiedzy (którą możemy interpretować jako istniejącą obiektywnie, jak obiekty Popperowskiego świata III) oraz ze świadomym odwoływaniem się do intuicji, co miało posłużyć do wyłonienia najważniejszych aspektów, koniecznych do opracowania danego problemu.

Rola teorii mnogości

Jeśli chodzi o rolę teorii mnogości u Dedekinda, nie zauważamy w tym przypadku przywiązania do niej, ze względu na nią samą, co istotnie różni to podejście od Cantorowskiego. Mamy tu do czynienia raczej z wykorzystaniem teorii mnogości, jako formalnego narzędzia do

[521] W przypadku Dedekinda również możemy mówić o pewnym intencjonaliźmie w kontekście jego metodologii czy szerzej – praktyki matematycznej (tak jak zostało to przedstawione odnośnie do Cantora). Jednakże między intencjonalizmami obu matematyków istnieje poważna różnica. Otóż w przypadku Cantora, mieliśmy do czynienia z intencjonalizmem, który dotyczył dość wąskich (pojedynczych) zagadnień, problemów, kwestii, opracowywanych przez Cantora – np. kwestii nieskończenie małych, nieskończenie dużych czy Hipotezy Kontinuum (różnoliczność zbiorów N i R). W przypadku zaś Dedekinda chodzi bardziej o intencjonalizm, którego kryterium jest użyteczność danego zagadnienia, pojęcia odnośnie do danej struktury. A więc chodzi o intencjonalizm, który określa zakres pojęć, zagadnień, które trzeba/można wykorzystać, a także sposób, w jaki należy to zrobić, aby zbudować model. To skomplikowane zagadnienie spróbujemy przeanalizować przy pomocy kwestii oglądu w przedostatnim rozdziale.

modelowania matematycznych problemów. Możemy jednak również wskazać w jej kontekście na konkretne kwestie, które miały związek z wiedzą dziedziczoną.

Jeśli chodzi o stwierdzony wcześniej fakt, iż Dedekind wykorzystywał teorię mnogości jako narzędzie do rozwiązywania innych problemów matematycznych (do ich wyjaśniania, opisu i wreszcie rozwiązywania), można w konsekwencji również powiedzieć, że stojące u podstaw tej teorii *Dingen* – podstawowe elementy systemów – mogły być w istocie wykorzystywane, aby odtwarzać i wyjaśniać całą matematykę.

Należy zauważyć, że u Dedekinda owe podstawowe jednostki niekoniecznie musiały być liczbami (na przykład u pitagorejczyków tym podstawowym elementem była jedność reprezentowana przez liczbę 1, która tworzyła wszelkie inne elementy) oraz nie tworzyły z założenia całego świata, a jedynie matematykę. Niemniej jednak można zauważyć, iż w swoim modelu liczb naturalnych, jakim był zbiór prosto nieskończony, połączył on kwestię redukcji pojęcia liczby (tj. kwestię formalnego wyjaśnienia i opisania zbioru liczb naturalnych) z przedstawieniem jej przy pomocy podstawowych elementów teorii mnogości.

Chcąc odpowiedzieć na pytanie: „Czym była liczba?" w kontekście praktyki matematycznej Dedekinda, należy uwzględnić jego strukturalistyczne podejście. W jego matematycznej praktyce ontologia podstawowych bytów matematyki (jednostek czy liczb) została w pewien sposób rozwiązana, poprzez strukturalistyczne propozycje w filozofii matematyki[522]. Jednakże – jak niektórzy wskazują – struktury nie były wszystkim, co istniało w matematyce Dedekinda. Jako przykład takiej nie-struktury podaje się najprostszy zbiór[523], ale w przypadku Dedekinda zbiór wymaga „zebrania w całość" pewnej ilości elementów, tak więc już nie jest podstawowym obiektem. Takimi obiektami są same elementy (obiekty myślenia), jak również odwzorowania.

W propozycjach strukturalistycznych przyznaje się pewną ontologię (mniejszą lub większą) „miejscom w strukturach"[524]. To może być rozwiązanie, jeśli chcemy uznać obiekty podstawowe w praktyce Dedekinda (zresztą podobnie jak w przypadku Cantora) wraz z

---

[522] E. Reck, G. Schiemer, *Structuralism in the Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[523] J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice*..., *dz. cyt.*

[524] Chodzi o strukturalizm nieeliminacyjny, np. Shapiro lub Resnika. Por. E. Reck, G. Schiemer, *Structuralism in the Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

konstruowanymi strukturami. Lecz inną opcją pozostaje propozycja Jessiki Carter, która zauważa pragmatycznie, iż nie wszystko musi być w matematyce strukturą[525].

Powyższe może świadczyć o tym, iż problem – tak naprawdę również filozoficzny – podstawowych jednostek budujących rzeczywistość matematyczną (a w kontekście konstrukcji R jest to również problem dychotomii ciągłe-dyskretne) pozostaje aktualny i stanowi jedną z pierwotnych zasad matematyki.

Nieskończenie małe w ujęciu Dedekinda

Aby lepiej móc porównać podejście Dedekinda z podejściem Cantora, przeanalizujmy oszczędne, aczkolwiek obfitujące w treść – zarówno matematyczną, jak i metamatematyczną – przedstawienie wielkości nieskończenie małych (tj. analizę infinitezymalną). Należy jednak zaznaczyć, że będzie tu chodziło o wielkości potencjalnie nieskończenie małe, używane do opisu granic i ciągłości. Jednakże Dedekind poświęcił im cały rozdział i mamy nadzieję, że jego analiza pomoże w odtworzeniu stosunków do aktualnego aspektu tych wielkości. Przede wszystkim chodzi nam o wskazanie, że Dedekind – w przeciwieństwie do Cantora – nie tyle przejmował panujące podejścia i obowiązujące w środowisku naukowym paradygmaty, co nawiązywał do nich w kontekście konkretnych kwestii oraz opracowywanych struktur.

W publikacji z 1872 roku Dedekind pisał:

> „Tutaj na zakończenie powinniśmy wyjaśnić związek między poprzednimi badaniami a pewnymi podstawowymi twierdzeniami analizy nieskończenie małej. Mówimy, że zmienna wielkość x, która przechodzi przez kolejne określone wartości liczbowe, zbliża się do ustalonej wartości granicznej α, gdy w trakcie procesu x leży ostatecznie między dwiema liczbami, między którymi α sama leży, lub co jest równoznaczne, gdy różnica $x-\alpha$ wzięta absolutnie staje się ostatecznie mniejsza niż jakakolwiek dana wartość różna od zera”[526].

[525] J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice...*, *dz. cyt.*

[526] Por. *„*Es soll hier nur noch zum Schluβ der Zusammenhang beleuchtet werden, welchen zwischen unseren bisherigen Betrachtungen und gewissen Hauptsätzen der Infinitesimalanalysis besteht. Man sagt, daβ eine veränderliche Gröβe x, welche sukzessive bestimmte Zahlwerte durchläuft, sich einem festen Grenzwert α nähert, wenn x im Laufe des Prozesses definitiv zwischen je zwei Zahlen zu liegen kommt, zwischen denen α selbst liegt, oder was dasselbe ist, wenn die Differenz $x - \alpha$ absolut genommen unter jeden gegebenen, von Null verschiedenen Wert definitiv herabsinkt*”*.

Jak zauważamy, Dedekind również (tak jak Cantor) korzysta z pojęcia nieskończenie małej zmiennej, wypracowanej wcześniej w matematyce (np. przez Cauchy'ego), zanim zaczęto używać weierstrassowskiego języka „delt i epsilonów", służącego do precyzyjnego określania pojęcia granicy w analizie matematycznej. Jednak matematyka z Brunszwiku nie dziwił ani nie niepokoił fakt potencjalnej możliwości uczynienia z różnicy x–α, aktualnie nieskończenie małej wielkości, ponieważ nie brał tego pod uwagę. Język „delt i epsilonów" należał do paradygmatu analizy ukształtowanego jeszcze w XVIII wieku, a jego istota polegała na wyeliminowaniu wielkości nieskończenie małych (wielkości niearchimedesowych). Zarówo Dedekind, jak i Cantor działali w obrębie tego paradygmatu. Cantor wykluczył nieskończenie małe *implicite* (próbował to uczynić *explicite*, również poza owym paradygmatem), natomiast Dedekind *explicite* się do nich nie odniósł (wykluczył *implicite*). W kontekście opisywanego tu stylu matematycznego Dedekinda, który jest niezwykle precyzyjny i abstrakcyjny, można sądzić, iż nie było to jego przeoczenie, a skutek tego, że zaliczył owe nieskończenie małe wielkości do elementów zbędnych w jego teorii; a co więcej – wiedział, iż jego teoria te wielkości wyklucza (jego konstrukcja liczb rzeczywistych, analizowana w pierwszym rozdziale).

Następnie w omawianym rozdziale Dedekind przedstawia dwa stwierdzenia, które określa jako najważniejsze z zakresu analizy infinitezymalnej.

Pierwsze z nich brzmi następująco: „Jeśli wielkość x rośnie w sposób ciągły, ale nie powyżej wszystkich granic, zbliża się do pewnej wartości granicznej"[527].

Natomiast drugie twierdzenie prezentuje treść jak poniżej: „Jeżeli w procesie zmiany wielkości x, dla każdej danej dodatniej wielkości δ można określić odpowiedni punkt, od którego x zmienia się o mniej niż δ, to x zbliża się do wartości granicznej"[528].

R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 332; tłum: R. Dedekind, *Continuity and irrational numbers*, w: *Essays on the Theory of Numbers*, tłum. W. W. Beman, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co 2007.

[527] *„Wächst eine Größe x beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwert".* R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 332; tłum: R. Dedekind, *Continuity and irrational numbers...*, *dz. cyt.*

[528] Por. „Läßt sich in dem Änderungsprozesse einer Größe x für jede gegebene positive Größe δ auch eine entsprechende Stelle angeben, von welcher ab x sich um weniger als δ ändert, so nähert sich x einem Grenzwert". R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 332; tłum: R. Dedekind, *Continuity and irrational numbers...*, *dz. cyt.*

Drugie, cytowane powyżej twierdzenie – zauważa Dedekind – jest tożsame z twierdzeniem do nim odwrotnym[529]: „każda zmienna wielkość, która zbliża się do wartości granicznej, ostatecznie zmienia się o mniej niż jakakolwiek dana wielkość dodatnia”[530].

Obydwa te twierdzenia Dedekind dowodzi. Nie będziemy tutaj przytaczać dokładnych dowodów obu twierdzeń, ale zwrócimy uwagę na pewne aspekty, zbieżne ze zdaniem, jakim podsumowuje rozdział o analizie infinitezymalnej. Otóż na końcu pisze, jaki był cel przedstawienia najważniejszych według niego aspektów analizy infinitezymalnej (a więc również odniesień do nieskończenie małych wielkości): „Te przykłady mogą wystarczyć, aby wydobyć związek między zasadą ciągłości a analizą infinitezymalną”[531].

Można łatwo zauważyć, że zależy mu wyłącznie na ukazaniu i zbadaniu związku pomiędzy analizą infinitezymalną (należy ją rozumieć jako zwykłą analizę, budowaną już w paradygmacie „zastępowania” nieskończenie małych, granicami) a pojęciem ciągłości. Choć nie odnosi się do tego – jak Cantor – wprost, to również wykorzystuje nieskończenie małe tylko w ich aspekcie mierzalności zmienności różnicy/odległości. W tym zakresie (tj. w zakresie nieskończenie małej zmiennej, potencjalnej, wykorzystywanej przy opisie granicy) są przez niego akceptowalne. W szerszym zaś (tj. w zakresie paradygmatu odnoszącego się do aktualnie nieskończenie małych, według którego ówczesna analiza funkcjonowała) – są po prostu zbędne.

529 Dedekind nie określa, na czym dokładnie ta odwrotność polega (pisze tylko pod drugim – podstawowym stwierdzeniem, że: „Diese Umkehrung des leicht zu beweisenden Satzes, daß jede veränderliche Größe, welche sich einem Grenzwert nähert, sich zuletzt um weniger ändert, als irgendeine gegebene positive Größe”. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 332.). Jednak znając jego poglądy na temat ważności kolejności przedstawiania pewnych relacji i twierdzeń, można stwierdzić, iż o tę kolejność tu chodzi. We wcześniejszym twierdzeniu (będącym tu podstawowym) mowa o implikacji, gdzie po lewej stronie jest warunek: $\exists x_0 \forall \delta > 0 \forall x_1, x_2 > x_0 : |x_1 - x_2| < \delta$, gdzie x_0, x_1, x_2 to wyrazy pewnej zmiennej rzeczywistej x, natomiast prawa strona to stwierdzenie, że zmienna x zbliża się do granicy. W twierdzeniu „odwrotnym” mamy do czynienia z zamianą miejsc w implikacji: po lewej stronie jest stwierdzenie, że zmienna x zbliża się do granicy, natomiast prawa strona to warunek: $\exists x_0 \forall \delta > 0 \forall x_1, x_2 > x_0 : |x_1 - x_2| < \delta$, gdzie x_0, x_1, x_2 to wyrazy pewnej zmiennej rzeczywistej x.

530 Por. *„Diese Umkehrung des leicht zu beweisenden Satzes, daβ jede veränderliche Gröβe, welche sich einem Grenzwert nähert, sich zuletzt um weniger ändert, als ingerdeine gegebene positive Gröβe, kann ebensowohl aus dem vorhergehenden Satze wie direkt aus dem Prinzip der Stetigkeit abgeleitet werden”.* R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 332; tłum: R. Dedekind, *Continuity and irrational numbers*..., *dz. cyt.* Po czym Dedekind dodaje, że owo odwrotne twierdzenia: „może być wyprowadzona zarówno z poprzedniego twierdzenia, jak i bezpośrednio z zasady ciągłości*”.*

531 R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 334; tłum: R. Dedekind, *Continuity and irrational numbers*..., *dz. cyt.*

W przedstawionych dowodach owych dwóch twierdzeń z tego rozdziału Dedekind wykorzystuje proces dążenia do wartości granicznej (dowód Tw. 1) oraz konstrukcję przekroju Dedekinda (dowód Tw. 2), również związaną z wartością graniczną. Zaznacza ponadto, że twierdzenie 1 jest równoważne zasadzie ciągłości[532], natomiast dowód twierdzenia 2 również opiera się na tym, na czym opiera się „podwójny podział wszystkich liczb rzeczywistych”[533] (czyli przekrój Dedekinda, wykorzystywany do opisu zasady ciągłości porządku zbioru liczb rzeczywistych).

Ważne jest to, że Dedekind opisuje kwestię potencjalnie nieskończenie małych w kontekście konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych. Kwestię tę omawiamy głównie w niniejszym paragrafie, ponieważ staramy się analizować przyjmowane filozoficzne przesłanki, odnoszące się do ontologii, w ramach której (choć nie tylko) analizujemy obie nieskończoności – mamy na myśli zarówno nieskończenie duże, jak i nieskończenie małe wielkości (nieskończone aktualnie).

W przypadku aktualnie nieskończenie małych wielkości u Dedekinda na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma żadnej podstawy, aby wyciągać jakieś wnioski filozoficzne. Analizując rozdział o analizie infinitezymalnej w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, możemy zauważyć fakt, iż Dedekind związał definicją ciągłości wielkości potencjalnie nieskończenie małe (wielkości zmienne, używane w analizie jako pojęcia pomocne dla definiowania granicy). Stąd można wnioskować, że zdawał sobie sprawę, iż skonstruowany przez niego zbiór liczb rzeczywistych, posiadający tę własność ciągłości, nie jest związany z wielkościami aktualnie nieskończenie małymi.

Powyższe rozumowanie potwierdza strukturalistyczne podejście Dedekinda. Jak już kilka razy wspominaliśmy, zajmował się tylko obiektami i własnościami bezpośrednio związanymi z konkretną, opracowywaną przez niego strukturą, którą można traktować jak pewnego rodzaju abstrakcyjny model. W związku z tym, aktualnie nieskończenie małe

[532] To twierdzenie obowiązuje tylko w kontekście pełnego zbioru liczb rzeczywistych – tj. tylko gdy rozpatrujemy zbiór spełniający tę zasadę ciągłości (można powiedzieć, że to ta sama zasada, tylko opisana innymi słowami). Twierdzenie to traci zaś „ważność”, gdy wyjmiemy z tego zbioru (R) choć jedną liczbę. Por. „*Dieser Satz ist äquivalent mit dem Prinzip der Stetigkeit, d. h. er verliert seine Gültigkeit, sobald man auch nur eine reelle Zahl in dem Gebiete als nicht vorhanden ansieht*”. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 332.

[533] Dedekind opiera dowód drugiego stwierdzenia na przyjęciu ciągłości zbioru liczb rzeczywistych, w szczególności na samym pojęciu przekroju. Por. „Ich lasse nun einstweilen die ursprüngliche Annahme fallen, und halte nur die soeben bewiesene Tatsache fest, daß alle späteren Werte der Veränderlichen x zwischen zwei angebbaren, endlichen Werten liegen. Hierauf gründe ich eine doppelte Einteilung aller reellen Zahlen.” R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*..., *dz. cyt.*, 332.

wielkości były przez niego wykluczone, ale tylko ze struktur, które opracowywał. Dedekind nie próbował wykazać ich sprzeczności w całej matematyce, co istotnie różni jego podejście od metodologii Cantora. Można również na tej podstawie sądzić, że Dedekind nie rozróżniał ontologii aktualnie nieskończenie dużych i aktualnie nieskończenie małych wielkości. Nie brał po prostu tych drugich pod uwagę, jak innych matematycznych elementów, obiektów, które nie były bezpośrednio powiązane i konieczne dla opracowywanych przez niego struktur.

W celu lepszego zrozumienia stanowiska Dedekinda warto porównać je do nieco późniejszego stanowiska innego niemieckiego matematyka – Davida Hilberta. Przyjmuje się[534], że Hilbert ostatecznie zaksjomatyzował pojęcie liczby w roku 1900, w artykule: *Über den Zahlbegriff*[535]. Według Dadaczyńskiego[536], ponieważ Hilbert kojarzony był w późniejszym okresie swojej matematycznej działalności ze stanowiskiem metodologicznego nominalizmu, można na podstawie jego matematycznej praktyki takie samo podejście założyć również w początkowym okresie jego twórczości. Stąd fakt, iż traktował analogicznie geometrię i arytmetykę liczb rzeczywistych, nie powinien być zaskoczeniem. Skoro bowiem dla Hilberta nie liczyła się semantyka (wartość treściowa znaków), co głównie syntaktyka (znaki i relacje między nimi) – pomimo iż był świadomy tego, że za znakami kryje się zazwyczaj jakaś treść – według tego (jeszcze nieujawnionego przekonania) uporządkował analogicznie, w sposób aksjomatyczny zarówno geometrię, jak i arytmetykę liczb rzeczywistych.

Hilbert przedstawia następująco metodę aksjomatyczną w teorii liczb:

> „Myślimy o systemie rzeczy; nazywamy te rzeczy numerami i oznaczamy je przez *a*, *b*, *c*,… Myślimy o tych liczbach w pewnych wzajemnych relacjach, których dokładny i pełny opis dają następujące aksjomaty:
> I. Aksjomaty związków (1-6),
> II Aksjomaty działań (1-6),
> III. Aksjomaty porządku (1-4),

[534] P. Błaszczyk, *Nota o Über den Zahlbegriff Davida Hilberta*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticum Mathematicae Pertinentia" IV, (2012), 195–198; P. Błaszczyk, *Nota o Lehrbuch der Algebra. Einlaitung Heinricha Webera*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VII, (2015), 117–127.

[535] D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*..., *dz. cyt.* Była to jedna z trzech prac Hilberta, opublikowanych w latach 1899–1900, a także jedna z dwóch zapowiadających program Hilbertowskiego formalizmu.

[536] J. Dadaczyński, *Ontologia matematyki wczesnego Hilberta (The Early Hilbert's Ontology of Mathematics)*..., *dz. cyt.*, 80–81.

IV Aksjomaty ciągłości (1-2)”[537].

Przy czym aksjomaty z grupy I dotyczą podstawowego wyjaśnienia zasad i kontekstu wykonywanych w zbiorze liczb operacji (tj. działań). Dalsze grupy aksjomatów określają odpowiednio zasady działań (II) i porządku (III). Aksjomaty grupy IV określają zasadę ciągłości – Hilbert wymienia tu Aksjomat Archimedesa oraz Aksjomatyczną Zasadę Zupełności.

Aksjomat Archimedesa u Hilberta brzmi następująco:

„IV 1. (Aksjomat Archimedesa.) Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ są dowolnymi dwiema liczbami, zawsze można dodać do siebie a tak często, że otrzymana suma ma własność

a + a + … + a > b”[538].

O Aksjomacie Zupełności w systemie liczb rzeczywistych wypowiedział się Hilbertnastępująco:

„IV 2. (Aksjomat zupełności) Do systemu liczb [rzeczywistych] nie jest możliwe dodanie innego systemu przedmiotów tak, by w powstałym w ten sposób systemie przedmiotów były spełnione równocześnie wszystkie aksjomaty I, II, III [chodzi o pewne zbiory aksjomatów] i aksjomat IV 1; lub krótko: liczby [rzeczywiste] tworzą system przedmiotów, który, przy zachowaniu wszystkich aksjomatów, nie może być w żaden sposób rozszerzony [...]. Wątpliwości, które w ogóle były podnoszone co do istnienia całości wszystkich liczb rzeczywistych i co do istnienia wszelkich zbiorów nieskończonych, tracą wobec zaprezentowanego wyżej ujęcia wszelką prawomocność: jako zbioru liczb rzeczywistych nie traktowaliśmy wyżej ogółu wszystkich możliwych

---

[537] Por. „Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit *a, b, c,* … . Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht:

I. Axiome der Verknüpfung (1-6),
II. Axiome der Rechnung (1-6),
III. Axiome der Anordnung (1-4),
IV. Axiome der Stetigkeit (1-2)”.

D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff...*, *dz. cyt.*, 180–183.

[538] Por. „IV 1. (Archimedisches Axiom) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, *a* zu sich selbst so oft zu addiren daβ die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + ... + a > b”.$$

D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff...*, *dz. cyt.*, 183.

praw, według których następują po sobie elementy jakiegoś ciągu podstawowego, lecz – właśnie jak to wyżej zostało przedstawione – jako system przedmiotów, których wzajemne relacje dane są przez wskazany wyżej skończony i domknięty system aksjomatów I-IV. Wypowiedzi o przedmiotach owego systemu mają ważność tylko wtedy, gdy można je wyprowadzić z aksjomatów na drodze skończonej liczby wnioskowań logicznych”[539].

Należy zwrócić w tym miejscu uwagę na fakt, iż u podstaw swojej aksjomatycznej teorii Hilbert śladem Dedekinda sięga do czynności umysłowej, jaką jest „myślenie o systemie rzeczy”. Jednak w odróżnieniu od matematyka z Brunszwiku, nie pisze, iż elementy danego zbioru (systemu) są również rzeczami. Można to interpretować następująco: wprawdzie Hilbert zdawał sobie sprawę z zawartości pojęć w kontekście semantycznym, chciał mimo to uniknąć odwołania do zawartości innej niż sama zawartość syntaktyczna. Dlatego też nie odwoływał się do istnienia w umyśle samej rzeczy (*Dinge*), która mogła zawierać dowolną treść, ale położył akcent na myślenie o systemie rzeczy, który to system zawierał bezpośrednio owe numerowane rzeczy. Można powiedzieć, że odseparował tym samym pojęcie zbioru od konotacji semantycznej. Jak wiadomo, Dedekind aż takiej wyraźnej potrzeby nie widział, jeśli już więc posądzać go o przejawy metodologicznego nominalizmu, to raczej są one dość umiarkowane w porównaniu do stanowiska Hilberta.

Drugi istotny fakt dotyczy grupy IV aksjomatów, tzw. aksjomatów ciągłości Hilberta. Jak przedstawiono wcześniej, składały się na tę grupę dwa aksjomaty. Pierwszy z nich uzupełniał teorię liczb rzeczywistych, wypracowaną przez Cantora, o zasadę wykluczenia nieskończenie małych (której Cantor, mimo swojego sprzeciwu wobec ich istnienia – w swojej teorii formalnie nie zamieścił), natomiast drugi dotyczył kwestii zupełności. Lecz nie była to zupełność przestrzeni metrycznej (matematyczna), a raczej określenie metamatematycznej zasady zupełności teorii liczb rzeczywistych Hilberta. Zdanie w aksjomacie IV 2. odnosiło się do zbioru samych aksjomatów, nie zaś do zbioru wszystkich twierdzeń tej teorii.

Należy stwierdzić, iż współcześnie w matematyce klasycznej uznaje się, że obie konstrukcje liczb rzeczywistych są równoważne, choć sformułowane na dwa różne sposoby[540].

---

[539] D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff...*, *dz. cyt.*, 183–184. Tłumaczenie za: J. Dadaczyński, *Ontologia matematyki wczesnego Hilberta (The Early Hilbert's Ontology of Mathematics)...*, *dz. cyt.*, 80–81 przyp.5.

[540] Błaszczyk zwraca uwagę na fakt, iż współczesna konstrukcja liczb rzeczywistych, nazywana konstrukcją Cantora, jest w rzeczywistości tym, co przedstawił Heine. Nie jest to jednak żadna przeszkoda dla przeprowadzenia porównawczych analiz pomiędzy Dedekindem oraz Cantorem w kontekście współczesnej teorii

Co jest jednak interesujące z punktu widzenia filozofii matematyki, a także w kontekście analizy porównawczej działalności naukowej Cantora i Dedekinda[541], to fakt, iż w przypadku matematyki niestandardowej odkrywamy jednak dość istotną różnicę między nimi. Różnica ta odnosi się do definiowania właściwości ciągłości i zupełności zbioru. W szczególności chodzi o fakt, iż własność zupełności zbioru, wskazywana w ramach konstrukcji liczb rzeczywistych przez Cantora, jest spełniana również w zbiorach (czy też ciałach) niestandardowych, natomiast własność ciągłości zbioru w sensie Dedekinda – już nie[542].

Jest to istotne o tyle, o ile weźmiemy pod uwagę także podejście (matematyczne, ale również każde inne) Cantora i Dedekinda do wielkości nieskończenie małych. W związku z różnicami w ich podejściu do tych wielkości, wyniki, jakie współcześnie otrzymujemy w kontekście wypracowanych przez nich teorii, mogą być istotne z punktu widzenia analizy

---

matematycznej. Głównie z uwagi na to, że Cantor w głównych aspektach swojej teorii miał wiele wspólnego, podobnie jak Heine oraz Méray, z Weierstrassem czy też z Cauchy'm i Lagrange'em.

541 Fakt ten może być istotny dlatego, że pomimo dosyć dużych różnic między zamiarami, metodami, oraz pewnymi kierunkami działania naukowego obu matematyków, kwestia nieskończenie małych wielkości była w sposób nieoczywisty (w przeciwieństwie np. do kwestii konstrukcji liczb rzeczywistych, teorii mnogości czy też arytmetyki, które należały do oczywistych ówcześnie podstaw arytmetyki) czymś, co nie tylko połączyło ich pracę, ale również, dzięki pewnej przekrojowości prac Cantora i Dedekinda reprezentującej XIX wiek, stworzyło możliwość oceny ówczesnego podejścia matematyków do formalizacji matematyki (rugowania z niej nieskończenie małych wielkości), zwłaszcza w kontekście współczesnej wiedzy matematycznej.

542 W teorii ciał uporządkowanych (a więc w teorii ujmującej liczby – również rzeczywiste – w sposób aksjomatyczny, którego pionierem był Hilbert w 1900 roku (D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*..., *dz. cyt.*) istnieje siedem wersji Aksjomatu Ciągłości. Dwie z tych wersji zawierają odpowiednio:

a. własność ciągłości w sensie Dedekinda – aksjomat C1 – „Żaden przekrój Dedekinda zbioru (F, <) nie wyznacza luki" (P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*..., *dz. cyt.*, 23.) oraz

b. własność zupełności w sensie Cauchy'ego (należy pamiętać, że własność ta odnosi się współcześnie do przestrzeni metrycznych, jednak w zbiorze liczb rzeczywistych wystarczy zadać moduł różnicy między dwiema każdymi liczbami rzeczywistymi f=|a-b|, będący tzw. funkcją odległości, aby uzyskać przestrzeń metryczną liczb rzeczywistych; należy jednak zauważyć, że zadając funkcję odległości, w pewien sposób – choć co prawda dość naturalnie – rozbudowywujemy strukturę samego zbioru liczb rzeczywistych z zadaną jedynie relacją porządku) – aksjomat C4 – „(F,+,·,0,1,<) jest ciałem archimedesowym oraz dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset F$ spełniającego warunek Cauchy'ego istnieje takie $a \in F$, że $\lim_{n\to\infty} x_n = a$" (P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*..., *dz. cyt.*, 23.). Innymi słowy, aksjomat C4 brzmi: (F,+,·,0,1,<) jest ciałem archimedesowym oraz każdy ciąg Cauchy'ego w tym ciele ma granicę.

Pierwsza własność jest zawarta w konstrukcji (również współczesnej) Dedekinda liczb rzeczywistych, natomiast druga własność (choć dotyczy współcześnie przestrzeni metrycznych) była wykorzystana przez Cantora do scharakteryzowania jego konstrukcji liczb rzeczywistych. Współcześnie wskazuje się na istnienie ciał niearchimedesowych, w ramach których każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę, jednak nie istnieją ciała niearchimedesowe, w których żaden przekrój nie wyznacza luki. Wynika to z tego, że Aksjomat Ciągłości według Dedekinda, zawiera ukryty Aksjomat Archimedesa. Natomiast własność, którą Cantor wykorzystał, aby scharakteryzować ciągłość w zbiorze liczb rzeczywistych, nie jest wystarczająca do scharakteryzowania tego zbioru – występuje w aksjomacie ciągłości jako jeden z członów koniunkcji, obok niezbędnej właściwości archimedesowości. Por. P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*..., *dz. cyt.*, 24; P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective*..., *dz. cyt.*, 155.

porównawczej przeprowadzanej w niniejszej pracy, jak i ogólnych wniosków, jakie będzie można wyciągnąć na temat praktyki matematycznej (zwłaszcza procesów umysłowych czy rozstrzygnięć metodologicznych podmiotu matematycznego).

Podsumowując: bardzo istotnym punktem analizy porównawczej założeń[543] Cantora i Dedekinda jest kwestia stosunku do wielkości nieskończenie małych (czyli do tzw. analizy infinitezymalnej). Analizując podejście Dedekinda, a następnie odnosząc się do podejścia Cantora, można stwierdzić, że ten pierwszy nie miał problemów z wielkościami nieskończenie małymi, ponieważ sam ich nie tworzył w ramach używanych struktur. Nie miał zatem potrzeby udowadniać, że nie istnieją w całej matematyce ani w jakiejkolwiek teorii, bo w ogóle się do nich nie odnosił wprost. Niektórzy mogą tłumaczyć to podejście konstruktywistyczną (tu konstrukcjonistyczną) zasadą konstruowalności obiektów[544]. Jednakże opowiadamy się tutaj raczej za strukturalistyczno-metodologicznymi założeniami Dedekinda, które mogły motywować takie działania matematyczne. Jak wskazywaliśmy, Dedekind modelował matematyczne problemy przy pomocy struktur, a jego intencjonalna działalność skierowana była tylko na te elementy, jakie wchodziły bezpośrednio w opracowywane struktury. Jeśli mielibyśmy określić krótko matematyczną praktykę Dedekinda, to – pamiętając, że style matematyczne oscylują pomiędzy stylami lokalnymi a metodologicznymi[545] – musielibyśmy wziąć przede wszystkim pod uwagę jego indywidualną, dominującą perspektywę strukturalistyczną[546].

---

[543] Próbując zestawić różnice między praktyką matematyczną oraz wykorzystywanymi (świadomie bądź nieświadomie) założeniami filozoficznymi dwóch matematyków, porównujemy nie tylko poszczególne metody, wypowiedziane założenia czy oczekiwania. Bo w ten sposób można byłoby pominąć różnice zasadnicze (właściwe dla głębokiego rozumienia problemów matematycznych, a także występujące pomiędzy szeroko rozumianymi postawami naukowymi wobec tych problemów) oraz uznać za podobieństwa aspekty, które rozpatrywane w szerszym kontekście podobieństwami nie są.

[544]Np. Murawski w: R. Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki..., dz. cyt.*

[545] Dodatkowo nawiązują do stylów adekwatnych dla konkretnego okresu historycznego. Jest to związane ze społecznym i kulturowym wymiarem matematyki. Poprzez komunikację matematyka istnieje w ścisłej zależności od kontekstu tej komunikacji, a więc jest związana z podobnym rozumieniem sensu, z podobnymi używanymi metodami oraz zrozumiałymi dla wszystkich (i przez większość oczekiwanymi), kierunkami prowadzonych badań. Por. P. Mancosu, *Mathematical Style..., dz. cyt.*

[546] Dodając owe indywidualistyczne cechy do określających daną praktykę, właściwości lokalnych i metodologicznych, należy mieć świadomość, iż zakrawa to na pewien rodzaj (częściowego przynajmniej) psychologizmu w filozofii matematyki. Pomimo kontrowersji krążących na temat psychologizacji nauki, należy zdawać sobie sprawę, że w kontekście coraz bardziej zdobywającej popularność filozofii praktyki matematycznej, a także teorii o matematyce ucieleśnionej, psychologizacji (indywidualizacji) pewnych zagadnień nie da się całkowicie uniknąć czy wykluczyć.

Można w związku z powyższym, po pierwsze, zauważyć związek między postawami Cantora i Dedekinda, na które miały wpływ obowiązujące w ówczesnym środowisku paradygmaty i podejścia. Jednakże w przypadku Dedekinda obserwujemy typowe skoncentrowanie się na konkretnych problemach, oraz rozpatrywanie ich wobec konkretnych, opracowywanych struktur – czego nie zauważamy u Cantora.

Wewnętrzny realizm ontologiczny Dedekinda

Obiekty podstawowe

Pierwsza kwestia, czyli przedstawienie przedmiotów myślenia (rzeczy – *Dingen*) jako podstawowych jednostek budujących całą teorię mnogości, w połączeniu z nawiązaniem do „świata myśli", w kontekście udowadniania istnienia zbioru nieskończonego, stanowi wystarczającą przesłankę, aby uznać teorię mnogości Dedekinda za możliwą do interpretacji w ramach ontologicznego realizmu wewnętrznego. Wydaje się, że realizm ten jest bardziej wyraźny niż u Cantora. Rozpatrując te elementy równocześnie, można wnioskować o istnieniu (według Dedekinda) świata myśli, gdzie podstawowe jednostki teorii mnogości istnieją wszystkie aktualnie – ponieważ jest ich nieskończona ilość, a ich istnienie nie zależy od umysłu. Jednak Dedekind niekoniecznie utożsamia ów świat myśli z umysłem, a tym bardziej z jakimś wydzielonym obszarem rzeczywistości, w jakim w dodatku mogłyby te obiekty istnieć niezależnie od człowieka. Nasuwa to myśl, że pomocna do interpretacji może być Popperowska koncepcja trzech światów.

Chociaż pierwsze akapity pracy Dedekinda były omówione jako przykład jego precyzji i konsekwencji oraz metody jego działania, jaką było matematyczne modelowanie, tekst ten stanowi również podstawę rozważań na temat ontologii matematycznych bytów z jego teorii. Uważamy, że to podejście mogło zawierać akceptację podstawowej, nieskomplikowanej ontologii realistycznej matematycznych obiektów. Chodzi w zasadzie o *Dingen* – rzeczy będące podstawowymi elementami, jednostkami w Systemach.

Dlatego przytoczymy tu fragment jego wypowiedzi:

> „rozumiem przez rzecz każdy przedmiot naszej myśli. Aby móc łatwo mówić o rzeczach, oznaczamy je symbolami, np. literami i ośmielamy się mówić krótko o rzeczy *a* lub po prostu *a*, kiedy mamy na myśli rzecz oznaczoną przez *a*, a nie samą literę *a*. Rzecz jest całkowicie zdeterminowana przez wszystko, co można o niej powiedzieć lub pomyśleć. Rzecz a jest tym samym, co *b* (tożsame z *b*), oraz *b* tym samym, co *a*, kiedy

wszystko, co można pomyśleć o *a*, można też pomyśleć o *b*, i kiedy wszystko, co można pomyśleć o *b*, można też pomyśleć o *a*”[547].

Można zaobserwować odniesienia Dedekinda do świata myśli, w szczególności do tych elementów[548], które nazwał rzeczami (*Dingen*)[549], a które w jego ujęciu, tworzyły właśnie matematyczne zbiory, poprzez „pomyślenie ich w całości” (czy zebranie ich w całość)[550].

Jeśli przeanalizujemy kwestie ontologiczne – wspólnie – zarówno w kontekście jego odniesień do podstaw teorii mnogości, a także (dalej przedstawionego) dowodu na istnienie zbioru nieskończonego, możemy stwierdzić, iż przedmioty myślenia, o jakich wspomina na początku pracy z 1888 roku, są przedmiotami „świata myśli” (w dodatku nieskończonego), o którym pisze w dowodzie istnienia zbioru nieskończonego. Poniżej przedstawione zostanie dokładniej owo odniesienie Dedekinda, jednak już teraz można wspomnieć, że choć nie tłumaczył się z tego, być może wcale nie musiał, jeśli założymy, iż rzeczywiście zaliczał „świat myśli”, a więc będący immamentny względem umysłu ludzkiego, do świata matematyki (czy nawet to zawieranie się było rozumiane przez niego w odwrotnym porządku)[551].

Oczywiście, należy zaznaczyć, iż jest to jedna z propozycji, ponieważ Dedekind, rozważając jako element zbioru przedmiot myśli *Ding*, nie wyjaśniał, czy wziął się on z samej myśli, czy powstał w konsekwencji jakiegoś oddziaływania świata zewnętrznego. Dlatego podejście Dedekinda do matematyki można sklasyfikować jako proponowany przez nas pragmatyczny realizm ontologiczny, wewnętrzny względem praktyki matematycznej

[547] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344.

[548] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344. Należy zauważyć, iż Dedekind nie opisuje specjalnie tego świata, nie odnosi się też do niego jako do konkretnego rodzaju rzeczywistości. Lecz w niniejszej pracy postulujemy jego uznanie, ponieważ Dedekind pisze na samym początku wyraźnie o „rzeczy”, a dopiero potem o tym, co można o niej pomyśleć lub powiedzieć (mimo że rzecz też jest dla niego wszystkim tym, co może być obiektem myśli). W tym kontekście przyjmujemy, że dla Dedekinda „rzecz” nie była jedynie zbiorem swoich własności, a więc w jakiś sposób istniała i była możliwa do uchwycenia myśleniem – istniała płaszczyzna wspólna dla „rzeczy” i myślenia.

[549] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344.

[550] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 344.

[551] Chodzi tu konkretnie o to, że Dedekind mógł uważać swoje odniesienia do świata myśli (w kontekście takich pojęć pierwszych jak przedmioty-elementy, funkcje czy własności – np. ciągłości) zarówno za oczywistą część matematyki (wtedy powiedzielibyśmy, że jego logicyzm, tj. sprowadzanie matematyki do teorii mnogości czy logiki – w zależności od interpretacji – był bogatszy niż standardowa logika czy teoria mnogości), jak i całą matematykę mógł uważać za pewien wytwór umysłu człowieka, i w tym sensie przychylić można by się było do jego konstruktywizmu (tu konstrukcjonizmu), czasem mu przypisywanego (wtedy można by było traktować matematykę jako wypadkową lub przedłużenie „świata myśli” podmiotu matematycznego).

(odpowiadający pod pewnymi względami platonizmowi deflacyjnemu)[552] lub po prostu rodzaj jakiegoś wewnętrznego realizmu, określającego zapatrywania Dedekinda na ontologię bytów matematycznych. Co odpowiada proponowanemu w niniejszej pracy – dwuwymiarowemu – pragmatycznemu realizmowi.

Wydaje się, że możemy stwierdzić, iż dla Dedekinda czynności, które wykonywał umysł matematyka, mogły być częścią tej matematyki[553]. Wydaje się również, że taki pogląd można u niego bez problemu obronić, właśnie np. ze względu na owo odwołanie się do „świata myśli", ale i do własności ciągłości prostej, omówione wcześniej, rozważane właśnie w tym „świecie myśli"[554].

Podstawowymi obiektami, obiektami „wewnętrznymi" względem praktyki matematycznej Dedekinda, na pewno były elementy zbioru, jak i same zbiory. Jak wynika z wcześniejszych analiz, do obiektów podstawowych zaliczał również odwzorowania. Przez wzgląd na dynamikę tych drugich (nie rozpatrywał ich jako zbiory argumentów i wartości, a jako funkcję przypisującą wartości argumentom) czyni to jego ontologię podstaw matematyki odmienną od Cantorowskiej.

Odwzorowanie systemu według Dedekinda to pewne prawo, reguła (*Gesetz*), która mówi, że każdemu określonemu elementowi s z systemu *S* przynależy określona rzecz (*Ding*), którą symbolicznie opisujemy jako $\varphi(s)$ i nazywamy obrazem (*Bild*) *s*[555]. Jednocześnie pisze też, że przykładem odwzorowania systemu może być przypisanie symboli i nazw do elementów

---

552 L. Horsten, *Deflating Platonism*, w:L. Horsten, *Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.*

553 Niektórzy twierdzą, że Dedekindowska „redukcja ostatecznie sprowadzała się do 'praw myśli'". J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions...*, *dz. cyt.* Jednakże, nawet jeśli tak było (choć my nie łączymy owej redukcji z określaniem Dedekinda jako logicysty, ze względu na współczesną definicję logiki), to należy uwzględnić również fakt, że do owego „świata myśli" odwoływał się on również, aby sięgnąć po znajdujące się tam „rzeczy" (*Dingen*) oraz wyobrażenie o ciągłości prostej. Ostatecznie więc owa redukcja sprowadzała się również – oprócz praw – do elementów tego świata. Przypisując Dedekindowi czysty konceptualizm, możemy popełnić błąd. Dedekind nie określa bowiem tego, jak według niego ów świat myśli istnieje. Czy jako efekt solipsystycznej ontologii matematycznego podmiotu, czy też w wyniku interakcji tego podmiotu ze światem rzeczywistym, w tym innymi podmiotami, a także ostatecznie wpływając na wpływanie trzeciego, abstrakcyjnego świata (jak u Poppera, por. K.R. Popper, *Wiedza obiektywna...*, *dz. cyt.*).

554 Przypominając, iż Dedekind nie odnosił się do owej płaszczyzny wspólnej dla przedmiotów matematycznych i myślenia, nie konkretyzował jej w kontekście podstaw teorii mnogości czy podstaw konstrukcji liczb rzeczywistych, zakładamy możliwość nazwania jej „światem myśli". Rozstrzygającym argumentem jest tutaj fakt, iż definiując oraz udowadniając istnienie zbioru nieskończonego, świat ten został przez niego dokładnie tak nazwany. Por. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357.

555 Por. *„Unter einer Abbildung* φ eines Systems *S* wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element *s* von *S* ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 349.

systemu[556]. Chociaż więc odwzorowanie jest prawem, w praktyce wymaga wykonania pewnej umysłowej czynności – zarówno do stworzenia tego prawa, jak i do jego odtworzenia.

Współcześnie również czasem wskazuje się na fakt, że funkcja (jako pojęcie stosowane wymiennie z odwzorowaniem) jest pewnym określonym przyporządkowaniem wartości do każdego elementu pewnego zbioru. Niemniej jednak znana jest też definicja funkcji podana przez Giuseppe Peano w 1911 roku, gdzie funkcją nazywamy pewną relację określoną na gotowych zbiorach X i Y, taką że każdemu elementowi ze zbioru X jest przyporządkowany dokładnie jeden element ze zbioru Y[557]. Należy zauważyć, że Dedekind nie dąży do ukazania odwzorowania jako relacji między elementami wybranymi z danych zbiorów. Można powiedzieć, że odróżnia on odwzorowanie jako pewną zasadę determinującą czynność przyporządkowywania pewnemu zakresowi elementów, pewnych wartości będących obrazami tych elementów, od skutku wprowadzenia tej zasady w czyn, tj. relacji między odpowiadającymi sobie elementami ze zbioru wyjściowego (zbioru argumentów) oraz ze zbioru będącego obrazem zbioru wyjściowego względem danego odwzorowania (tj. zbioru wartości).

Wskazanie na czynnościowe znaczenie pojęcia odwzorowania (łac. *functio* – działanie, wykonywanie) wspiera przypisywany Dedekindowi aspekt konstrukcjonizmu, jego początkowe określenie, iż jest to zasada, reguła, pozwala sądzić, iż przyjmował on je jako podstawowy przedmiot matematycznej refleksji oraz praktyki. Nie było to przełomowe podejście – było to raczej zgodne z dziewiętnastowiecznym pojmowaniem podstaw teorii mnogości i logiki, gdzie zaliczano do nich (jak np. Frege) zarówno zbiory, ich elementy (przedmioty), jak i funkcje, oraz tłumaczono je doniosłym prawem myśli[558].

Z ontologicznego punktu widzenia, poprzez funkcję należałoby w takim wypadku rozumieć nie tyle obiekt statyczny, co raczej związany z pewną dynamiką, ponieważ determinujący określone działania i operacje na całkowicie podstawowych obiektach (tj. elementach i zbiorach). Zwłaszcza, że Dedekind wyraźnie rozróżniał odwzorowanie od jego

---

[556] Por. *„Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen"*. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 349.

[557] G. Peano, *Giuseppe Peano, Sulla definizione di funzione*, „Atti della Reale Accademiadei Lincei" 20, (1911), 3–5.

[558] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*

wyniku (tj. zbioru wartości)[559]. Chodziłoby również o taki obiekt, który niejako łączy elementy i obiekty ze sobą (poprzez relację element–obraz elementu oraz zbiór–obraz zbioru), a także pozwala tworzyć nowe. Wydaje się więc, że odwzorowanie, chociaż zaliczane przez Dedekinda do obiektów podstawowych jak np. zbiór (powstający poprzez zebranie w myśli wszystkich elementów w jedną całość), miałoby inny rodzaj ontologii niż sam zbiór czy jego elementy. Zarysowany problem przekracza ramy niniejszego opracowania, powinien być więc tematem odrębnych, szerszych badań. W pracy pozostaniemy przy ogólnym zaliczeniu odwzorowania do grupy podstawowych elementów matematyki Dedekinda razem z *Dingen* – elementami zbioru oraz zbiorem określanym jako *System*.

Należy dodać, że wydaje się, iż wyżej wymienione obiekty (jednakże bez pojęcia odwzorowania) były również obiektami podstawowymi w odniesieniu do konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych. Co prawda Dedekind zaczął rozważania w pracy z 1872 roku od własności systemu liczb wymiernych, rozpatrywanych jako struktura złożona z samego zbioru, ale i z określonymi na nim działaniami i relacją porządku. Niemniej jednak, odniósł się głównie do zbioru liczb wymiernych, aby na ich przykładzie pokazać brak własności ciągłości. Ową własność zaś zdefiniował przy pomocy odniesienia do prostej złożonej z punktów (tj. przy pomocy zbioru punktowego).

Wzmocnienie ontologii w kontekście wielkości nieskończończonych

Tak jak wcześniej zostało wspomniane, Dedekind odnosząc się do „świata myśli" odnośnie zbioru nieskończonego (w dowodzie na jego istnienie), wzmocnił ontologię swojej teorii mnogości (tj. bardziej podkreślił jej rolę, w przeciwieństwie do Cantora, u którego w analogicznych okolicznościach wskazywaliśmy na osłabienie tej roli). Jeśli chodzi o stosunek Dedekinda do zbiorów nieskończonych, należy wspomnieć, iż zauważał on po pierwsze (podobnie jak Bolzano), iż paradoksalna właściwość zbiorów nieskończonych (że całość zbioru nieskończonego jest równa swojej odpowiedniej części – właściwemu podzbiorowi) może je definiować. Przeprowadził nawet oryginalną analizę skończoności w kategoriach

[559] Dodatkowo Dedekind pisze, iż owo odwzorowanie z *T*, zawarte w odwzorowaniu φ z *S*, możemy nazwać dla uproszczenia tak samo, czyli φ. Dopuszcza więc, że może istnieć inne odwzorowanie ϕ różne od φ, które jednak „wykonane" na systemie *T*, daje w efekcie te same rzeczy (*Ding*), co odwzorowanie φ. Rzeczy te opisywane symbolami $\varphi(t)$, $\phi(t)$ spełniają równanie: $\varphi(t)=\phi(t)$ dla każdego elementu t należącego do systemu *T*. Por. „*Ist nun T* irgendein Teil von *S,* so ist in der Abbildung φ von *S* zugleich eine bestimmte Abbildung von *T* enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf. [...] jedem Elemente *t* des Systems *T* dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches *t* als Element von *S* besitzt. [...] zugleich soll das System, welches aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das Bild von *T* heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist" R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 349.

nieskończoności[560]. Dodatkowo, udowodnił twierdzenie, które mówi, że istnieją zbiory nieskończone. Wspominamy o podejściu Dedekinda do zbiorów aktualnie nieskończenie dużych w tym miejscu, aby zestawić to stanowisko ze stanowiskiem względem wielkości nieskończenie małych, a także aby lepiej porównać je w efekcie ze stanowiskiem Cantora do tego rodzaju obiektów matematycznych.

Dedekind traktował teorię mnogości jak narzędzie do formalnego objaśniania i ugruntowania sensu matematycznych treści, stąd możemy sądzić iż ontologia akceptowana przez niego odnośnie do teorii mnogości była również podstawową ontologią dla pozostałych matematycznych treści, jakimi się zajmował. Poniżej przedstawimy w zarysie dowód istnienia zbioru nieskończonego i potrzebne objaśnienia.

Rozdział 5 *Was sind und was sollen die Zahlen?* zawiera teorię zbiorów skończonych i nieskończonych. A także znaną definicję zbioru nieskończonego, od której zresztą się zaczyna. Dedekind pisze: „O systemie *S* mówi się, że jest nieskończony, jeśli jest podobny do odpowiedniej części samego siebie (32); w przeciwnym przypadku *S* nazywany jest systemem skończonym"[561].

Należy zauważyć w tym miejscu zarówno precyzję, jak i zwięzłość. Dedekind wydobywa taką cechę zbiorów nieskończonych, która w wystarczający sposób odróżnia zbiory nieskończone od skończonych. Więcej Dedekind napisze na temat dowodu istnienia zbiorów nieskończonych. Nie będziemy tu przytaczać całego dowodu, ponieważ został on zacytowany wcześniej, jednakże zwrócimy uwagę na trzy najważniejsze rzeczy – 1. Dedekind odwołuje się do pewnego świata myśli, 2. świat ten jest nieskończony, 3. jest on gotową, aktualną całością wszystkich jego elementów. Wiemy, że liczba tych elementów była nieskończona, stąd chodzi w tym dowodzie o nieskończoność aktualną. Dedekind stwierdza w (okrojonym w tym miejscu) dowodzie istnienia zbioru nieskończonego:

> „Mój świat myśli, tj. całość *S* wszystkich rzeczy, które mogą być przedmiotem mojego myślenia, jest nieskończona [...]. W konsekwencji *S* jest nieskończone, c.n.u."[562].

---

[560] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[561] Por. *„Ein System S* heißt unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist (32); im entgegengesetzten Falle heißt *S* ein endliches System". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 357.

[562] Por. *„66. Satz. Es gibt unendliche Systeme. Beweis *). Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit* *S* aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von *S* bedeutet, so ist der Gedanke *s',* daß *s* Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von *S.* Sieht man

Dalsze stwierdzenia w czterech kolejnych punktach po dowodzie istnienia zbioru nieskończonego są dosyć trywialne z punktu widzenia intuicji oraz współczesnej matematyki. Po pierwsze, Dedekind wskazuje na to, że jeśli dwa systemy są do siebie podobne, to oba muszą być albo skończone, albo nieskończone[563]. Po drugie, stwierdza, że jeśli jakaś część systemu jest nieskończona, to cały system musi być również nieskończony (lub że każda część systemu skończonego również musi być skończona)[564]. Następnie zamieszcza wniosek, wynikający z dwóch wcześniejszych punktów, o tym, że system podobny do części skończonego zbioru jest skończony[565]. I na końcu rozdziału o nieskończoności Dedekind dodatkowo stwierdza z pozoru trywialny fakt (w jego praktyce matematycznej można zauważyć wiele z pozoru trywialnych twierdzeń, które okazują się potem ważniejsze, niż się wydawało), że jeśli system z wyłączeniem jednego elementu jest skończony, to po dołączeniu elementu wcześniej wyłączonego również jest skończony[566].

Należy przyjrzeć się – jak już zostało wspomniane – pierwszemu zdaniu w dowodzie Dedekinda. Utożsamia on świat myśli z całością *S* wszystkich rzeczy, które mogą być przedmiotem jego myślenia. Odwołuje się więc do pewnych rzeczy, mogących być przedmiotami myślenia, w sposób uprzedni do samej czynności myślenia. To z kolei jest argumentem, iż nie tylko podstawom teorii mnogości przypisywał on pewnego rodzaju realizm – jakiś rodzaj istnienia, ale również przypisywał go bardziej zaawansowanym i skomplikowanym strukturom.

---

dasselbe als Bild *φ(s)* des Elementes *s* an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung y von *S* die Eigenschaft, daß das Bild *S′* Teil von *S* ist; und zwar ist *S′* echter Teil von *S,* weil es in *S* Elemente gibt (z. B. mein eigenes Ich), welche von jedem solchen Gedanken *s′* verschieden und deshalb nicht in *S′* enthalten sind. Endlich leuchtet ein, daß, wenn *a, b* verschiedene Elemente von *S* sind, auch ihre Bilder *a′, b′* verschieden sind, daß also die Abbildung *ϕ* eine deutliche (ähnliche) ist (26). Mithin ist *S* unendlich, w. z. b. w.”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 357. Dedekind w przypisie dodaje, że podobną uwagę można znaleźć w §13 dzieła Bolzano (Paradoksy nieskończoności) z 1851 roku.

[563] Por. *„67. Satz. Sind R, S* ähnliche Systeme, so ist *R* endlich oder unendlich, je nachdem *S* endlich oder unendlich ist”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 358.

[564] Por. *„68. Satz. Jedes System S,* welches einen unendlichen Teil *T* besitzt, ist ebenfalls unendlich; oder mit anderen Worten, jeder Teil eines endlichen Systems ist endlich”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 358.

[565] Por. *„69. Satz. Jedes System, welches einem Teile eines endlichen Systems ähnlich ist, ist selbst endlich*”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?..., dz. cyt.*, 359.

[566] Por. *„70. Satz. Ist a* ein Element von *S,* und ist der Inbegriff T aller von *a* verschiedenen Elemente von *S* endlich, so ist auch *S* endlich”. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?, 1888, Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, w GW: s. 359.

Dodatkowo Dedekind określa „świat myśli" podczas dowodu jako zawierający (aktualnie) nieskończenie wiele elementów. Mimo iż jest to świat myśli, a więc świat będący w jakiejś zależności od umysłu podmiotu matematycznego, jest on nieskończony. W jakiś więc sposób musi poza umysł wykraczać – wszak według intuicjonistów nawet umysł idealnego matematyka nie jest w stanie ująć nieskończoności aktualnej, ponieważ potrzebny byłby do tego nieskończony odcinek czasowy, aby móc wykonać nieskończoną ilość kroków danej operacji. Stąd można twierdzić, że ów „świat myśli", do którego Dedekind się odwołuje, nie oznacza jedynie przyjęcia ontologii konstrukcjonistycznej (nie oznacza, iż przedmioty świata myśli są jedynie dosłownym wytworem umysłu i istnieją tylko w umyśle), ale wzmocnienie ontologii osłabiającej konceptualistyczny konstruktywizm – poprzez częściowe uniezależnienie ontologii obiektów matematycznych od umysłu matematycznego podmiotu, np. wskazaniem na pewną ciągłość powstałych (skonstruowanych) obiektów w perspektywie społeczno-historycznej.

Dodatkowo, w kontekście tego, co wyżej zauważone, należy przyznać, iż w praktyce matematycznej Dedekinda, oprócz strukturalistycznego podejścia do matematycznych badań, można rozpoznać również taką strukturalistyczną ontologię obiektów, jakimi się w tych badaniach zajmował. Nie oznacza to, że wszystkie obiekty w praktyce matematycznej Dedekinda były strukturami (co może potwierdzać przypuszczenie, wyrażone przez Jessicę Carter)[567]. Nie oznacza to również, że badał on dane i gotowe struktury, a raczej intuicje na temat wymaganych konkretnych struktur oraz konstruował ich modele. Kierując się topologicznym nazewnictwem Bartłomieja Skowrona, zamieszczonym w jego książce: *Część i całość. W stronę topoontologii*[568], można stwierdzić iż Dedekind budował optymalną, matematyczną przestrzeń dla wymaganych struktur (tj. liczb rzeczywistych i naturalnych).

Ostatecznie, analizując rodzaj strukturalizmu ontologicznego, jakim można najbliżej opisać ten Dedekindowski, należy zwrócić się raczej w kierunku strukturalizmu nieeliminacyjnego. Jedyną kwestią, która może pozostać wątpliwa, jest to, czy ma być on bardziej zbliżony do propozycji Charlesa Parsonsa (ze względu na niewymagające silnej ontologii modelowanie), czy do propozycji Stewarda Shapiro (ze względu na realizm, jaki można zauważyć w kontekście Dedekinda teorii mnogości)[569]. Jeśli rozróżnimy kwestię teorii

---

[567] J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice..., dz. cyt.*

[568] B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii..., dz. cyt.*

[569] E. Reck, G. Schiemer, *Structuralism in the Philosophy of Mathematics..., dz. cyt.*

mnogości jako narzędzia i kwestię modeli tworzonych przy jej pomocy jak kwestię zbiorów liczbowych, dla których modele były tworzone, można jednak zasadniczo przychylać się do obu tych propozycji, w zależności od aspektu, jaki rozpatrujemy.

Bez rozróżniania tych kwestii, patrząc na praktykę matematyczną Dedekinda jak na pewną całość, można uwzględnić równocześnie obydwie perspektywy – zarówno obiektów podstawowych (jak elementy-rzeczy), jak i struktur (zbiory liczbowe, teoriomnogościowe). Paul Benacerraf podkreślał, że współczesna matematyka nie zajmuje się indywidualnymi obiektami bez kontekstu struktur, że nie rozpatruje się innych właściwości elementów i relacji pomiędzy nimi niż strukturalne[570]. Tutaj będzie chodziło raczej o to, że Dedekind nie rozpatrywał „wewnętrznej" natury matematycznych obiektów podstawowych (jak określił to Michael Resnik)[571].

Dodatkowo można rozważać strukturalizm Dedekinda w perspektywie teorii kategorii – z uwagi na podkreślaną przez niego rolę odwzorowania. Takie skojarzenie praktyki matematycznej Dedekinda, tj. postrzeganie jako podstawowego narzędzia, ale jednocześnie podstaw matematyki nie samej teorii mnogości ale raczej teorii kategorii, proponują np. Leo Corry, Colin McLarty i José Ferreirós[572]. Wskazuje się też strukturalistyczną ontologię jako pewien wynik, ale jednocześnie wymóg strukturalistycznej metodologii, której Dedekind był świadomy (albo przynajmniej powinien być świadomy)[573].

Interesujące wydaje się, iż obydwaj matematycy – Cantor i Dedekind – pomimo wielu różnic w swojej praktyce matematycznej, w konfrontacji z kwestią nieskończoności aktualnej napotykali na podobne poznawcze problemy, które próbowali rozwiązać. Uogólnienie poznawcze, jakiego dokonał Cantor po raz pierwszy, aby ująć symbolicznie nieskończoną wielkość, a także operowanie pojęciami w celu wytwarzania kolejnych nieskończonościowych symboli powodowało, iż nie był przekonany, jaką ostatecznie symbole te mają zawartość. To motywowało go do poszukiwania argumentów poza matematyką, za istnieniem nieskończoności aktualnej, aby odnieść się w jakiś sposób do ewentualnej treści symboli nieskończonościowych. Dedekind natomiast udowadniał istnienie zbiorów nieskończonych w

[570] P. Benacerraf, *What numbers could not be?*, „Philosophical Review" 74, (1965), 70.

[571] M.D. Resnik, *Mathematics as a science of patterns: ontology and reference*, „Noûs" 15, (1981), 529.

[572] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[573] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*..., *dz. cyt.*

sposób meta-matematyczny. Odwoływał się do możliwości logicznej, potencjalnej zaistnienia nieskończenie wielu myśli w swoim świecie myśli, ale również – używając pojęcia „mój świat myśli” – odniósł się do tego, że ową nieskończoność można ująć również tak, że można uchwycić jej istniejącą aktualnie treść – innymi słowy, określenie „zbiór nieskończony” nie jest puste semantycznie. Nawet jeśli jego opis formalny zbioru nieskończonego jest równoważny z możliwością potencjalnie nieskończonej, umysłowej konstrukcji, Dedekindowskie odniesienie do „świata myśli” pokazuje, że można go ująć umysłowo, niejako również w sposób immamentny (nie wspominając już o tym, że Dedekind nie wypowiadał się, czy matematyczne obiekty istnieją poza działalnością umysłu, czy nie).

Podsumowując, należy stwierdzić iż Dedekind w kontekście nieskończoności aktualnej wzmocnił ontologię obiektów, nad jakimi pracował. Realizm pragmatyczny względem jego praktyki matematycznej jest łatwiejszy do opisania niż w przypadku Cantora, poprzez bezpośrednie odniesienia do pewnego rodzaju poglądowości i matematycznego praktycyzmu (odnośnie do obiektów podstawowych, jak i względem konstruowanych modeli liczbowych). Dodatkowo Dedekind bardziej niż Cantor akcentował kwestie konstrukcyjne i treść zbioru nieskończonego, a nie tylko odniósł się do stwierdzonej przez Bolzano już wcześniej właściwości, iż część właściwa zbioru nieskończonego jest równoliczna z jego całością (do czego Cantor się głównie odwoływał). Dlatego to praktyce matematycznej Dedekinda, a nie Cantora przypisujemy mocniejszy aspekt realizmu pragmatycznego.

4.3 Podsumowanie

Ontologiczny realizm, w jakim proponuje się rozpatrywać abstrakcyjne byty matematyczne stosowane przez Cantora i Dedekinda, posiada dwa wymiary. Przede wszystkim istnieje wymiar wewnętrzny względem tej praktyki matematycznej (tj. obiekty matematyczne istnieją, w tym są wprowadzane względem danego matematycznego podmiotu, ponieważ są przedmiotem praktyki matematycznej tego podmiotu). Ale podkreślano również wpływ tzw. wiedzy tła – wiedzy dziedziczonej, jaką w pewnym stopniu każdy matematyk na początku przyswoił – dlatego też wskazujemy, że realizm należy rozpatrywać względem perspektywy historyczno-społecznej (tj. obiekty matematyczne istnieją, jako wprowadzone i obiektywnie komunikowalne przedmioty historyczno-społecznego dyskursu).

Chociaż zostało wskazane, iż struktury, które konstruowali i badali Cantor oraz Dedekind, mogą w ściśle określonym znaczeniu mieć przyznany status istniejących realnie, wewnętrznie względem matematycznej praktyki (zgodnie z koncepcją wewnętrznego realizmu[574]), to za Jessicą Carter uważamy, iż nie należy ograniczać ontologii matematycznej do struktur. Sposobem na to, aby nie ograniczać praktyki matematycznej, jest dopuszczenie różnorodności praktyk matematycznych, które mogą w różny sposób dotyczyć matematycznych obiektów[575]. Stąd w wymiarze ontologii względem indywidualnej praktyki matematycznej wyróżniamy dodatkowo obiekty podstawowe (takie których się nie definiuje bądź nie konstruuje).

W przypadku Cantora możemy jako podstawowe obiekty matematyczne wymienić obiekty teoriomnogościowe – głównie będzie chodzić o sam zbiór, którego Cantor początkowo nie zdefiniował, ale można również zaliczyć do tych obiektów same elementy zbioru, o których wspomina w definicjach zbioru w późniejszym okresie pracy naukowej. Jednak oprócz obiektów teoriomnogościowych można jeszcze wymienić liczby wymierne, które były w jego mniemaniu podstawowymi – względem innych (zwłaszcza rzeczywistych) liczb – wielkościami liczbowymi.

Wśród bardziej złożonych obiektów, jakie odnajdujemy w praktyce matematycznej Cantora, warto wymienić same liczby rzeczywiste, prostą rzeczywistą, liczby kardynalne czy porządkowe, jak również – w pewnym sensie – sam zbiór nieskończony (w tym nieskończony iloczyn zbiorów potęgowych).

Próbując wymienić obiekty podstawowe z grupy obiektów omawianych w rozdziale dotyczącym ontologii Dedekinda, na pewno należy wspomnieć o rzeczach – *Dingen*, stanowiących najbardziej podstawowe elementy zbioru. Następnie można wspomnieć sam zbiór – nazywany przez Dedekinda Systemem – bardziej złożony, bo powstały w wyniku umysłowej operacji na bardziej podstawowych obiektach – elementach zebranych przez pomyślenie w całość. Ostatecznie można również odnieść się do odwzorowania, jako obiektu-zasady, związanego z dynamiką praktyki matematycznej, ponieważ określającego wykonywanie określonej operacji umysłowej oraz będącego w konsekwencji narzędziem

[574] Z. Król, *O platonizmie w teorii mnogości...*, *dz. cyt.*

[575] Jak to robi np. Keith Devlin, rozróżniając naukę wykonywania pewnych procedur, wykonywanie nowych procedur, ale również poszukiwanie nowych, adekwatnych do danej sytuacji sposobów rozwiązywania problemów, a możliwe jest to według Devlina dopiero po zrozumieniu szerszego sensu i kontekstu tych problemów – czasem do wykonania tylko przez geniuszy. K. Devlin, *Myślenie matematyczne. Twój nowy sposób pojmowania świata...*, *dz. cyt.*, 15,90.

łączącym statyczne obiekty matematyczne (ponieważ na nich operującym), jak i wytwarzającym nowe.

Z bardziej złożonych obiektów należy wymienić wszystkie pozostałe struktury skonstruowane przez Dedekinda, włącznie z dwoma modelami liczbowymi (*R* i *N*), oraz takie, do których się odwoływał, jak na przykład zbiór liczb wymiernych wraz z działaniami i porządkiem czy prostą złożoną z punktów, na której określił własność ciągłości. Mniej złożone niż same modele obiekty to na przykład zdefiniowany przez Dedekinda nad-zbiór złożony ze zbiorów czy łańcuch (*Kette*), będący podstawą zbioru prosto nieskończonego (tj. modelu *N*).

Jeśli chodzi o istnienie obiektów i kwestii matematycznych względem perspektywy historyczno-społecznej, przedstawione zostały elementy matematyki, jakie posiadają pewnego rodzaju ciągłość względem tej perspektywy – tj. zostały wprowadzone wcześniej, i następnie są rozwijane lub wykorzystywane do rozwijania innych obiektów lub kwestii przy pomocy dostępnych, matematycznych metod. Nazwaliśmy te obiekty i kwestie wiedzą dziedziczoną. Głównymi aspektami owej dziedziczonej wiedzy była konstrukcja liczb rzeczywistych jako odpowiedź na problem niewymierności i program arytmetyzacji analizy (u obydwu matematyków) oraz zawierająca nawiązanie do starożytnej teorii stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa (u Dedekinda), a także kwestia samej teorii mnogości jako pewne nawiązanie do starożytnej propozycji podstawowych jednostek tworzących wszystko u Cantora lub tylko matematykę (ale nie w sposób absolutny) u Dedekinda, oraz wreszcie kwestia wielkości nieskończenie małych i nieskończenie wielkich jako pewien probierz, jak obaj matematycy w praktyce wykorzystywali wiedzę dziedziczoną.

5 *Krytyczna ocena i rewizja dominujących interpretacji: Cantor-platonik i Dedekind-konstuktywista (Teza I)*

Jednym z zasadniczych celów niniejszej rozprawy jest krytyczna ocena i rewizja dominującego w literaturze radykalnego rozróżnienia: Cantor-platonik i Dedekind-konstruktywista. Uważamy bowiem w świetle dotychczasowych analiz, że nie jest to jedyna możliwa interpretacja ich stanowisk filozoficznych, a samo stanowisko może być osłabiane (Teza I).

W celu wykonania tego zadania zostały dobrane trzy tezy pomocnicze::

Teza a: U Cantora można zrekonstruować elementy konstrukcjonizmu poznawczo-metodologicznego, związanego z ontologicznym strukturalizmem w jego praktyce matematycznej.

Teza b: U Dedekinda można rozpoznać przejawy filozoficznej postawy strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, będącego przyczyną, a nie skutkiem elementów konstrukcjonistycznych.

Teza c: Tezy a oraz b nie wykluczają pewnej pragmatycznej rzeczywistości zarówno u Cantora, jak i u Dedekinda, w której mogą istnieć matematyczne byty (podstawowe, jak i konstruowane z nich struktury).

W tym rozdziale zajmiemy się najpierw analizą i próbą uzasadnienia tych tez pomocniczych, a następnie przejdziemy do omawiania i dyskusji tezy głównej.

Aby uzasadnić **Tezę a,** przypomnimy wybrane, skonstruowane struktury matematyczne Cantora (takie jak zbiór liczb rzeczywistych wraz z izomorficzną z nim linią rzeczywistą, sam zbiór nieskończony, nieskończony zbiór potęgowy oraz nieskończone liczby porządkowe i kardynalne, a także zbiór pusty). Przypomnimy również, że matematyk ten w swojej praktyce naukowej nie definiował prostych, narzucających się obiektów, ale musiał opisywać takie, które wymagały intencjonalnych umysłowych czynności konstrukcyjnych – tj. konstruował je. Oprzemy się przy tym na już omówionych przykładach, korzystając ze współczesnych rozważań na temat intuicji matematycznej (w szczególności z propozycji wizualizowania obiektów matematycznych), jak i na ogólnej definicji intencjonalności.

W celu uzasadnienia **Tezy b**, przypomnimy przykłady skonstruowanych przez Dedekinda zbiorów liczbowych (tj. zbioru liczb rzeczywistych oraz liczb naturalnych) oraz stosowaną przez niego metodę modelowania teoriomnogościowego w zakresie podstaw matematyki. Istotne są tutaj przedstawiane przez niego konkretne założenia, precyzja i konsekwencja wyprowadzania kolejnych elementów struktur oraz efektywność budowanych modeli. Metoda ta – jak przypomnimy – związana była nie tylko ze strukturalistyczną metodologią, ale również z epistemologią przyjmowaną przez Dedekinda. Pokażemy, iż jego konstrukcjonizm wynika z przyjętej metody budowania strukturalnych, teoriomnogościowych modeli liczbowych.

Ostatecznie wskażemy na możliwość przypisania zarówno Cantorowi, jak i Dedekindowi pewnego rodzaju konstrukcjonizmu poznawczego, jako podstawowego elementu indywidualnej praktyki matematycznej. Wskażemy jednak różnice między obydwoma matematykami w tym aspekcie.

Dla uzasadnienia **Tezy c** przypomnimy obiekty podstawowe (liczby wymierne oraz zbiory u Cantora, jak i *Dingen* u Dedekinda, stanowiące podstawowe teoriomnogościowe jednostki) oraz struktury (zbiory liczbowe N i R, a także struktury teoriomnogościowe), jakich dotyczyły ich teorie matematyczne – zarówno w kontekście ich indywidualnej praktyki matematycznej, jak i ich odniesień do wiedzy obiektywnej. Będziemy argumentować, że taki rodzaj ontologii jest możliwy, ponieważ wspomniane obiekty stanowiły przedmiot analizowanej praktyki matematycznej. Jako że ową ontologię rozpatrujemy nie tylko w perspektywie obiektów podstawowych, ale również struktur, można będzie przypisać obydwu matematykom strukturalizm ontologiczny (w przeciwieństwie do metodologiczno-epistemologicznego). Dodatkowo przedstawimy argumenty rozróżniające ontologię obiektów matematycznych Dedekinda oraz Cantora.

Aby uzasadnić **Tezę I,** rozpatrzymy kolejno wnioski, jakie zostały otrzymane w ramach uzasadniania **tez a, b** oraz **c**. Przede wszystkim przedyskutujemy konstrukcjonizm poznawczy, jaki przypisany został w niniejszej pracy obu matematykom. Nawiążemy w tym celu do propozycji Kanta oraz współczesnych uwag na temat intuicji matematycznej. Będziemy twierdzić, że matematyka, jaką uprawiał Cantor, nie była jedynie w prosty sposób odkrywana poprzez pewną formę naoczności, ale istotne były również świadome i zamierzone umysłowe operacje konstrukcyjne, wraz z towarzyszącym im celem. Będziemy argumentować również za stanowiskiem, że operacje te nie dotyczyły jedynie języka i warstwy pojęciowej, ale także semantyki (treści tych pojęć).

Przedyskutujemy również strukturalizm epistemologiczno-metodologiczny Dedekinda. Przeanalizujemy przypisywaną Dedekindowi metodę modelowania teoriomnogościowego w zakresie podstaw matematyki, w kontekście metody matematycznego modelowania wykorzystywanej do badania problemów pozamatematycznych. Pokażemy, że celem Dedekinda nie było bezpośrednio konstruowanie liczb rzeczywistych i naturalnych jako samych w sobie obiektów, ale opracowanie optymalnych struktur teoretycznych, w jakich można uwzględnić wszystkie niezbędne własności tych zbiorów liczbowych, a także przy pomocy których można owe zbiory liczbowe opisać formalnie.

Rozważymy też realizm, przypisywany obiektom praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda. Pomimo abstrakcyjności matematycznych obiektów, wskażemy po pierwsze na realizm, będący pochodną indywidualnej praktyki matematycznej (tj. realizm wewnętrzny względem matematyki). Pokażemy również, że realizm ten można opisać przy pomocy propozycji Poppera, ponieważ ontologia obiektów indywidualnej praktyki matematycznej jest ściśle związana z ontologią obiektywnej wiedzy matematycznej, do jakiej zarówno Cantor, jak i Dedekind nawiązywali, jak i w jakiej ich naukowy dorobek został utrwalony.

Ostatecznie wskażemy – w kontekście opozycji do skrajnych wizji platonizmu Cantora oraz konceptualistycznego konstruktywizmu Dedekinda – że można zrekonstruować podobne aspekty filozofi matematyki u tych matematyków. Są to konstrukcjonizm dotyczący poznawczego budowania matematycznych struktur oraz ontologiczny realizm Popperowski w zakresie II i III świata, zawierający częściowo ontologiczny strukturalizm. Pozwoli to na zrekonstruowanie alternatywnej wobec rozróżnienia platonik–konstruktywista propozycji filozofii matematyki Cantora i Dedekinda. Nie podważy to bezpośrednio dyskutowanej tradycji, jednakże pośrednio alternatywą tą wskażemy na pewne podstawowe podobieństwa w filozofiach matematyki obu uczonych domagające się rewizji dotychczasowych dychotomicznych interpretacji ich dokonań.

W rozprawie głównym celem jest osłabienie niemożliwej w pełni do utrzymania opozycji platonizm–konstruktywizm, kojarzonej w niektórych kręgach z Cantorem i Dedekindem, oraz zaproponowanie dla niej alternatywy. Jako propozycje wyjściowe rozważaliśmy platonizm deklarowany przez Cantora w kontekście nieskończoności aktualnej oraz opracowany przez Dadaczyńskiego, a także konstruktywizm przypisywany Dedekindowi przez Łukasiewicza, jak i Murawskiego, oparty na wypowiedziach na temat tworzenia liczb (rzeczywistych i naturalnych).

W związku z tym, rozdział zaczniemy od omówienia tych dyskutowanych w niniejszej pracy stanowisk (tj. od omówienia opozycji Cantor-platonik *vs.* Dedekind-konstruktywista i konceptualista). Następnie omówimy rekonstruowane kwestie epistemologiczne i związane z nimi metodologiczne, to jest konstrukcjonizmu Cantora oraz strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego Dedekinda, przypisując im obydwu pewien rodzaj konstrukcjonizmu poznawczego, który u drugiego z matematyków uzależniony jest ściśle od wskazanego strukturalizmu jako nadrzędnej (ale nie zastępczej) perspektywy. W ostatniej części omówimy rekonstruowaną kwestię ontologii, wskazując po pierwsze na realizm wewnętrzny względem praktyki matematycznej obydwu matematyków, oraz, po drugie, na związany z nim realizm wiedzy obiektywnej, wytworzonej w danym kontekście społeczno-historycznym. Kwestia strukturalizmu omówiona w jednym z wcześniejszych rozdziałów dotyczy również ontologii, dlatego wskażemy na różnorodność wymienionych obiektów istniejących, dzieląc je na podstawowe i na konstruowane z nich struktury – dotyczyć to będzie zarówno Cantora, jak i Dedekinda. W podsumowaniu postaramy się zestawić dyskutowaną perspektywę filozofii matematyki z perspektywą rekonstruowaną w tej rozprawie.

5.1 Krytyczna analiza dychotomicznego obrazu Cantor-platonik vs. Dedekind-konstruktywista i konceptualista

Deklarowany platonizm Cantora

Istnieje wiele opracowań, które omawiają platonizm Cantora (jak również kwestię innych, przypisywanych mu założeń filozoficznych)[576]. Z uwagi na wielość podobnych ujęć w niniejszej pracy skupimy się na interpretacjach autorstwa polskich filozofów i matematyków, w której przypisuje się Cantorowi platonizm jako wiodące założenie filozoficzne w matematyce[577]. Istnieje również wiele opracowań, omawiających sam matematyczny platonizm, jego rodzaje, jak i jego związek z oryginalną filozofią Platona, stąd należy

[576] K. Hauser, *Cantor's concept of set in the light of Plato's Philebus*, „The Review of Metaphysics" 63, (2010) nr 4, 783–805; J.E. Hester, *Metaphysics in Mathematics*, „arXiv" 2103.10512, (2021), doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.10512.; Ø. Linnebo, *Platonism in the Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[577] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*; J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*..., *dz. cyt.*; Z. Król, *Platonizm w matematyce a platonizm w naukach matematyczno-przyrodniczych*..., *dz. cyt.*; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*..., *dz. cyt.*; K. Wójtowicz, *Problem istnienia we współczesnej filozofii matematyki*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa seria R. VI" 21, (1997) nr 1, 55–78.

podkreślić, że będziemy się opierać głównie na interpretacji założeń filozoficznych Cantora w duchu platonizmu dokonanej przez Jerzego Dadaczyńskiego[578].

Dadaczyński zauważa, że odniesienia Cantora do filozofii platońskiej miały miejsce zasadniczo w kontekście zbiorów nieskończonych, a konkretnie liczb pozaskończonych. Jest to istotny aspekt rozważań dotyczących nieskończoności w ogóle, a także rozważań dotyczących reakcji na nią opisującego ją (bądź natrafiającego na nią) podmiotu. Jak jednak Dadaczyński zauważa dalej, można pod pewnymi względami przypisać Cantorowi platonistyczne założenia w odniesieniu do reszty jego działalności matematycznej – chodzi głównie o podstawy matematyki (jak konstrukcja liczb rzeczywistych), jednakże można też bez problemu przypisać Cantorowi te założenia na tle całości jego praktyki matematycznej[579].

Najważniejszym aspektem założeń filozoficznych Cantora, który jest poddawany krytycznej analizie w niniejszej pracy, jest wątek radykalnego platonizmu. Dadaczyński ujmuje kwestię w bardziej wyrafinowany sposób. Wskazuje on, iż przypisywanie Cantorowi wyłącznie stanowiska platońskiego jest uproszczeniem. Rekonstruuje on wątek spinozjańsko-fichteański, a także wątek pre-formalizmu metodycznego. Jednakże opiera on swoje analizy głównie na filozoficznych uwagach (deklaracjach) Cantora. Można powiedzieć, że analizy niniejszej pracy są uzupełnieniem prac Dadaczyńskiego o komplementarną analizę praktyki matematycznej Cantora w zakresie podstaw matematyki. Uwzględnimy tutaj alternatywną propozycję przesłanek filozoficznych towarzyszących jego praktyce matematycznej, a także przeprowadzimy analizę porównawczą z praktyką matematyczną Dedekinda. To pierwsze jest związane z – niekoniecznie uświadomionymi – nowymi założeniami filozoficznymi, uwikłanymi w analizowane fragmenty matematyki. To drugie zaś pozwala wyłonić charakterystykę praktyki naukowej Cantora, jego przed-naukowe założenia i cele, które niekoniecznie musiał lub chciał komunikować wprost.

Korzystając z wniosków przedstawionych przez Dadaczyńskiego, można oprzeć się na dwóch kwestiach. Pierwszą z nich jest założenie o istnieniu sfery transsubiektywnej, w której matematyczne przedmioty już istnieją w pełni, niezależnie od matematycznego podmiotu i jego działalności. Nieistotna jest budowa tej sfery i jej konsekwencje, mogące powodować

[578] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

[579] J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1...*, *dz. cyt.*, 1–2.

antynomie (tj. że sfera ta jest ustrukturyzowana teoriomnogościowo, przede wszystkim jeśli chodzi o abstrakcyjne byty, oraz „nie jest 'uwarstwiona' według zasad Russellowskiej teorii typów”[580]). Ważny jest jednak związek ze sferą intersubiektywną, tj. ze sferą pojęć, a także to, że jednym z podstawowych abstrakcyjnych obiektów w filozoficznych deklaracjach Cantora był zbiór[581].

Szczególnie ważny – ale tu podważany – jest fakt, iż istnienie sfery transsubiektywnej z perspektywy platonistycznej w pewien sposób determinuje sferę intrasubiektywną, a więc w konsekwencji determinuje również działanie samego, matematycznego podmiotu[582]. Nie pozostawia miejsca na twórcze elementy działalności naukowej – tu matematycznej. Dodatkową rzeczą jest to, że Dadaczyński przedstawia niejako platonizm z perspektywy zewnętrznej (filozoficznej i teologicznej) u Cantora, ponieważ opiera się na jego deklaracjach pozamatematycznych, którymi matematyk z Halle uzupełnia matematyczne rozumowanie. W tej rozprawie najistotniejsza jest perspektywa wewnętrzna praktyki matematycznej, która nie jest tak radykalna, jak zewnętrzna, bo nie wyklucza twórczości matematycznego podmiotu i uzależnia istnienie od samej praktyki (indywidualnej i społeczno-historycznej). Dodatkowo perspektywa ta nie wymaga angażowania tak silnych argumentów ontologicznych, jak np. teza św. Augustyna „o realnym istnieniu liczb całkowitych: skończonych i pozaskończonych, jako odwiecznych idei w umyśle Boga”, którą to tezę Cantor przypisywał również sobie[583].

Drugą kwestią są poznawcze założenia Cantora, opisywane jako skrajny „racjonalizm metodologiczny”, tj. podejście odrzucające jakąkolwiek wiedzę płynącą z doświadczenia, ale traktujące źródło wiedzy matematycznej jako dane umysłowi *a priori*. Najistotniejsze jest, że Cantor uważał, iż poznawanie pojęcia jest równoznaczne z jego zdefiniowaniem[584]. Jednakże

---

[580] J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2..., dz. cyt.*, 37.

[581] Należy zaznaczyć, iż Cantor, chociaż na płaszczyźnie filozoficznej przedstawił możliwość redukcji matematyki do teorii mnogości, matematycznie takiej redukcji formalnie nie wykazał (choć ją komentował).

[582] Dadaczyński za R. Carlsem wymienia dwa warunki określające skrajny realizm Cantora:
„1. Dla każdego predykatu jednoargumentowego istnieje byt abstrakcyjny;
2. Owe byty abstrakcyjne są indywidualnymi, stanowiącymi jedność przedmiotami. Różnią się one od konkretnych przedmiotów swym abstrakcyjnym charakterem, ale nie odróżniają się od nich swą przedmiotowością”. J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1..., dz. cyt.*, 30.

[583] J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1..., dz. cyt.*, 32.

[584] Dadaczyński określa za Cantorem etapy definiowania (odkrywania) nowego pojęcia: na wykonaniu następujących operacji:

można równie dobrze stwierdzić, że owo definiowanie da się określić jako pewną syntaktyczną konstrukcję językową, mimo iż Cantor w sferze deklarowanych założeń filozoficznych nie zgodziłby się z tym.

Jak pisze Dadaczyński:

„Pojęcia owe nie były jednak kreowane *ex nihilo*. Wcześniej, przed ich zdefiniowaniem (poznaniem) były ‘uśpione’ w poznającym podmiocie (*in uns geschlummert*), ‘spoczywały już do pewnego stopnia w nas’ (*was in uns gewissermaßen schon lag*). Poprawne zdefiniowanie tych pojęć powodowało ich obudzenie i wprowadzenie do świadomości (*Bewußtsein*). Jako gotowe wkraczały w istnienie (*er* [*der Begriff* – J.D.] *tritt fertig ins Dasein*) w sferze intrasubiektywnej”[585].

Niemniej jednak, gdyby założyć, że twórczość podmiotu matematycznego jest pewnym warunkiem praktyki matematycznej, która rozwija matematyczną wiedzę, można uznawać proces definiowania (czy też konstruowania) nowych pojęć jedynie za opis fragmentu owej praktyki. Dodatkowo, gdyby owa twórczość matematycznego podmiotu była warunkiem koniecznym, nawet jeśli mówimy o czystej dedukcji i analizie związków syntaktycznych, błędem byłoby mówienie o „wyłanianiu” lub „budzeniu” nowych pojęć. Bardziej właściwe byłoby określenie praktyki matematycznej po prostu jako konstruowanie i rozwijanie matematycznej wiedzy (pojęć, twierdzeń, teorii). W tym kontekście zachowany byłby pierwiastek humanistyczny, niepowtarzalny aspekt wpływu każdego z matematycznych podmiotów na uprawianą przez siebie dyscyplinę naukową. Do tego można byłoby uwzględnić różnorodność przejawów samej matematycznej praktyki.

W powyżej opisanej interpretacji rozwijania matematyki, odmiennej od podejścia Cantora, jakie zrekonstruował Dadaczyński, można utożsamiać wiedzę dziedziczoną, zastaną i nabywaną z matematycznym, III światem Poppera. Nie jest to jednak zgodne z deklarowanymi

1. „’Stawia się’ (man setzt) na początku jakiś przedmiot bez własności (ein eigenschaftloses Ding), który jest niczym innym, jak nazwą albo znakiem *„A”;*

2. Określa się relacje owej nazwy w stosunku do innych predykatów, tych i tylko tych, których sens (*Bedeutung*) określony jest na podstawie istniejących już w sferze intrasubiektywnej pojęć. Orzekając o nazwie *‘A’ P, (A), P2(A),...,* ‘powołuje się do istnienia’ odpowiadające nazwie *‘A’* pojęcie przez wyliczenie jego cech (własności);

3. Dobór stosownych predykatów musi być taki, by nie były one wzajemnie sprzeczne;

4. Nowe pojęcie winno być dobrze odróżnialne od pojęć należących do wiedzy bazowej w stosunku do niego”.J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2...*, *dz. cyt.*, 275.

[585] J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2...*, *dz. cyt.*, 278.

założeniami Cantora. Co prawda uwzględniał on pewien zasób wiedzy wypracowanej (czy raczej odkrytej) i przez niego zastanej, jednak pojęcia, jakie do tego rodzaju wiedzy należały, określał mianem uświadomionych, gotowych i wypróbowanych[586]. Była to wiedza już wcześniej istniejąca (jak i całość możliwej wiedzy) w sferze transsubiektywnej (czy też w umyśle Boga), ale odkryta i ukonstytuowana w świadomości poznającego prawdę matematyczną podmiotu, a tym samym wprowadzona pojęciowo do sfery intrasubiektywnej (tj. do języka matematyki).

W kontekście powyższego analizy oparte na badaniu samej praktyki naukowej Cantora są uzupełnieniem jego deklarowanych filozoficznych założeń, ale czasem również stanowią argumenty podważające deklarowane przez Cantora i opisane szczegółowo przez Dadaczyńskiego założenia. Oczywiście krytyce podlegać może różnica między perspektywami badanych założeń, bowiem deklarowane poglądy Cantora obejmują perspektywę raczej zewnętrzną, natomiast założenia rekonstruowane tutaj obejmują perspektywę wewnętrzną (względem samej praktyki). Jednakże na obronę takiego zestawienia przemawiać może fakt, iż zarówno założenia filozoficzno-teologiczne Cantora, jak i założenia rekonstruowane w oparciu o analizę praktyki matematycznej dotyczą tych samych obiektów matematycznych.

Cantor odrzucał w matematyce wiedzę płynącą z doświadczenia. Widać to również na podstawie przeanalizowanej metodologii pracy naukowej. Można próbować odpowiedzieć na pytanie, skąd taka, a nie inna postawa u matematyka z Halle odnośnie do czerpania wiedzy z doświadczenia. W tym kontekście należy dopuścić, iż znaczny wpływ na tę postawę miały świadome, filozoficzne założenia Cantora o prawdziwości platonizmu odnośnie do ontologii matematycznych obiektów (tj. jego przekonanie, że matematyczną wiedzę się odkrywa, nie tworzy).

Cantor odrzucał wszystkie źródła poznania ze sfery transsubiektywnej, w tym sensie, że według niego poznanie świata zewnętrznego nie było potrzebne, aby uprawiać matematykę[587]. W tym odrzucał również intuicję odnoszącą się do tego, jak wygląda świat. W związku z tym poznanie w sferze intrasubiektywnej pozostawało mu jako źródło wiedzy w zakreślonej przez

[586] J. Dadaczyński, *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2...*, *dz. cyt.*, 275.

[587] Izomorfizm obu sfer był przez Cantora przyjęty *a priori*, na początku rozważań ontologiczno-epistemologicznych, choć potem w pracach filozoficznych starał się znaleźć obiekty nieskończone w Aussenwelt, aby (odwołując się do izmorfizmu) uzasadnić ich istnienie matematyczne (w sferze intrasubiektywnej).

niego ontologii matematyki (nauki). W sferze tej następował proces redukcji do samych pojęć. A w szczególności istnienie tych pojęć zależało od ich poprawnego zdefiniowania i powiązania, nie licząc samych pojęć bazowych[588].

Teoretycznie więc poznanie dla Cantora było możliwe głównie na etapie operowania wyabstrahowanymi z treści pojęciami i poprzez wyciąganie z tych operacji logicznych wniosków (mowa o budowaniu teorii metodą genetyczną) Podobnie – jak wskazuje Dadaczyński (jednak ze wymienionymi przez nas zastrzeżeniami) – miała się rzecz u Hilberta, który reprezentował stanowisko nominalizmu, w którym to stanowisku semantyka nie miała takiej wagi, jak właśnie syntaktyka.

Mechanizm ten z powodzeniem obserwujemy na przykładzie konstrukcji liczb rzeczywistych, ale również w przypadku budowania teorii mnogości. Jednak nie tylko. Jak silne były te przekonania Cantora, ukazuje również na przykład to, że nie uznawał on za konieczne zakładać właściwości ciągłości materii, zwłaszcza w kontekście czystej nauki, jaką jest matematyka[589]. Co więcej, twierdził, że nie jest konieczne zakładanie właściwości ciągłości czasu. Zbiega się to z założeniami epistemologicznymi matematyka z Halle, który nie uważał za pewną wiedzy płynącej z doświadczenia[590]. Tym bardziej nie mógł traktować jako punktu odniesienia w systemie matematycznym przesłanek, które były związane z intuicją o świecie zewnętrznym.

Natomiast wiedzę, którą Cantor uzyskiwał w trakcie oderwanych od treściowego kontekstu procedur (ponieważ w swoich filozoficznych założeniach redukował swoją pracę matematyka do operacji językowych, operował samymi „napisami"), to względem świata zewnętrznego (świata „doświadczeń") tam ową wiedzę wykorzystywał czy wręcz według niej ten świat modelował. Potwierdzają to jego twierdzenia z zakresu filozofii przyrody[591].

---

[588] Pojęcia bazowe przyjmowano były przez Cantora w procesie podwójnej redukcji ontologicznej – jako pojęcia same w sobie.

[589] Cantor uważał założenie o ciągłości przestrzeni w matematyce za hipotezę, która jest wynikiem naszej wolnej konstrukcji umysłowej, natomiast założenie takie w fizyce uważał za mylne i oparte na intuicji. Twierdził ponadto, że obserwowana w świecie zewnętrznym i zakładana w fizyce ciągłość jest wynikiem ciągłych ruchów, jakie w tym świecie zachodzą. Por. J. Dadaczyński, *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora...*, *dz. cyt.*, 137–138.

[590] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

[591] Skorzystano tu z artykułu Dadaczyńskiego, który opracował temat filozofii przyrody Cantora: J. Dadaczyński, *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

Jeśli chodzi o źródło wiedzy matematycznej – czy raczej o proces konstruowania i wprowadzania matematycznej wiedzy – można potwierdzić, że u Cantora mamy do czynienia z pewnym założeniem o odkrywaniu tej wiedzy w sferze intrasubiektywnej (czyli w przestrzeni Intelektu), ale w oparciu o definiowanie pojęć w praktyce matematycznej.

Jeśli definiowanie pojęć miało być odkrywaniem matematyki, powinno być opisem bezpośrednio dostępnych dla umysłu reprezentacji tych pojęć lub ich treści. Jednak widzimy tutaj trzy trudności – po pierwsze, jak zostało wskazane, pewne struktury wprowadzone przez matematyka z Halle były zbyt skomplikowane, aby było możliwe ujęcie ich w formie niezłożonego, przechodniego doświadczenia (według Giaquinto – obrazu) ich reprezentacji. Specyfikacja kategorii reprezentacji wizualnych mogłaby już wymagać jej intencjonalnego skonstruowania.

Po drugie, gdyby nawet założyć, iż reprezentacje nowych pojęć były dostępne i dlatego Cantor mógł definiować te pojęcia, godząc je ze swoim założeniem o odkrywaniu matematyki, byłoby to sprzeczne z przypisywanym mu quasi-nominalizmem i preformalizmem hilbertowskim, rozumianym przez Dadaczyńskiego jako ograniczenie poznania matematycznego do symboli i relacji logicznych między nimi.

Po trzecie zaś, rozmawiając o reprezentacjach wizualnych, skupiamy się na reprezentacjach wyobrażeniowych (zarówno symbolicznych, jak i ikonograficznych), ponieważ obiekty matematyczne – nie licząc zewnętrznych reprezentacji wizualnych, jak np. liczydło[592] – są obiektami abstrakcyjnymi. Stąd nawet dostęp do wizualnych lub symbolicznych reprezentacji nie stanowi dowodu na odkrywanie matematycznych obiektów. Do tego Cantor przyjmował wraz z zastanym całokształtem wiedzy również pewne intuicyjne przekonania, jak i przekonania takie tworzył w oparciu o pozamatematyczne przywiązanie do teorii mnogości – co mogło wpływać na jego odbiór matematyki. W związku z powyższym, proponowane w niniejszej pracy stanowisko konstrukcjonizmu epistemicznego, jako podkreślające wkład matematycznego podmiotu w tworzenie matematycznej wiedzy, nie odrzucające szerszego kontekstu ontologii, będzie bardziej trafne niż stwierdzenie, że Cantor dosłownie „odkrywał" matematyczną wiedzę.

Nie oznacza to, iż żaden rodzaj realizmu nie może być przypisany matematycznej praktyce Cantora. Będziemy argumentować, że można zrekonstruować pewien naturalny

[592] M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics*..., *dz. cyt.*

realizm ontologiczny – realizm wprowadzanych do matematyki obiektów, który zależy od matematycznej praktyki (zarówno w kontekście indywidualnym, jak i historyczno-społecznym), a więc jest realizmem pragmatycznym. Ontologia matematyki rekonstruowana na podstawie analizy matematycznej praktyki może być określana jako strukturalistyczna, jednakże nie przyznajemy Cantorowi stanowiska epistemiczno-metodologicznego strukturalizmu. Podkreślmy, że realizm ten nie jest tożsamy z platonizmem deklarowanym przez Cantora.

Konstruktywizm przypisywany Dedekindowi

Jeśli chodzi o Dedekinda, istnieje wiele pozycji opisujących jego założenia filozoficzne[593], pomimo dość skromnego materiału, związanego z deklarowanymi przez niego założeniami filozoficznymi (czy ogólnie poza- lub przed-matematycznymi). Opracowania te opierają się więc bardziej na analizie jego matematycznego dorobku. W związku z tym mogą w kontekście niniejszej pracy być pomocne bardziej dla problematyki wewnętrznych kwestii filozoficznych aniżeli dla zagadnień zewnętrznych[594]. Stąd również przypisywane mu założenia są bardziej zróżnicowane i nie tak radykalne, jak te deklarowane przez Cantora i przypisywane mu.

Jednak tak jak w przypadku Cantora i z tych samych powodów, tu również korzystamy głównie z opracowań polskich filozofów i matematyków[595]. Uwagi, które mogą być interpretowane jako przypisywanie Dedekindowi konstruktywistycznego kierunku, możemy znaleźć już u jednego z przedstawicieli Szkoły Lwowsko-Warszawskiej, tj. u Jana

[593] J. Ferreirós, *Dedekind and the Set-theoretic Approach to Algebra*, w: J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel 1999, 81–116; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*; E.H. Reck, *Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense*, „Synthese" 137, (2003) nr 3, 369–419; E.H. Reck, *The Logic in Dedekind's Logicism*, w: *Logic from Kant to Russell. Laying the Foundations for Analytic Philosophy*, red. S. Lapointe, New York 2018, 171–188; H.B. Sinaceur, M. Panza, G. Sandu, *Is Dedekind a Logicist? Why does such a question arise?*, w: *Functions and Generality of Logic. Reflexions on Dedekind's and Frege's Logicisms 37, Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, red. S. Rahman, J. Symons, Cham 2015, 1–65; M.A. Sinaceur, *La méthode mathématique de Dedekind*, „Revue d'histoire des sciences" 32, (1979) nr 2, 107–142; W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number..., dz. cyt.*

[594] Podział ten, był wykorzystywany przez Carnapa, Taita, jak i opisywany przez Z. Króla. Por. R. Carnap, *Empiricism, Semantics and Ontology*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, 1983, 241–257; Z. Król, *O platonizmie w teorii mnogości..., dz. cyt.*; W. Tait, *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and its History..., dz. cyt.*

[595] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym..., dz. cyt.*; Z. Król, *O platonizmie w teorii mnogości..., dz. cyt.*; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów..., dz. cyt.*

Łukasiewicza[596], który podkreślał rolę „twórczej działalności człowieka” w tworzeniu i rozwijaniu matematycznej wiedzy.

Chociaż Łukasiewicz nie określił z całą pewnością i dokładnością swojej interpretacji wypowiedzi Dedekinda (jak twierdzi Murawski, członkowie Szkoły Lwowsko-Warszawskiej nie interesowali się zbytnio radykalnymi kierunkami filozofii matematyki i nie opowiadali się za wyłącznie jednym z nich)[597], można rozważyć pewną jej propozycję. Murawski pisze: „intuicjonizm przeciwstawia się platonizmowi i głosi ontologiczną tezę konceptualizmu, zgodnie z którą matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną życiową aktywnością rozumu. Obiekty badane przez matematykę to pojęcia istniejące w umyśle”[598].

Gdyby sparafrazować wypowiedź Murawskiego o intuicjonizmie i wstawić w miejsce intuicjonizmu – pojęcie konstruktywizmu przypisywanego Dedekindowi (jako że intuicjonizm jest szczególnie radykalną wersją konstruktywizmu), otrzymujemy taką definicję tego kierunku, która jest przeciwieństwem platonizmu przypisywanego Cantorowi w kontekście ontologii.

Murawski zresztą przypisuje wprost Dedekindowi konceptualizm (a gdzie indziej konstruktywizm)[599]. Pisze on:

> „Zwolenników konceptualizmu znaleźć można w różnych okresach historycznych. Był wśród nich na przykład [...] wielki matematyk niemiecki Richard Dedekind. [...] twórca ścisłej teorii liczb rzeczywistych, głosił na przykład, że liczby są wolnym wytworem umysłu ludzkiego (pisząc o tworzeniu liczb niewymiernych, używał niemieckiego słowa *erschaffen*, które znaczy „stwarzać” i które pojawia się w Księdze Rodzaju przy opisie stwarzania świata przez Jahwe)”[600].

Otrzymujemy w związaku z powyższym konstruktywistyczną interpretację Dedekinda, określającą jego podejście jako przeciwieństwo platonizmu przypisywanego Cantorowi,

---

[596] J. Łukasiewicz, *O nauce...*, *dz. cyt.*

[597] R. Murawski, *Philosophical reflection on mathematics in Poland in the interwar period*, „Annals of Pure and Applied Logic” 127, (2004) nr 1–3, 325–336, doi: https://doi.org/10.1016/j.apal.2003.11.026.

[598] R. Murawski, *Główne koncepcje i kierunki filozofii matematyki XX wieku*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” XXXIII, (2003), 77.

[599] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów...*, *dz. cyt.*

[600] R. Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki...*, *dz. cyt.*, 257.

zarówno w kontekście ontologicznym, jak i epistemicznym. Można również na podstawie wypowiedzi Murawskiego przypuszczać, że sądził iż Łukasiewicza podobnie interpretował Dedekinda wypowiedź o tworzeniu liczb. Warto jednak zaznaczyć, iż zarówno Łukasiewicz, jak i Murawski, wypowiadając się o swoim własnym naukowym doświadczeniu, wyrażali intuicyjne stanowisko, mówiące o silnej ontologii wewnętrznej logiki (pierwszy) i matematyki (drugi)[601]. Stąd ich interpretacja Dedekinda mogła być oparta wprost na jego – skądinąd pozamatematycznych – deklaracjach odnośnie do tworzenia liczb.

Warunkami, jakich mogą wymagać konstruktywistyczne kierunki filozofii matematyki, są – w tej radykalnej wersji[602] – (1) odrzucenie nieskończoności aktualnej (z racji tego, że nie będzie jej w stanie skonstruować nawet idealny podmiot), a także (2) postulat konstruowalności (dowiedlności) pojęć i twierdzeń matematycznych[603]. Pierwszy postulat odrzucimy ze względu na to, iż Dedekind nie unikał nieskończoności aktualnej, natomiast drugi w pewnych aspektach podtrzymamy.

W kontekście alternatywnego konstrukcjonizmu wskażemy również te elementy, które podkreślają oryginalny, twórczy wkład matematycznego podmiotu w proces tworzenia, rozwijania matematyki (tj. wszelkie czynności umysłowe, jakich wymagają matematyczne obiekty). Rozważymy to, co Michael Dummett przypisuje matematykowi z Brunszwiku[604]. Istotna będzie zwłaszcza zasada „abstrakcji Dedekinda"[605] – tj. odwoływanie się do abstrakcyjnego kreowania (tworzenia) przedmiotów matematycznych[606].

Wskażemy, że można rozważać abstrakcję i tworzenie liczb przez Dedekinda jako przejaw proponowanego konstrukcjonizmu. Jednakże w przeciwieństwie do Dadaczyńskiego, który pisze, że: „uwaga o 'wolnych tworach ludzkiego ducha' rozstrzyga [...] o niezależnym od

601 R. Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki...*, *dz. cyt.*, 256.

602 R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.*

603 E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics...*, *dz. cyt.*

604 W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number...*, *dz. cyt.*

605 W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number...*, *dz. cyt.*

606 Mowa tu zarówno o tworzeniu liczb rzeczywistych poprzez przekroje, które jednoznacznie te liczby wytwarzają, ale nie są z nimi tożsame, jak i o tworzeniu zbioru liczb naturalnych przez konstrukcję zbioru skończonych liczb porządkowych – która również wyznacza zbiór liczb naturalnych, lecz nie jest z nim tożsama.

przedmiotów ‘wyjściowych’ istnieniu przedmiotów abstrakcyjnych arytmetyki”[607], nie twierdzimy, iż to sformułowanie rozstrzyga o szczegółowej ontologii tychże przedmiotów. Zwłaszcza jeśli przyjąć za punkt wyjścia konstruktywistyczno-konceptualistyczną interpretację wypowiedzi Dedekinda o tworzeniu liczb. Albo jeśli weźmiemy pod uwagę interpretację dokonaną przez samych konstruktywistów, jak np. przez Dummeta, który twierdził, iż owa abstrakcja i tworzenie u Dedekinda miały wydźwięk psychologiczny, i częściowo pozamatematyczny[608].

Chociaż bierzemy jako punkt wyjścia rozważania Dummeta, nie jest to stanowisko, które wyczerpuje ramy filozoficzne, jakie proponujemy w niniejszej pracy (konstrukcjonizm-realizm). Owszem, podkreślana jest tutaj w pewnym sensie kwestia psychologicznych aspektów poznania matematycznego (jak intencjonalność i myślenie wizualne). Niemniej jednak, zaznaczmy również, że poznanie matematyczne jest determinowane w pewnym stopniu przez już wytworzoną i wprowadzoną wcześniej wiedzą matematyczną (obiektami, podejściami i kierunkami badań). Stąd ostatecznie – jak można wnioskować na podstawie rozważań w tej rozprawie – stwierdzamy, że postawa Dedekinda była także konsekwencją jego strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego oraz tego, że – mówiąc wprost – modelował matematyczne zagadnienia (tworzył modele struktur, które miały spełniać określone wymagania i posiadać wymagane własności, odpowiadające określonym problemom).

Dedekind nie odrzucał – tak jak wymagali tego intuicjoniści – istnienia nieskończoności aktualnej – wręcz wzmocnił wewnętrzną ontologię matematyki w zetknięciu z ową nieskończonością[609]. Ale już pewnego rodzaju wymóg dowiedlności, konstruowalności matematycznych obiektów i struktur był przez niego przyjmowany (co widać zwłaszcza w kontekście udowadniania istnienia zbioru nieskończonego, gdzie dowód ten polega po części na wyjaśnieniu, w jaki sposób może istnieć zbiór nieskończony).

[607] J. Dadaczyński, *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 20, (2012) nr 3, 106.

[608] M. Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA 1991, 296.

[609] Co było również pewnym argumentem przeciwko konstruktywizmowi, rozumianemu w tym sensie, jaki został przedstawiony w niniejszej pracy – i jaki mógł być przypisywany Dedekindowi. Zarówno sprzeciw wobec istnienia nieskończoności aktualnej, jak i wymóg konstruowalności matematycznych obiektów były naturalnymi konsekwencjami radykalnych konstruktywizmów.

Zasada jest sformułowana następująco: „nic, co można udowodnić, nie powinno być akceptowane bez dowodu”[610] i wydaje się wyznawana przez Dedekinda, jeśli spojrzymy na jego praktykę matematyczną. Erich Reck określa Dedekinda jako matematyka posiadającego „większą świadomość wyzwań stawianych przez kroneckerowskie obliczeniowe i konstruktywistyczne restrykcje”[611]. W związku z tym można zaliczyć ów wymóg dowiedlności (konstruowalności) jako założenie konstrukcjonistyczne (nie zaś konstruktywistyczne), w kontekście praktyki matematycznej Dedekinda.

Choć – nawiązując choćby do perspektywy Dummetta – należy podkreślić, iż nie zajmujemy się tutaj bezpośrednio kwestią psychologizacji matematyki i jej filozofii, chcemy podkreślić rolę oryginalnego wkładu podmiotu matematycznego w rozwijanie tej dziedziny naukowej. Zwracamy również uwagę na fakt, iż ilość sposobów, na jakie można matematyczną wiedzę rozwijać, jest dużo większa niż tylko jeden. Nie jest łatwo stwierdzić, gdzie jest granica między twórczym wkładem podmiotu matematycznego a pracą nad matematycznym obiektem bądź strukturą lub odkrywaniem pewnych praw. Przy czym należy zauważyć, że w kontekście procesów psychologicznych można mówić o hermeneutyczno-fenomenologicznych aspektach umysłowej pracy na obiektach matematycznych[612]. Można tutaj połączyć elementy twórcze, niepowtarzalne w praktyce matematycznej podmiotu ze zdeterminowaną, racjonalną i logiczną pracą nad realnymi ontologicznie obiektami i strukturami.

Odnośnie do „tworzenia” matematycznych obiektów przez ludzki umysł u Dedekinda, William Tait wskazuje na psychologiczną interpretację Dummeta oraz na sprzeciw Fregego (jak również Russella, komentowanego przez Dummetta), aby rozumieć to określenie w tych kategoriach[613]. Nie zaprzeczamy bezpośrednio temu, iż konstruowanie umysłowe matematycznych obiektów może mieć oparcie w umysłowej intuicji czy psychologicznie zdefiniowanej intencjonalności, jednakże nie dyskutujemy na łamach niniejszej pracy kwestii

[610] Por. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.* Zasada ta zwiększa pewność co do teorii, ale również umacnia założenia, z których wynika udowadniane twierdzenie, a także nakreśla szczegółowe powiązanie owego twierdzenia z założeniami, od których on zależy. Struktura teorii, a przynajmniej jej fragment, staje się bardziej oczywista, przez co również ustala się zakres stosowalności. Por. E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics...*, *dz. cyt.* Nie należy tu mylić utożsamiania formy przedstawiania dowodu (konstrukcji) z jego tworzeniem (ta pierwsza odbywa się za pośrednictwem języka, drugie zaś może odbywać się zarówno w umyśle, jak i przy pomocy różnych narzędzi).

[611] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics...*, *dz. cyt.*

[612] Z. Król, *O platonizmie w teorii mnogości...*, *dz. cyt.*

[613] W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number...*, *dz. cyt.*, 9–11.

psychologii. Niejako przyjmujemy bezzałożeniowo psychologiczny charakter podmiotu matematycznego, jednak nie jest to kwestia szczegółowo analizowana, ponieważ interesuje nas tutaj raczej wiedza obiektywna w znaczeniu Popperowskim. Chociaż największy zarzut względem psychologizmu jest taki, że obiekty matematyczne byłyby wówczas subiektywne (odmiennie odbierane przez każdego z matematyków, niemożliwe do dyskutowania i komunikowania)[614], uważamy że nie należy wykluczać procesów psychologicznych, ale wziąć pod uwagę inne możliwości wyjaśniające intersubiektywność matematyki. Chodzik np. proponowany konstrukcjonizm epistemiczny, który nie wyklucza pewnego pragmatycznego realizmu ontologicznego, a także propozycji III świata Poppera, przy czym należy zauważyć, że nie wypowiadamy się wówczas o kwestii istnienia obiektywnych wzorców matematycznych, w otaczającym świecie, a na temat wiedzy obiektywnej.

Pomimo że konstruktywizm zazwyczaj utożsamia się z poglądem, iż byty matematyczne istnieją dzięki umysłowi człowieka (w skrajnej interpretacji istnieją tylko w umyśle), to w przypadku Dedekinda nie mamy do czynienia z całkowitym oderwaniem teorii od intuicji, odnoszącej się do pewnego obiektu matematycznego, ale również w pewnym sensie do doświadczenia fizycznego. Dedekind nie konstruuje dowolnych obiektów. Przede wszystkim stara się zdefiniować taką strukturę, która odpowiada konkretnym oczekiwaniom, przy czym oczekiwania te stara się również analizować. Widać to na przykładzie konstrukcji liczb rzeczywistych, których najistotniejsza zasada (tj. zasada ciągłości porządku, ale także sam pomysł „wykonywania" przekroju na zbiorze) bierze swój początek bezpośrednio z geometrycznego oglądu kwestii matematycznych. Oczywiście, należy przyznać niezmiennie, iż Dedekind nie tłumaczy swoich odniesień do intuicji ani też nie wprowadza tychże tychże odniesień, w sposób zobowiązujący ontologicznie do teorii matematycznej.

Dedekindowska abstrakcja nie wyklucza odniesienia do rzeczywistości i istniejących tam przedmiotów. W tym kontekście nie do końca zasadne staje się mówienie o dowolnym „tworzeniu" matematycznych obiektów, ponieważ Dedekind jest w pewnym stopniu ograniczony i zdeterminowany w swojej praktyce matematycznej poprzez strukturalistyczny ogląd. Można powiedzieć, że sięga on do świata myśli, po niezbędne obiekty i właściwości, aby wykorzystać je w opracowaniu konkretnej struktury.

[614] W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number*..., *dz. cyt.*, 12.

Owe odniesienia u podstaw konstrukcji liczb rzeczywistych (oczywiste i wyraźne odniesienia Dedekinda do wyobrażenia wizualizacji znaczenia pojęcia ciągłości czy przekroju)[615] były konsekwentnie rozszerzone na resztę teorii. Mimo że być może Dedekind abstrahował znaczenie pojęcia ciągłości od kontekstu geometrycznego, nie pozbawił go jego kontekstu znaczeniowego. Tak samo jak w przypadku pojęcia przekroju, stosował go wraz z częścią kontekstu do opisu porządku ciągłego na zbiorze. Możemy więc postulować, że znaczenie owych pojęć, związane z wyobrażeniem o nich (wizualizacją), było kategorią reprezentacji, przy pomocy której modelował opracowywaną strukturę. Owe sięganie umysłowej rzeczywistości zaprzeczało nieograniczonym, dowolnym możliwościom tworzenia matematyki przez umysł.

W związku z powyższym, możemy sądzić iż stanowisko przypisywane Dedekindowi na podstawie jego wypowiedzi o tworzeniu liczb niekoniecznie musi być interpretowane w konstruktywistyczny sposób. Chociaż uwzględniamy w jego metodologii kwestię konstruowalności (dowodu konstruktywnego) oraz tworzenia przez niego nowych obiektów, przede wszystkim, staramy się przedstawić go jako matematyka, który modelował matematyczne kwestie – przypisujemy Dedekindowi stanowisko strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego. Modelowanie matematyczne było dla niego świadomym wyborem: twórczo konstruował nowe obiekty, jednak odnosząc się do danych problemów oraz korzystając z dostępnych, gotowych obiektów i metod matematycznych. W kontekście epistemologii świadczy to raczej o pragmatycznym nastawieniu do matematyki aniżeli o „stwarzaniu" poszczególnych jej elementów. Związany z tym jest również dwuwymiarowy realizm ontologiczny – względem praktyki indywidualnej oraz społeczno-historycznej.

5.2 Uzasadnienie tez pomocniczych a oraz b

Niniejszy podrozdział ma na celu podsumowanie aspektów epistemicznych (oraz związanych z nimi aspektów metodologicznych), jakie są tutaj rekonstruowane. Aspekty te związane są z procesem konstrukcji matematycznej, rozumianej jako czynność wykonywana przez konkretnego matematyka, dlatego należy rozważyć elementy, które na nią się składają.

[615] Wprawdzie Dedekind nie tłumaczy głębiej swojego odniesienia do pojęcia ciągłości geometrycznej prostej, jednakże warto zauważyć, że nie wyprowadza definicji ciągłości wprost z aksjomatów Eudoksosa-Euklidesa, a poszukuje jej poprzez pewien ogląd właściwości geometrycznych, ale i arytmetycznych, prostej ciągłej. Łączy wielkość ciągłą, nie złożoną z części, ze zbiorem punktów. To przedstawienie czy wyobrażeni ciągłości ma spełniać wymagania rachunku różniczkowego odnośnie do „wypełnienia wszystkich luk" w dziedzinie funkcji (przejście z dziedziny Q do R), niczym innym jak punktami.

Są nimi: rozumowanie (którego nie definiujemy, traktując je jako oczywistą podstawę praktyki matematycznej), jak również intencja oraz intuicja.

Zanim przejdziemy bezpośrednio do omawiania konstrukcjonizmu Cantora oraz Dedekinda (a także strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego tego drugiego), opiszemy szerzej wspomniane na początku pracy dwa pojęcia – intencję oraz intuicję. Następnie spróbujemy pokazać, że ten rodzaj konstrukcjonizmu, na który składa się wspomniana wyżej aktywność umysłowa (zawierająca intecję oraz intuicję), może być przypisywany obydwu matematykom. Wskażemy jednak pewne różnice między nimi.

Intuicja oraz intencja matematyczna

Choć zazwyczaj przy analizach matematycznych, ale również filozoficznych nie bierze się pod uwagę intuicji matematycznej[616], można zauważyć, iż odgrywa ona zasadniczą rolę w całym procesie tworzenia matematyki przed podmiot[617]. Mówiąc o intuicji, należy podkreślić, że w kontekście proponowanego konstrukcjonizmu chodzi o intuicję związaną z myśleniem wizualnym, która może być zdefiniowana jako – tutaj nieuzasadniana bliżej kognitywistycznie czy psychologicznie[618] – umiejętność rozpoznawania i wykorzystywania reprezentacji (ikonograficznych oraz symbolicznych) wyobrażeniowych[619]. Sam fakt, że intuicyjne dowody nie mogą być uważane do końca zawsze za poprawne, zwłaszcza bez przeprowadzenia ich formalizacji, nie wyklucza tego, iż aktywne, jak również intuicyjne funkcjonowanie umysłu można pojmować jako niezbędną podstawę dla racjonalnych analiz, zwłaszcza w podstawach matematyki, do których należy zaliczyć teorię mnogości.

Kurt Gödel argumentował, że intuicja może być rodzajem percepcji: „Nie widzę powodu, dla którego mielibyśmy mieć mniejsze zaufanie do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej”[620]. Z kolei ØysteinLinnebo wskazuje na pewne problemy związane z problemem intuicji, jak np. że nie można mówić o intuicyjnym dostępie

[616] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 117–118.

[617] M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics*..., *dz. cyt.*

[618] Np. propozycją Nanay'a czy Eskinaziego i innych. M. Eskinazi, I. Giannopulu, *Continuity in intuition and insight: from real to naturalistic virtual environment*, „Scientific Reports” 11, (2021) nr 1, 1876, doi: 10.1038/s41598-021-81532-w; B. Nanay, *Unconscious mental imagery*..., *dz. cyt.*

[619] M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics*..., *dz. cyt.*; B. Nanay, *Unconscious mental imagery*..., *dz. cyt.*

[620] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Hypothesis?*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Cambridge 1983, 483–484.

do zbyt dużych zbiorów, a ponadto że należy dokładniej określić, czym jest intuicja – pojęcie to nie może być zbyt niejasne czy też że istnieje problem tożsamości obiektów rozpoznawanych przez intuicję[621]. Oprócz tego przedstawia jednak dość mocne, współczesne stanowiska broniące uwzględniania intuicji – jak naturalizm Penelope Maddy, kantowską quasi-konkretność intuicyjnych obiektów Charlesa Parsonsa (które wykraczają poza propozycję Maddy) czy fenomenologiczną koncepcję intuicji według Dagfinna Føllesdala[622].

Chociaż Linnebo wskazuje, że propozycja Føllesdala jest bardziej szczegółowa niż propozycja Parsonsa[623], jak sam zauważa – obydwaj sięgają w jakiś sposób do intuicji kantowskiej oraz fenomenologii matematyki Husserla, a także obydwaj uważają m.in. że omawiana intuicja jest oparta na aktach postrzegania i wyobrażeń oraz związana z pojęciami i koncepcjami. Dla niniejszej pracy interesujący jest opis Føllesdala, słynnego rysunku kaczki-królika Josepha Jastrowa. Føllesdal pisze: „możemy doświadczyć mnogości różnych przedmiotów, gdy jesteśmy w danej sensorycznej sytuacji: kaczki, królika, ale także ucha królika, oka lub nawet koloru lub przodu przedmiotu"[624].

Jak zauważa Linnebo: „nasza percepcja jest aktywnym procesem, w którym dokonujemy wyboru, na czym się skupić, i jesteśmy aktywnie zaangażowani w interpretację informacji sensorycznycznych, które otrzymujemy"[625].

Z kolei Bartłomiej Skowron powołuje się na Husserla, który wskazywał np. „przestrzenno-topologiczne jakości idealne oraz ich bogate zespoły konstytuowały sensy i znaczenia świata ludzkiego na długo przed powstaniem geometrii"[626]. Warto przy tym wspomnieć, że Husserl utrzymywał, iż obiekty abstrakcyjne odnoszą się do aktualnej lub potencjalnej rzeczywistości[627].

[621] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics...*, *dz. cyt.*, 118.

[622] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics...*, *dz. cyt.*, 120–122.

[623] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics...*, *dz. cyt.*, 123.

[624] D. Føllesdal, *Gödel and Husserl*, w: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, red. J. Hintikka, Kluwer, Dordrecht 1995, 429.

[625] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics...*, *dz. cyt.*, 122.

[626] E. Husserl, *Kryzys nauk europejskich i fenomenologia transcendentalna*, tłum. S. Walczewska, Kraków 2017; B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii...*, *dz. cyt.*, 300.

[627] M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic...*, *dz. cyt.*; E. Husserl, *Formal and Transcendental Logic*, tłum. D. Cairns, The Hague 1969, akap. 64.

Należy podkreślić, że rozważana w niniejszej pracy intuicja ma bezsprzeczne związki z filozofią Kanta, a rozważany tutaj konstrukcjonizm posiada związki z intuicjonizmem, jednak nie jest utożsamiany z programem matematycznym, a raczej z pewnym kierunkiem analizowania i aspektem praktyki matematycznej. Sam Kant określał intuicję jako „bezpośrednią świadomość”[628]. Husserl odróżniał świadomość pasywną i aktywną[629] – w tympodrozdziale mogą to być odpowiedniki bezpośredniego, pasywnego doświadczania wizualnego obrazu (reprezentacji) oraz aktywnego tworzenia kategorii specyfikacji reprezentacji wizualnych. Poniżej pojęcia te, analizowane przez Marcusa Giaquinto zostaną wyjaśnione.

Należy jednocześnie zaznaczyć, że inaczej niż Parsons i Føllesdal, Luitzen Brouwer uważał, iż matematyczne konstrukcje nie zależą od języka. Jak zauważa Murawski, jest to teza będąca w sprzeczno□ci z tradycją, głoszącą coś□ przeciwnego, a związaną z Platonem, Leibnizem i Cassirerem[630]. Stanowisko Brouwera – choć nie w całości – stanowi poważną inspirację i podstawę dla konstrukcjonizmu rozważanego w niniejszej pracy – tak jak on twierdzimy, że podmiot matematyczny tworzy i wprowadza matematyczne treści dzięki matematycznej intuicji, będącej częścią racjonalnych rozważań[631] (chociaż nie jest to jedyny, wystarczający aspekt tworzenia matematyki).

Wprawdzie Linnebo w swojej książce z zakresu współczesnej filozofii matematyki wskazuje na kontrowersje związane z problematyką intuicji[632], jednak w niniejszej pracy nie zamierzamy analizować tych kwestii w taki sposób, a jedynie chcemy pokazać potrzebę uwzględniania tego rodzaju aktywności umysłowej, aby lepiej zrozumieć wnioski z przeprowadzonych tutaj analiz praktyk matematycznych Cantora i Dedekinda (a dodatkowo, aby podkreślić – np. za Łukasiewiczem – twórczy charakter działalności matematycznego podmiotu). Poniżej przedstawimy propozycję Giaquinto, który szczegółowo opisuje intuicyjne

[628] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, London 1973.

[629] M. Maciejczak, *Świadomość intencjonalna w Badaniach logicznych E. Husserla*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria, R. 8” 32, (1999) nr 4, 71–92.

[630] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów..., dz. cyt.*

[631] L.E.J. Brouwer, *Life, Art and Mysticism*, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 37, (1996) nr 3, 391–429.

[632] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics..., dz. cyt.*, 124–125.

mechanizmy wizualizacji, oraz zaproponujemy, jak mogą one pomóc w zrozumieniu i wyjaśnieniu praktyk matematycznych Cantora i Dedekinda.

Giaquinto opisuje taki rodzaj intuicji, który oparty jest na matematycznej wizualizacji. Przy jej pomocy będziemy mogli zarówno lepiej zrozumieć pewne elementy praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda, jak i dowiedzieć się podstawowych rzeczy o epistemologii i ontologii samej matematyki.

Uważa się, że reprezentacje wizualne – w przeciwieństwie do językowych – nie mogą stanowić dowodu (chociaż myślenie schematyczne może być wyjątkiem)[633], ponieważ są zawodne, a w dowodzeniu chodzi o uzyskanie pewności. Jednakże, jak zauważa Giaquinto, na różne sposoby stanowią część zarówno kontekstu dowodzenia, jak i odkrywania (tego drugiego znacznie bardziej)[634]. Są więc naturalną częścią matematycznej praktyki w ogóle.

Myślenie wizualne może być stosowane również w odniesieniu do struktur matematycznych. Według Giaquinto: „Zbiór strukturalny to zbiór rozpatrywany w ramach jednej lub więcej relacji, funkcji, elementów wyróżnionych (stałych) lub ich kombinacji”[635].

Choć Giaquinto podaje takie przykłady, jak np. pierścień liczb całkowitych czy grupę izometrii płaszczyzny euklidesowej, można stwierdzić, iż struktury opracowane przez Cantora i Dedekinda (tj. konstrukcja liczb rzeczywistych stanowiąca algebraiczne ciało albo niektóre teoriomnogościowe struktury) również spełniają tę definicję. Owe strukturalne zbiory określa się jako posiadające „strukturę”, będącą elementem wspólnym dla wszystkich zbiorów ze sobą izomorficznych.

Zdolności „ujęcia poznawczego” przez matematyczny podmiot danej struktury są obecnie tłumaczone zdolnością abstrakcji – nie ma bowiem wystarczających i adekwatnych narzędzi do ich opisu[636]. Jednakże Giaquinto rozróżnia specyfikacje kategorii od obrazów. Specyfikacja kategorii wizualnej umożliwia całościowe ujęcie struktury. Nie jest elementem doświadczenia, ale na nie wpływa poprzez wytwarzanie obrazów danej struktury. Natomiast obraz jest uchwyceniem danej struktury tylko z jednej perspektywy – jest pewnym

[633] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics*..., *dz. cyt.*, 23.

[634] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics*..., *dz. cyt.*, 31–32.

[635] M. Giaquinto, *Cognition of Structure*..., *dz. cyt.*, 43–44.

[636] Russell np. rozróżniał wiedzę z opisu i wiedzę ze znajomości. Giaquinto twierdzi, że struktury abstrakcyjne mogą być trudno poznawalne ze znajomości. M. Giaquinto, *Cognition of Structure*..., *dz. cyt.*, 43–44.

przejściowym elementem doświadczenia[637]. Tym samym otrzymujemy podstawę dla wyjaśnienia podejścia Cantora i Dedekinda do niektórych problemów, jak odwoływanie się Dedekinda do własności ciągłości prostej i do obiektów (czy procesów) „świata myśli", a także stosunek Cantora do nieskończenie małych wielkości czy Hipotezy Kontinuum.

Niektóre struktury możemy poznać przy pomocy wizualnego doświadczenia ich obrazów (szczególnie struktury skończone i niezłożone) – jest to wtedy wiedza „ze znajomości". Niektóre jednak, zwłaszcza nieskończone i skomplikowane (jak zbiór mocy continuum), trudno zwizualizować, nawet jeśli używamy nie obrazów, a specyfikacji kategorii, a także dodatkowo opisu (czy reprezentacji) językowego – jest to wtedy wiedza z opisu. Giaquinto pozostawia otwartą kwestię użyteczności tego aspektu epistemologii, jak i kwestię połączenia go z wiedzą reprezentowaną poprzez język[638].

Na przykładzie nieskończonej półprostej łatwo zobaczyć, że żaden obraz (reprezentacja wizualna) nie może być pełnym odzwierciedleniem jej własności – nie umiemy wyobrażać sobie nieskończoności aktualnej. Jednakże specyfikacja kategorii linii prostej może określać taką półprostą, której jeden koniec jest zakończony punktem, a drugi wydłuża się w nieskończoność. Giaquinto, w oparciu o teorię Stephena Kosslyna[639], przedstawia tonastępująco. Otóż na podstawie doświadczenia obrazu pewnego obiektu tworzona jest instrukcja dotycząca tej wizualizacji, i przekazywana jest ona do systemu aktywacji specyfikacji kategorii (specyfikacje kategorii są reprezentacjami w podsystemie tego systemu). Po czym wytwarzany jest wzorzec aktywności w buforze wizualnym (tj. obraz) – niekoniecznie tylko jeden. Jeśli dana specyfikacja kategorii jest aktywna, obraz, który jest jej wynikiem, zależy od takich parametrów, jak: (1) punkt widzenia, (2) odległość, (3) orientacja itd.[640] Parametry te można zmieniać w sposób ciągły, co skutkuje możliwością ciągłej zmiany wizualnych obrazów, wynikających z danej specyfikacji kategorii, która jest aktywna.

I tak, jeśli wyobrazimy sobie półprostą, w każdym reprezentującym ją obrazie jeden koniec będzie zakończony, drugi zaś nie będzie tego końca posiadał – pomimo iż w każdym obrazie ujrzymy tylko skończoną jej część. To samo możemy powiedzieć o zbiorze liczb

---

[637] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*, 47.

[638] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*, 58.

[639] S. Kosslyn, *Image and Brain*, Cambridge, MA 1994.

[640] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*, 53–55.

naturalnych N – w ich przypadku, będziemy obserwować nieskończony jednostronnie zbiór punktów. Jednak w przypadku zbioru liczb rzeczywistych, Giaquinto uważa, iż nie możemy poznać ich struktury, jeśli myślimy o nich jak o punktach na linii. Według niego przeszkodą jest tu własność ciągłości[641].

Powyższe rozważania ukazują intuicję matematyczną jako pewnego rodzaju nieodłączny element praktyki matematycznej. Nie chodzi o to, aby twierdzić, iż każdy matematyk posiada takie same intuicyjne zdolności i wyobraźnię. A co więcej – że intuicja może zastąpić samo rozumowanie – nie o to nam w tym wypadku chodzi. Jednakże wydaje się, że intuicja (pewnego rodzaju naoczność) jest niezbędnym elementem, gdy mamy do czynienia z matematycznymi obiektami – tak podstawowymi, jak i bardziej złożonymi. Idziemy za interpretacją Poincarégo[642], który podkreślał znaczenie intuicji towarzyszącej matematykowi, oraz nie zgadzamy się z Sébastienem Gandonem[643], który zrównywał logikę Russellowską z obiektowo (a więc również intuicyjnie) zbudowaną matematyką.

Wobec tak rozumianej intuicji (jako pewnej naoczności matematycznych obiektów, nie zaś matematycznych zdań czy zasad logicznych) należy dodatkowo rozważyć pojęcie intencji. Bez tego pojęcia sama naoczność matematycznych obiektów nie jest jeszcze argumentem na rzecz stanowiska, jakie tu proponujemy – tj. że matematyczne obiekty powstają poprzez konstrukcję ich w wykonaniu matematycznego podmiotu. Sama możliwość naocznego dostępu do obiektów mogłaby równie dobrze świadczyć o ich odkrywaniu (jak to zakłada platonizm), ale też o determinizmie naukowym, który polegałby na tym, że matematyka powstawałaby na zasadzie deterministycznie określonych procedur, celów, założeń i kierunków – zanim by powstała, wiadomo byłoby, że powstanie i będzie rozwijana w ściśle określonym kształcie.

Chociaż Husserl opracował pojęcie intencjonalności, współopisujące stosunek podmiotu do naoczności obiektów (a przez to bezpośrednio nawiązujące do propozycji Kanta), należy zaznaczyć że nie będzie ono ścisłą podstawą pojęcia intencji przedstawianego w niniejszej pracy jako jednego z elementów składających się na matematyczną konstrukcję, rozumianą jako czynność. Nie oznacza to jednak, że takie szczegółowe badania nie mogą czy nie będą podejmowane w przyszłości.

[641] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*, 58.

[642] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse...*, *dz. cyt.*; H. Poincaré, *Science et méthode...*, *dz. cyt.*

[643] S. Gandon, *Quelle philosophie pour quelle mathématique?...*, *dz. cyt.*

Niemniej jednak, oprócz uznania w jakiś sposób aspektów psychologicznych aktów umysłowych (w tym psychologicznego aspektu pojęcia intencjonalności)[644], towarzyszących powstawaniu i rozwijaniu matematyki, postaramy się ogólnie określić owo pojęcie przy pomocy – równie ogólnych – odniesień filozoficznych.

Na początku należy zaznaczyć, iż chociaż została opracowana propozycja ontologii matematycznych obiektów, która mogłaby pasować do opisu ontologii matematycznych obiektów tutaj przedstawianych (ontologia przedmiotów intencjonalnych Ingardena[645]), nie jest celem niniejszej pracy odnoszenie się do niej szczegółowo, z racji tego, iż powinno to być przedmiotem odrębnej rozprawy. Jest to propozycja dotycząca raczej opisu formalnej ontologii aniżeli ogólnych kwestii możliwości i sposobu istnienia, połączonych w dodatku ze szczegółowymi kwestiami z zakresu epistemologii. Stąd należałoby przeanalizować pod kątem wspomnianej propozycji wszystkie obiekty wprowadzone przez Cantora i Dedekinda do matematyki. Niemniej jednak nie wykluczamy takich badań w przyszłości, z tym że powinny one również zawierać odniesienie do już zauważonego w niniejszej pracy problemu – tj. problemu rozróżnienia tekstów literackich (sztuki) z tekstami matematycznymi[646].

Dodatkowo, wskazuje się, że chociaż Ingarden wychodzi poza mentalizm Husserlowski w swej propozycji ontologii takich bytów, nadal te są stosunkowo zależne od podmiotu literackiego (od tego, czy się o nich myśli, czy też nie)[647], podczas gdy proponowana w tej rozprawie ontologia matematycznych obiektów zachowuje pewną obiektywną historyczno-społeczną ciągłość. Obiekt matematyczny może być obiektywnym przedmiotem badań i może być również rozpatrywany w kontekście historycznym – raz wprowadzony, jeśli jest przydatny matematycznie, może być tym samym obiektem w wielu teoriach, jak i może być poszerzany zakres jego znaczenia, natomiast obiekt literacki występuje w obrębie jednego dzieła. Czymś innym u Ingardena są idee, istniejące niezależnie od jakiegokolwiek poznającego podmiotu.

[644] Por. „istotną ideą stojącą za intencjonalnością jest myślowe ukierunkowanie na obiekty (lub zwracanie na nie uwagi), tak jakby umysł był skonstruowany jako mentalny łuk, którego strzały mogą być właściwie wycelowane w różne cele". P. Jacob, *Intentionality...*, *dz. cyt.*

[645] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*

[646] Ingarden definiował i analizował pojęcie przedmiotu intencjonalnego w kontekście dzieł literackich. Arkadiusz Chrudzimski zauważa, że Ingarden oddziela byty intencjonalne od swojej teorii bytów znaczeniowych. A. Chrudzimski, *Roman Ingarden o intencjonalności i znaczeniu*, „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria R. 29" 116, (2020) nr 4, 351, doi: 10.24425/pfns.2020.135078.

[647] A. Chrudzimski, *Roman Ingarden o intencjonalności i znaczeniu...*, *dz. cyt.*, 347–348.

Arkadiusz Chrudzimski wskazuje tu dodatkowo na esencjalizm Ingardena, u którego idee są ściśle związane z rodzajami naturalnymi (jak koń, złoto, w przeciwieństwie do „chłoporobotnika”, który nie przedstawia żadnego rodzaju naturalnego)[648]. Jednakże ontologia idei nie pasuje ani do proponowanej ontologii względem indywidualnej praktyki matematycznej, ani do ontologii wyprodukowanej i obiektywnej wiedzy w perspektywie społeczno-historycznej.

Oczywiście można w pewnym sensie zachować ową ciągłość obiektów poprzez wskazanie, iż są one reprezentowane przez matematyczne teksty (jak postuluje Błaszczyk)[649]. Jednakże w niniejszej pracy wystarczy, aby przybliżyć samo pojęcie intencjonalności, sięgnąć do ogólnych filozoficznych wypowiedzi na jego temat autorstwa Searle'a czy Anscombe.

Elizabeth Anscombe rozróżnia trzy konteksty sytuacyjne, kiedyh mamy do czynienia z pojęciem intencji:

1. wyrażanie intencji,
2. działanie intencjonalne (intencja odnosząca się do samej czynności),
3. działanie kierowane przez intencję (odnoszącą się nie do samego działania, ale do jego celu)[650].

Chociaż istnieją wątpliwości co do tego, jak dokładnie należy analizować połączenie między intencją a działaniem, a także jak rozróżnić intencję np. od emocji, wydobędziemy z powyższego rozróżnienia to, co najistotniejsze dla naszej pracy.

Ad.1. W pracy wskazane zostały fragmenty opublikowanych wypowiedzi Cantora i Dedekinda, przedstawiające ich intencje dotyczące matematyki (tj. pewne postawy względem wybranych problemów, jak i ogólnych kierunków ich rozwiązywania), uzupełnione również o wnioski z analiz samej praktyki matematycznej (tj. analizę obiektów matematycznych oraz proces ich konstrukcji), które stanowią podstawę dla opisu całokształtu ich ogólnej intencjonalności.

---

[648] A. Chrudzimski, *Roman Ingarden o intencjonalności i znaczeniu...*, *dz. cyt.*, 351–352.

[649] P. Błaszczyk, *On the Mode of Existence of the Real Numbers...*, *dz. cyt.*; P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*

[650] G.E.M. Anscombe, *Intention...*, *dz. cyt.*; R. Moran, M. Stone, *Anscombe on Expression of Intention...*, *dz. cyt.*

Ad.2. Sama intencja działania naukowego nie jest przedmiotem analiz niniejszej pracy ze względu na zamierzone tutaj cele.

Ad.3. Intencjonalne kształtowanie i kierowanie szczegółowym matematycznym działaniem jest tutaj podstawą do wskazania różnic między indywidualnymi praktykami matematycznymi. Pozwala to również bardziej szczegółowo opisać nie tylko wymienione praktyki, ale również same matematyczne obiekty. Ponieważ zarówno intencja, jak i intuicja są pojęciami, mającymi za zadanie przybliżenie i określenie pojęcia konstrukcji matematycznej, a konstrukcja matematyczna związana jest z czynnością konstruowania matematycznych obiektów, przyjmujemy, iż intencja kierująca szczegółowym działaniem matematycznego podmiotu będzie analizowana przez stopień jej związku z wprowadzanym obiektem. Innymi słowy, szczegółowa intencjonalność obydwu matematyków określona jest poprzez umysłowe, zamierzone nakierowanie na wprowadzaną strukturę.

Wcześniej już ograniczaliśmy ogólną koncepcję intencji zbiorem założeń i celów matematycznych, które tutaj nadal bierzemy pod uwagę. Matematyczna intencja będzie ściśle związana z owymi założeniami i celami i będzie przez nie kształtowana. Jednakże będzie związana również z indywidualnie pojmowanym przez obu matematyków zakresem wprowadzanej i rozwijanej wiedzy (w tym w różnym stopniu z wprowadzanymi obiektami matematycznymi), a także ze sposobem jej wprowadzania i rozwijania. Parafrazując Gertrude Elisabeth Anscombe'a, intencja zasadniczo wiąże się z samym sercem praktyki matematycznej, tj. z działaniem – na różne sposoby i z różnym natężeniem, mogąc stworzyć w efekcie charakterystyczny całokształt intencjonalności dla konkretnej, indywidualnej praktyki.

Z kolei John Searle w interesującym nas kontekście skupia się na pojęciu „stanów intencjonalnych". Stan intencjonalny według Searle'a jest zawsze nakierowany na określone obiekty i stany rzeczy (lub wokół nich). Searle definiuje te stany jako różne treści reprezentatywne, w różnych trybach psychologicznych[651] (uwzględniając związek intencji z działaniem); odróżnia samą intencję jako pewien zamiar od wierzeń, pragnień i przekonań (tj.

[651] Searle pisze: „The form of such Intentional states we can therefore symbolize as S(r),where the ''S" is a variable for psychological mode and "r" for representative content". I dalej wyjaśnia na przykładzie: „In what follows I will frequently use this form to represent Intentional states. Thus, e.g.. the desire reported by "I want to go to the movies" will be represented as
I want (I go to the movies)
and the content of the desire simply by
(I go to the movies)".
Por. J.R. Searle, *The intentionality of intention and action...*, *dz. cyt.*, 48.

od stanów związanych bardziej z emocjami)[652]. Jednak samą intencjonalność opisuje jako własność różnych stanów mentalnych[653].

Dalej Searle opisuje *warunki spełnienia* dla danego stanu intencjonalnego, jako stan rzeczy, który powoduje spełnienie stanu intencjonalnego[654]. Jeśli zaś według niego warunki spełnienia zawierają aktualne przedmioty (jak obiekty, zdarzenia), to przedmioty te są *obiektami intencjonalnymi*[655]. Natomiast *intencjonalnym działaniem* Searl nazywa takie działanie, które można nazwać realizacją warunków spełnienia stanu intencjonalnego[656].

Sam stan intencjonalny u Searle'a może być w niniejszej rozrawie rozumiany jako stan mentalny, opisany symbolem (za autorem) S(*r*), gdzie „S" oznacza pewną zmienną trybu psychologicznego, a „r" pewną reprezentacyjną zawartość. S może wyrażać pewne przekonanie, założenia lub bezpośredni zamiar, natomiast *r* może wyrażać obiekt matematyczny, ale również uznaną, dostępną matematyczną procedurę, jaka zawiera się w praktyce matematycznej. Obiekty intencjonalne Searle'a możemy rozumieć jako matematyczne obiekty, które podlegały, podlegają (i będą podlegać) uwadze świadomego, rozumującego podmiotu matematycznego – a dokładniej jako obiekty zawarte w warunkach spełnienia stanu intencjonalnego (warto podkreślić, iż nie mówimy w tym momencie o obiektach intencjonalnych Ingardena). Działanie intencjonalne będzie realizacją warunków stanu intencjonalnego. Warunki zaś spełnienia stanu intencjonalnego to z kolei taki stan rzeczy, który pozwala na spełnienie stanu intencjonalnego.

---

652 J.R. Searle, *The intentionality of intention and action*..., *dz. cyt.*, 47–49.

653 J.R. Searle, *Intentionality: An Essay in the Philosophy of Mind*..., *dz. cyt.*, 1.

654 Kierunek dopasowania jest przez Searle'a określany w celu rozróżnienia przekonań (których kierunek dopasowania jest umysł-do-świata) od m.in. intencji (których kierunek dopasowania jest określany jako świat-do-umysłu). Niemniej w kontekście niniejszej pracy pojęcie świata należy ograniczyć do matematyki z oczywistych względów.

655 Ogólnie rzecz biorąc, jak zauważa Searle: „Tak więc, na przykład, jeśli wierzę, że Carter jest Demokratą, warunkami spełnienia mojego przekonania jest to, że Carter jest Demokratą, a przedmiotem Intencji jest Carter, ale jeśli wierzę, że król Francji jest łysy, moja wiara nie ma obiektu zamierzonego. Moglibyśmy podsumować tę krótką relację stwierdzeniem, że kluczem do zrozumienia Intencjonalności jest reprezentacja, a kluczem do zrozumienia reprezentacji są warunki spełnienia. Wszystkie stany intencjonalne z kierunkiem dopasowania reprezentują ich warunki spełnienia. [...] Jak zobaczymy później, jesteśmy skłonni powiedzieć: tak jak moje przekonanie jest spełnione, jeśli rzeczywiście zachodzi stan rzeczy reprezentowany przez treść przekonania, tak samo [...] mój zamiar jest spełniony, jeśli działanie reprezentowane przez treść intencji jest faktycznie wykonane. Jeśli wierzę, że będę głosował na Jonesa, moje przekonanie będzie prawdziwe, jeśli będę głosował na Jonesa, [...] a jeśli zamierzam głosować na Jonesa, moja intencja zostanie wykonana, jeśli zagłosuję na Jonesa". J.R. Searle, *The intentionality of intention and action*..., *dz. cyt.*, 49.

656 J.R. Searle, *The intentionality of intention and action*..., *dz. cyt.*, 50.

Aby wyjaśnić powyższe na przykładach, należy odnieść to do pojęcia konstrukcji matematycznej, które ma zespalać samo rozumowanie oraz towarzyszące mu intuicję, jak i intencję. Samo rozumowanie, jak wspomniano wcześniej, jest elementem wziętym za oczywistą podstawę praktyki matematycznej. Intuicja jest w niniejszej pracy rozumiana jako naoczność matematycznych obiektów, zarówno tych zastanych w wyprodukowanym zasobie wiedzy obiektywnej, jak i tych – bardziej lub mniej świadomie – konstruowanych. Natomiast intencja – czy ogólniej: intencjonalność – jest pewnego rodzaju własnością indywidualnych założeń, celów, wpływającą na samą praktykę matematyczną.

Na przykładzie problemu niewymierności można zauważyć, iż chociaż intencją obydwu analizowanych tutaj matematyków było jego rozwiązanie, to Cantora intencjonalność dotyczyła bardziej samego uzupełnienia liczb wymiernych o niewymierne, aniżeli konstrukcji i wprowadzenia nowej, wystarczająco określonej matematycznej struktury *R* (chociaż poniekąd Cantor takową wprowadził). Natomiast u Dedekinda wspomniana intencjonalność dotyczyła – oprócz problemu niewymierności – wprowadzenia ściśle i formalnie określonej struktury, posiadającej własność ciągłości.

Jeśli poniższym symbolom nadamy następujące znaczenie:

$I_C(NIEW)/I_D(NIEW)$ – intencja Cantora/Dedekinda rozwiązania problemu niewymierności,

$I(q)$ – intencja wprowadzenia liczb niewymiernych, aby uzupełnić zbiór liczb wymiernych,

$I(M_c)$ – intencja wprowadzenia modelu liczbowego posiadającego własność ciągłości;

to poniższe będzie opisywało zależność między konstrukcją liczb rzeczywistych u Cantora oraz u Dedekinda:

$$I_C(NIEW) \Leftrightarrow I(q) \subset I(M_c) \Leftrightarrow I_D(NIEW).$$

Warunkami spełnienia intencji Cantora było proste wprowadzenie liczb niewymiernych, nie zaś budowanie modelu liczb rzeczywistych (pomimo to jednak został przez niego wprowadzony, choć nie był tak dookreślony, jak model Dedekinda). Natomiast warunkami spełnienia intencji Dedekinda było wprowadzenie modelu liczbowego, posiadającego własność ciągłości, implikującego istnienie wszystkich niezbędnych w tym zbiorze liczb rzeczywistych (a więc również liczb niewymiernych). Tak należy rozumieć pojęcie intencji oraz intencjonalności odnośnie do innych, omawianych w niniejszej pracy matematycznych obiektów.

Należy zaznaczyć, że formalne oznaczenia Searle'a odpowiadają tu szczegółowej intencjonalności (u Anscombe intencji, która kieruje działaniem ze względu na jego cel – tutaj tym celem jest nowy, konstruowany obiekt), ponieważ są związane z konstrukcją i wprowadzaniem nowych obiektów, struktur matematycznych. Tym samym intencjonalność ta jest bezpośrednio elementem proponowanych ram filozoficznych (konstrukcjonizm-realizm), jakie skupiają się na konstrukcji nowych obiektów. Jednocześnie ogólny zarys perspektywy badawczej Cantora i Dedekinda, wynikający ze stylów ich praktyk matematycznych, które zostaną przedstawione w kolejnym rozdziale, będzie miał za zadanie dodatkową argumentację za elementami intencjonalności i intuicji (oglądu). Ponadto pomoże poniekąd pełniej scharakteryzować te elementy odpowiednio dla każdego z matematyków (nakreślimy dzięki temu ogół rozpatrywanych matematycznych problemów oraz przyjmowanych kierunków ich rozwiązań).

Konstrukcjonizm Cantora

W rozdziale dotyczącym konstrukcjonizmu Cantora wymieniliśmy na trzy rodzaje wprowadzanych przez niego obiektów, które pozwalają scharakteryzować jego epistemologię. Po pierwsze, wskazywaliśmy na zbiór liczb rzeczywistych oraz na nieskończoność aktualną, jako obiekty, które nie zostały w prosty sposób zdefiniowane, ale właśnie skonstruowane (ze względu na swą złożoność). Po drugie, opisaliśmy obiekty bezpośrednio wprowadzane przez Cantora jako produkty umysłowych operacji, takie jak prosta rzeczywista, granice ciągów czy liczby porządkowe, zapewnione przez podane przez Cantora zasady generowania. Po trzecie, przedstawiony został na przykładzach liczb kardynalnych i zbioru pustego proces dekonstrukcji – odwrotny do procesu konstrukcji, ale pozostający czynnością umysłową.

W związku z wyżej wymienionymi przykładami oraz przedstawionymi wcześniej opisami pojęć intencji i intuicji, należy scharakteryzować teraz bliżej rodzaj konstrukcjonizmu, który przypisujemy Cantorowi.

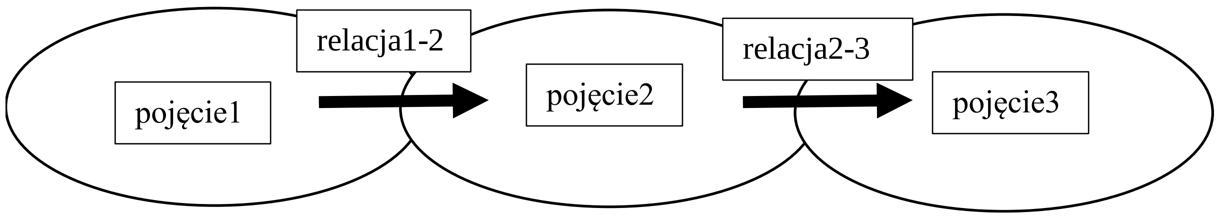
W ścisłej praktyce matematycznej Cantora – choć zostały zrekonstruowane różnorakie struktury, zarówno liczbowe, jak i teoriomnogościowe (zbiory liczbowe, liczby porządkowe i kardynalne, nieskończony iloczyn potęgowy pochodnych zbiorów) – trudno znaleźć przykłady na to, że posługiwał się on konsekwentnie zamierzonymi, świadomymi – i w szczególności – złożonymi specyfikacjami kategorii wizualnych, w kontekście modeli.

Chodzi nam głównie o to, że Cantor nie wprowadzał nowych, złożonych obiektów (modeli) matematycznych planowo, w związku z potrzebą rozwiązania jakiegoś problemu, w szczególności przy pomocy metody, jaką nazywamy tu modelowaniem teoriomnogościowym. W porównaniu z modelem *R* Dedekinda, Cantora konstrukcja *R* nie była kategoryczna[657], natomiast modelu *N* Cantor w ogóle nie zbudował.

Częściowo takie podejście może wyjaśniać quasi-nominalizm, zrekonstruowany w odniesieniu do metodologii Cantora przez Dadaczyńskiego. Kierunek ten może nie stanowi przeciwieństwa dla metody matematycznego modelowania (tj. budowania modeli struktur), ale też jej z konieczności nie zawiera i nie zakłada.

W quasi-nominalizmie przypisanym matematykowi z Halle[658] chodziło o definiowanie kolejnych pojęć poprzez określanie relacji między nimi i pojęciami już zdefiniowanymi. To wskazuje raczej na dedukcyjną, genetyczną metodę pracy niż na modelowanie całych struktur, w których zakres wchodzi często więcej niż jedno pojęcie.

Tak można przedstawić ten proces w uproszczony sposób:



Rysunek 4 Schemat konstruowania dla Cantora.

gdzie ostatecznie pewne pojęcie_x mogło okazać się strukturą, jaka odpowiadała na konkretny problem. Niemniej jednak Cantor nie konstruował (przynajmniej w badanym

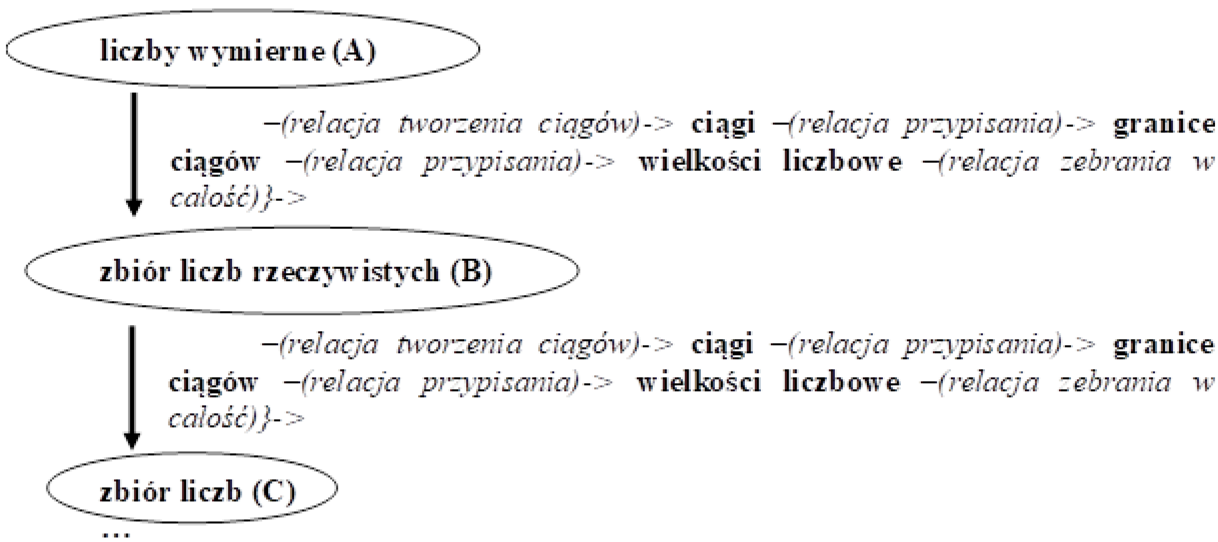
[657] Współczesna konstrukcja Cantora R jest uzupełniona o AA. Natomiast własność ciągłości skutecznie wyklucza nieskończenie małe.

[658] J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

zakresie) struktur w taki sposób, żeby najpierw tworzyć zbiór wybranych aspektów, jakie dana struktura powinna posiadać względem konkretnego, matematycznego problemu, a potem dopiero wyprowadzać poszczególne relacje między odpowiednimi pojęciami.

Różnica w metodologii Cantora i Dedekinda dotyczyłaby więc tego, że ten pierwszy nie wprowadzał konsekwentnie i precyzyjnie specyfikacji kategorii tych najbardziej nadrzędnych, złożonych struktur (mowa tu o konstrukcji *R* oraz np. nieskończoności aktualnej), podczas gdy ten drugi to robił (mowa tu o modelach *R* oraz *N*). Niemniej jednak,nie uważamy, iż Cantor nie przejawiał w swej matematycznej praktyce żadnej formy intencji oraz intuicji – nawet w kontekście najmniej złożonych struktur spośród tych jakie wprowadził.

Cantor przeprowadził konstrukcję liczb rzeczywistych w odpowiedzi na konkretny matematyczny problem dziewiętnastowiecznej matematyki, jakim była kwestia niewymierności – stąd musiał przynajmniej chcieć ów problem rozwiązać. Jego ogólną intencją było rozwiązanie tego problemu, zaś intencjami szczegółowymi było wprowadzenie na drodze konstrukcji pojęciowej zbioru *R* (tj. *B*). Niemniej jednak konstrukcja ta nie była wprowadzona przy pomocy metody modelowania – Cantor nie tworzył modelu, a konkretny zbiór liczbowy; po drugie jego rozumowanie dotyczyło bardziej dedukcyjnych wyprowadzeń kolejnych warstw obiektów niż konstrukcji nowej struktury-obiektu:



Rysunek 5 Schemat konstrukcji liczb rzeczywistych przez Cantora.

Cantor skupiał się głównie na pojęciach i relacjach między nimi. Dodatkowo przedstawił w swej konstrukcji nieskończenie wiele zbiorów równolicznych ze zbiorem *R* (*B*, *C*, *D*…), nie zaś jeden konkretny. Było to możliwe dzięki stworzeniu „przepisu" na sukcesywne konstruowanie takich zbiorów.

Pomimo wysokiego stopnia złożoności konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych (przez co argumentowaliśmy, iż nie została ona w prosty sposób zdefiniowana), przyjmujemy, iż postrzegał on zbiór *R* jako pewien nowy obiekt, wprowadzony do matematyki przez uzupełnienie zbiory liczb wymiernych liczbami niewymiernymi. Pozwala to sądzić, iż pojęciu określającemu ten obiekt w jakimś stopniu towarzyszyła naoczność (chociaż w postaci wyobrażenia o tym, że zbiór *B* – zbiór zupełny w sensie Cauchy'ego – jest większy, zupełniejszy niż zbiór liczb wymiernych, ponieważ Cantor powoływał się z powodu bliżej nieokreślonej poglądowości na prostą). Jednakże owa naoczność niekoniecznie była wykorzystywana przez Cantora cały czas – mogła być konsekwencją konstrukcji pojęciowej. W tym sensie celem jego ogólnej intencji nie było wprowadzenie określonej struktury *R*, a rozwiązanie problemu niewymierności (poprzez uzupełnienie liczb wymiernych o niewymierne), natomiast celami intencji szczegółowych były kolejno konstruowane elementy, składające się na strukturę.

Działaniem intencjonalnym (tj. będącym realizacją spełnienia warunków stanu intencjonalnego) było zarówno wprowadzenie liczb niewymiernych (skonstruowanie zbioru, który je posiada), jak i konstrukcja poszczególnych elementów struktury. Konstrukcja tych drugich nie podlegała konstrukcji jakiejś nadrzędnej struktury, ale ogólnemu postulatowi ich konstruowania. Dodatkowo, warunki spełnienia stanu intencjonalnego, chociaż zostały spełnione w kontekście kwestii niewymierności, nie zostały spełnione, jeśli chodzi o intencję wykluczenia nieskończenie małych z matematyki. Zabrakło Aksjomatu Archimedesa – bez niego własność zbioru opisanego przez Cantora nie wyklucza nieskończenie małych, może być spełniana w systemach niestandardowych[659].

W przypadku pojęciowo-symbolicznego wytworzenia formalnej nieskończoności aktualnej przez Cantora mamy do czynienia najpierw z prostymi konstrukcjami pojęciowo-symbolicznymi, a następnie z pewnym rodzajem kroku epistemiczno-konstrukcyjnego, jakim jest zebranie w całość nieskończonego procesu, co daje wynik nieskończonościowy.

Pierwszy etap konstrukcji zbiorów nieskończonych II gatunku wygląda następująco:

---

[659] P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych…*, *dz. cyt.*

zbiór nieskończony P

–(relacja byciem punktem skupienia)-> **punkty skupienia** *-(relacja zebrania w całość)->*

zbiór pochodny P'

–(relacja byciem punktem skupienia)-> **punkty skupienia** *-(relacja zebrania w całość)->*

zbiór pochodny P''

…

Rysunek 6 Schemat konstrukcji zbiorów pochodnych przez Cantora.

Ponieważ Cantor dla zbiorów II gatunku dopuszczał, żeby nie istniało *n*, takie że *n*-ty zbiór pochodny nie istniał (tj. żeby (*n*-1)-szy zbiór pochodny był skończony), przedstawił wynik takiego nieskończonego konstruowania zbiorów pochodnych przy pomocy iloczynu mnogościowego:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P^{n},$$

który – jak dalej zauważył – również mógł być nieskończony i posiadać swoje pochodne. Stało się to podstawą opracowywania przez niego symboli (a później wielkości liczbowych) nieskończonościowych[660]. Drugi etap tego początkowego wprowadzenia nieskończoności (chociaż należy pamiętać, iż Cantor niejako założył ową nieskończoność, przyjmując za punkt wyjścia zbiór nieskończony) jest analogiczny do tego, który opisuje Dadaczyński na przykładzie konstrukcji liczb naturalnych Veronesego[661]. Opisuje on tam taką sytuację: jeśli wyobrazić sobie, że jakaś nieskończona operacja została zakończona w punkcie B, począwszy od punktu A, można pomyśleć tę operację (lub związanych z nią nieskończoną liczbę

[660] Por. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)...*, *dz. cyt.*, 147.

[661] J. Dadaczyński, *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen...*, *dz. cyt.*

obiektów)j ako daną myśleniu podmiotu już z momentem A (pomija się czas od A do B)[662]. Tego rodzaju rozważania traktuje Dadaczyński jako argument, iż czynności konstrukcyjne podmiotu matematycznego nie muszą być dosłownym odwołaniem się do – jak to robił Kant – naoczności czasoprzestrzeni[663].

Podczas wprowadzenia przez Cantora bardziej złożonych struktur, jakimi były liczby porządkowe i kardynalne, mamy do czynienia – oprócz wprowadzenia specyfikacji kategorii reprezentacji umysłowych poprzez opis formalny tych obiektów – również z bezpośrednim odniesieniem do opisu wykonywanych czynności umysłowych. Liczby porządkowe możemy konstruować przy pomocy podanych przez Cantora (wprost) zasad generowania, natomiast liczby kardynalne powstają na drodze dekonstrukcji zbioru posiadającego relację porządku oraz właściwości jego elementów. Takie odniesienie do czynności umysłowych mamy również w przypadku definicji zbioru, podanej przez Cantora w 1895 roku (gdzie – jak wskazywaliśmy – mógł się on zainspirować definicją zbioru podaną przez Dedekinda w 1888 roku).

Jeśli chodzi o liczby porządkowe, zasady generowania wyglądają następująco:

1. **element a** *–(relacja następnika)->* **element (a+1)**,

2. **dobrze uporządkowany ciąg a_n nie mający elementu największego** *–(relacja bycia granicą)->* **liczba b (graniczna)**

(3. warunek ograniczający).

Rysunek 7 Schemat konstrukcji liczb kardynalnych przez Cantora.

Jeśli zaś chodzi o liczby kardynalne, ich proces konstrukcji można przedstawić następująco:

[662] J. Dadaczyński, *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen..., dz. cyt.*, 41; G. Veronese, *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp*, Leipzig 1894, 8.

[663] J. Dadaczyński, *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen..., dz. cyt.*, 49.

zbiór z porządkiem i właściwościami elementów

–(relacja „odrywania” właściwości elementów i porządku)->

moc zbioru (tj. liczba kardynalna).

Rysunek 8 Schemat konstrukcji liczby kardynalnej przez Cantora.

Chociaż powyższe przykłady (jak i w ogóle rozwijanie teorii mnogości) nie dotyczą bezpośrednio konkretnego problemu, który Cantor chciał rozwiązać, można powiedzieć, że ogólną intencją, jaka kierowała jego działaniem w zakresie teorii mnogości, było badanie samej teorii mnogości. Jednak pomimo iż Cantor (przynajmniej na początku) jako punkt wyjścia przyjął zbiór nieskończony, jego stosunek do nieskończoności matematycznej pozostaje niejasny. Wydaje się, że jego podejście do nieskończoności nie było kształtowane przez określone relacje i zależności strukturalne, a raczej przez przejęty zwyczaj i podejście, w połączeniu z przywiązaniem do teorii mnogości, jako teorii badanej, odkrywanej.

Przyjął on ówczesny paradygmat zakładający konieczność wyrugowania wielkości nieskończenie małych z analizy po to, aby tę analizę sformalizować, uczynić jaśniejszą i bardziej przejrzystą[664]. Jednak potraktował ów paradygmat jako wystarczającą podstawę do naukowych rozważań na temat tych wielkości w całej matematyce. Dodatkowo jego stosunek do tych wielkości był niekonsekwentny, gdyż wielkościom nieskończenie dużym przyznawał status wielkości aktualnych, wielkościom nieskończenie małym – jak wskazaliśmy – przypisywał właściwości nieskończenie małych zanikających (wielkości zmiennych), a więc potencjalnych. Nie zaliczał tych ostatnich do wielkości liniowych[665], co mogło być związane z przejęciem zwyczajowego sposobu ich traktowania. Stąd też być może wynika „niepełność”

[664] Por. z wieloma uwagami w pracy, dotyczącymi formalizowania przez Cantora jego teorii mnogości (definicji, dowodzenia, nazw).

[665] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective…, dz. cyt.*; G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)…, dz. cyt.*; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes…, dz. cyt.*

jego dowodu przeciwko nieskończenie małym, jak również brak kategorycznego wykluczenia tych wielkości z jego konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych.

Ostatecznie dzięki temu przykładowi można również stwierdzić, że zauważone w praktyce matematycznej Cantora kwestie dyskusyjne (niekategoryczność R i niepełność dowodu przeciwko nieskończenie małym) mogły wynikać z niewystarczającego oglądu struktury relacyjnej, w jakiej należałoby rozważać nieskończenie małe (aktualnie) wielkości. Na podstawie tych analiz można więc argumentować za tezą, iż chociaż intuicja może odgrywać dużą rolę w matematycznym poznaniu, nieodłączną częścią tego powinny być elementarne założenia strukturalistyczne. Aspekty lub własności poszczególnych elementów struktury, rozpatrywane w kontekście nowej struktury (a więc posiadające nowe relacje i zależności), mogą zyskać również nowe znaczenie i funkcje – czego przeciwieństwem byłoby rozpatrywanie tych aspektów i ograniczanie do ich wcześniejszych znaczeń i funkcji, jak robił to Cantor.

Ponadto można zauważyć pewne kwestie świadczące o tym, iż Cantor korzystał z wizualnych reprezentacji mniej złożonych obiektów (obrazów), które nie musiały być kreowane przez specjalnie rozbudowaną, nadrzędną specyfikację kategorii reprezentacji wizualnych. Tak było w przypadku wprowadzenia przez niego zbioru pustego, gdzie Cantor mieszał perspektywę formalno-pojęciową z obiektowo-semantyczną – raz pisał o symbolu zbioru pustego, a raz o zbiorze, nieposiadającym żadnego elementu – dekonstruując tym samym zbiór właściwy, tj. niepusty i odnosząc się do treści tego pojęcia. Tak było również, gdy Cantor wprowadził linię prostą i utożsamił ją poprzez izomorfizm, na mocy aksjomatu, ze skonstruowanym przez siebie zbiorem liczb rzeczywistych.

Dodatkowym argumentem, który potwierdza istotność elementu intencjonalności w praktyce matematycznej Cantora, jak również element nakierowania pewnej naoczności na wprowadzone obiekty, jest odwoływanie się do wprowadzonych wcześniej elementów jego teorii oraz ich porządkowanie i uściślanie. Nawet jeśli wprowadzając pewne obiekty przeważnie dedukcyjnym sposobem ich konstruowania, nie odnosił się do nich na początku bezpośrednio (a poprzez pojęcia i relacje między nimi oraz cały proces konstrukcji)[666], tak podczas formalizowania swoich teorii bardziej bezpośrednio odnosił się do treści

[666] Na co wskazuje Dadaczyński, przypisując mu quasi-nominalizm i formalizm metodyczny: J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora...*, *dz. cyt.*

wprowadzonych pojęć-obiektów. Tak było np. w przypadku definicji zbioru, liczby kardynalnej, liczb porządkowych czy Hipotezy Kontinuum (związanej z różnolicznością zbiorów nieskończonych, a więc z relacją między badanymi obiektami)[667].

Na pewno można znaleźć znacznie więcej przykładów wizualizacji czy intencjonalności w praktyce matematycznej Cantora, jednak sądzimy, że przytoczone tu przykłady są wystarczające do uzasadnienia tezy pomocniczej. W niniejszej pracy – poprzez odwołanie do propozycji Giaquinto i Searle'a – chcieliśmy na wybranych przykładach jedynie uzasadnić, przypisywane Cantorowi na podstawie analizy jego praktyki matematycznej, założenia i przesłanki filozoficzne związane z podstawowym konstrukcjonizmem epistemologicznym. Stanowisko to argumentujemy obecnością intencjonalnych procesów konstrukcyjnych, wprowadzających nowe obiekty, które są dostępne dla intuicji wizualnej podmiotu, tj. jako przedmioty intencjonalnego oglądu[668], zarówno w kontekście całego procesu przyswajania, jak i tworzenia wiedzy matematycznej.

Wszystkie powyżej omówione przykłady stanowią argumenty za istotnym wkładem nie tyle samego doświadczenia umysłowego (o doświadczeniu takim mogłoby świadczyć bardziej opieranie się wyłącznie na intuicji, o czym wcześniej wspomnieliśmy), co umysłowej aktywności, uzależnionej również od zbioru intencji Cantora. O konkretnych decyzjach, wyborach, o przyjmowaniu określonych kierunków, perspektyw i celów, i oczywiście o umysłowych działaniach, skutkujących konstruowaniem nowych matematycznych obiektów.

Pomimo iż, jak sądzimy, możemy przypisać Cantorowi epistemiczny konstrukcjonizm, tak jak go rozumiemy w niniejszej pracy oraz na bazie wybranego, przeanalizowanego

---

[667] Por. z wcześniejszymi uwagami w pracy, nawiązującymi do późniejszych dzieł Cantora, a także z opisem przyczyn kryzysu Cantora w 1884 roku. Por. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)...*, *dz. cyt.*; J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite...*, *dz. cyt.*

[668] Por. ze stanowiskiem odnośnie do intuicji Poincaré'go, który twierdzi, że to nie mikro-relacje logiczne zapewniają dojście do celu w matematyce (one tylko zapewniają poprawność), ale to „je ne sais quoi", które jednoczy demonstrację (ujęcie struktury). Pisze: „Czy przyrodnik, który tylko badał słonia pod mikroskopem, pomyślałby, że zna to zwierzę wystarczająco dobrze? [...] To dzięki logice demonstrujemy, to dzięki intuicji wymyślamy. Umiejętność krytykowania jest dobra, umiejętność tworzenia jest lepsza. Wiesz, jak rozpoznać, czy kombinacja jest poprawna; żaden problem, jeśli nie posiadasz umiejętności wybierania między wszystkimi możliwymi kombinacjami. Logika uczy nas, że na takiej a takiej ścieżce na pewno nie napotkamy żadnej przeszkody; nie mówi nam, która z nich prowadzi do celu. Do tego potrzebne jest, abyśmy widzieli cel z daleka, a zdolnością, która uczy nas widzieć, jest intuicja. Bez tego geodeta byłby jak pisarz, który byłby dobrze zorientowany w gramatyce, ale nie miałby pomysłów". H. Poincaré, *Science et méthode...*, *dz. cyt.*, 72.

materiału matematycznego, w kolejnym podrozdziale pokażemy, iż konstrukcjonizm Dedekinda jest bardziej złożony, co wiąże się z przyjętą metodologią.

Konstrukcjonizm Dedekinda

W rozdziale dotyczącym kwestii konstrukcjonizmu odnośnie do Dedekinda wskazaliśmy na wybrane rodzaje wprowadzanych przez niego obiektów, które mogą charakteryzować jego epistemologię. Po pierwsze, przedstawiliśmy przekroje, podstawy teorii mnogości, jak również bardziej złożone teoriomnogościowe struktury – jak łańcuch czy zbiór prosto nieskończony – aby wymienić bezpośrednie, sugestywne odniesienia Dedekinda do umysłowych operacji, ale również, aby wskazać na dynamikę samych matematycznych struktur. Po drugie, przedstawiony został zbiór nieskończony, który został przez Dedekinda zdefiniowany, jak również zostało przez niego w pewien sposób udowodnione jego istnienie, a także wspomniano o precyzji wprowadzanej prze uczonego formalnie teorii. Chodziło o to, aby pokazać, iż istotnym było w jego praktyce matematycznej skuteczne wprowadzanie obiektów oraz dowodzenie ich poprawności poprzez ich konstruowanie.

Jeśli chodzi o kwestie metodologiczne i epistemologiczne założeń filozoficznych Dedekinda, można się tutaj skoncentrować na dwóch głównych tematach. Pierwszym z nich jest opracowanie teorii liczb rzeczywistych w oparciu o podstawowe odniesienie do wyobrażeń geometryczno-intuicyjnych właściwości ciągłości[669]. Drugim jest teoriomnogościowy model liczb naturalnych. Nie oznacza to, że w jego matematycznej praktyce nie ma więcej przykładów konstrukcji matematycznych. Jednakże na podstawie wcześniejszych analiz można wskazać, iż reszta takich konstrukcji uzależniona jest od tych dwóch wymienionych modeli liczbowych R i N. A przez to, że proponowany konstrukcjonizm Dedekinda jest zależny od jego strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, istotną kwestią jest więc związek opisywanego tutaj epistemologiczno-metodologicznym strukturalizmu z proponowanym konstrukcjonizmem[670], co będziemy chcieli pokazać.

[669] Mowa tu o pojęciach, które mają źródło w nietłumaczonym przez Dedekinda odniesieniu do intuicji geometrycznych czy po prostu pozamatematycznych (można to nazwać pewnym, podstawowym „doświadczeniem" umysłu).

[670] Niektórzy wręcz zauważają w praktyce metodologicznej Dedekinda tendencje wykraczające poza teorię mnogości w kierunku teorii kategorii. Por. L. Corry, *Richard Dedekind: Numbers and Ideals*..., *dz. cyt.*; J. Ferreirós, *Dedekind's Map-Theoretic Period*..., *dz. cyt.*; C. McLarty, *Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of Functors*..., *dz. cyt.*

Jednakże nie jest to nic nowego, gdyż strukturalizm plus metodologia teoriomnogościowa w rzeczy samej wykraczają poza samo pojęcie elementu czy zbioru. Strukturalizm, jako kierunek biorący pod uwagę całą strukturę (a więc pewne byty/przedmioty matematyczne wraz ze wszystkimi wyszczególnionymi, charakteryzującymi daną

Chociaż stwierdzenie o modelowaniu matematycznym Dedekinda dotyczy podstaw matematyki (do tego zakresu ograniczają się analizy niniejszej pracy), a także opiera się bezpośrednio na dwóch skonstruowanych, kategorycznych modelach liczbowych (N oraz R), daje ono bardzo ważną informację na temat podejścia Dedekinda do matematyki. Otóż można powiedzieć, że teoria mnogości była dla niego bardziej narzędziem niż samym w sobie celem praktyki[671].

Naukowy model to reprezentacja wybranych, istotnych aspektów wycinka określonej rzeczywistości. Sprawdzianem tego, czy dany model jest poprawnie skonstruowany, jest skuteczność w jego zastosowaniu do problemów, ze względu na które został skonstruowany[672].

Można wyróżnić cztery etapy budowania matematycznego modelu:

- 1. formułowanie problemu,
- 2. konstruowanie modelu (w tym określanie aspektów, jakie muszą oraz jakie nie muszą być brane pod uwagę),
- 3. sprawdzanie użyteczności modelu,
- 4. testowanie modelu[673].

Istnieją dwa podejścia do budowania matematycznych modeli. Pierwsze jest związane z matematycznym modelowaniem zjawisk, natomiast drugie z teorią modeli. Zauważa się, że model zjawiska lub systemu nie jest tylko strukturą (tak jak w teorii modeli), ale teorią, opisaną formalnie[674]. Należy zaznaczyć, iż w niniejszej pracy nie zajmujemy się kwestią rozstrzygającą jednoznacznie, czy modelowanie Dedekinda można zaliczyć do rodzaju modelowania związanego z teorią modeli, czy do rodzaju modelowania związanego z modelowaniem zjawisk fizycznych lub systemów. Można się poza tym powołać na stanowisko nierozróżniające

strukturę relacjami, zależnościami a nawet właściwościami), naturalnie w kontekście teorii mnogości będzie poza nią wykraczał – właśnie w kierunku wiążących elementy struktury czy samą strukturę, relacji.

[671] O podejściu do modelowania zjawisk świata „zewnętrznego" lub o modelowaniu komputerowym można przeczytać np. w: V. Mityushev, W. Nawalaniec, N. Rylko, *Introduction to Mathematical Modeling and Computer Simulations..., dz. cyt.*; N. Rylko, K. Tytko, *Multidimensional potential and its application to social networks*, w: *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation, Proceedings of the 12th ISAAC Congress, Aveiro, Portugal, 2019*, red. P. Cerejeiras i in., Springer Birkhäuser 2022.

[672] E.A. Bender, *An Introduction to Mathematical Modeling...*, *dz. cyt.*, 1.

[673] E.A. Bender, *An Introduction to Mathematical Modeling...*, *dz. cyt.*, 6–7.

[674] W. Hodges, *Model Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.

zasadniczo struktur i teorii, uzasadniające to tym, że zarówno pierwsze, jak i drugie mogą dawać w zasadzie te same informacje[675]. Patrick Suppes twierdzi wszak: „znaczenie pojęcia modelu jest takie samo w matematyce i naukach empirycznych”[676].

Z kolei Marcus Giaquinto pisze:

> „Możemy mieć bardziej bezpośrednią świadomość struktury niż tryb szablonu wizualnego, przynajmniej w tak prostych przypadkach [...]. Świadomość, którą mam na myśli, nie jest powiązana z konkretnym typem konfiguracji. Chociaż szczególna konfiguracja znaków, postrzegana jako zbiór elementów wyraźnie powiązanych w określony sposób, może służyć człowiekowi jako wyjściowa instancja struktury, można później myśleć o tej strukturze, nie myśląc o niej jako o strukturze konfiguracji dokładnie tego typu wizualnego. [...]. Sugeruję, że specyfikacja kategorii wizualnej daje nam wizualny sposób uchwycenia struktury, który jest bardziej elastyczny niż szablon wizualny”[677].

Gdzie: *obraz wizualny* jest „przejściowym elementem doświadczenia wzrokowego” (wyobrażeniowej reprezentacji wizulnej), *szablon* konkretną (lub przykładową) konfiguracją znaków fizycznych, natomiast *specyfikacja kategorii wizualnej* to „przechowywana reprezentacja, składająca się z zestawu opisów cech”[678].

[675] W. Hodges, *Model Theory...*, *dz. cyt.*

[676] P. Suppes, *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, Dordrecht 1969, 12.

[677] Por. M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*, 46–47. Przy czym:

[678] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*, 46,54.

Ogólny schemat metodologii Dedekinda można przedstawić poniżej:

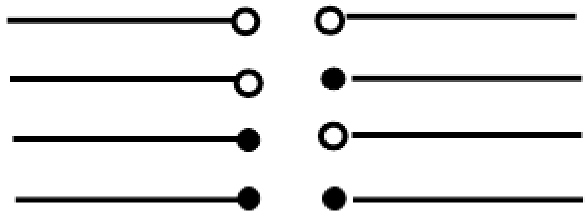
Rysunek 9 Schemat konstruowania dla Dedekinda.

W kontekście konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych, bardziej można zauważyć pierwsze dwa wymienione etapy opisanego wcześniej modelowania, tj. formułowanie problemu oraz aspektów, jakie w związku z tym problemem należy uwzględnić. W odniesieniu modelu liczb naturalnych Dedekind przedstawia raczej żmudną i precyzyjną konstrukcję modelu od samych podstaw. Niemniej jednak należy zauważyć, iż modele problemów „świata zewnętrznego" mogą stanowić trochę innego rodzaju modele niż te, jakie konstruował Dedekind. Oprócz tego, że modelował matematyczne problemy (a nie problemy „świata zewnętrznego"), nie budował ich do badania problemów, ale raczej po to, aby problemy rozwiązywać (jak to miało miejsce w przypadku konstrukcji liczb rzeczywistych) oraz formalizować i wyjaśniać pewne intuicje i oczekiwania matematyczne (jak to miało miejsce w przypadku konstrukcji zbioru liczb naturalnych)[679].

Aspektami, jakie Dedekind wziął pod uwagę (jako niezbędne do opracowania) w kontekście rozwiązania problemu niewymierności był dany już i sprawdzony zbiór liczb wymiernych oraz własność ciągłości. O ile zbiór liczb wymiernych to zbiór liczb rozpatrywany przez Dedekinda wraz z określonymi na nim działaniami oraz relacją porządku, o tyle własność ciągłości Dedekind dopiero sformalizował dla zbioru liczbowego. Sięgnął bowiem po tę własność do intuicji o geometrycznej prostej.

[679] Por. również z: W. Hodges, *Model Theory...*, *dz. cyt.*

Można przypuszczać, iż Dedekind w swojej definicji ciągłości korzystał z reprezentacji wizualnej przekroju i w tym sensie mógł scharakteryzować własność ciągłości prostej (zbioru). Wszak tak właśnie zwizualizował zbiór liczb rzeczywistych – jako kontinuum punktowe. Poprzez określenie specyfikacji kategorii przekroju w każdym obrazie mógł otrzymywać lokalne doświadczenie tego, na czym owa własność ciągłości polega, jak wygląda lokalnie. Nie zrobił tego być może bezpośrednio, ale – tak jak opisaliśmy – poprzez wizualizację i opis przekroju. Należy zauważyć, że Dedekind oprócz wizualizacji używał dodatkowo opisu, dotyczącego wymagań analizy (w każdym miejscu prostej-zbioru, znajduje się zawsze jeden i tylko jeden punkt-liczba). Przekroje mogą wyglądać następująco:

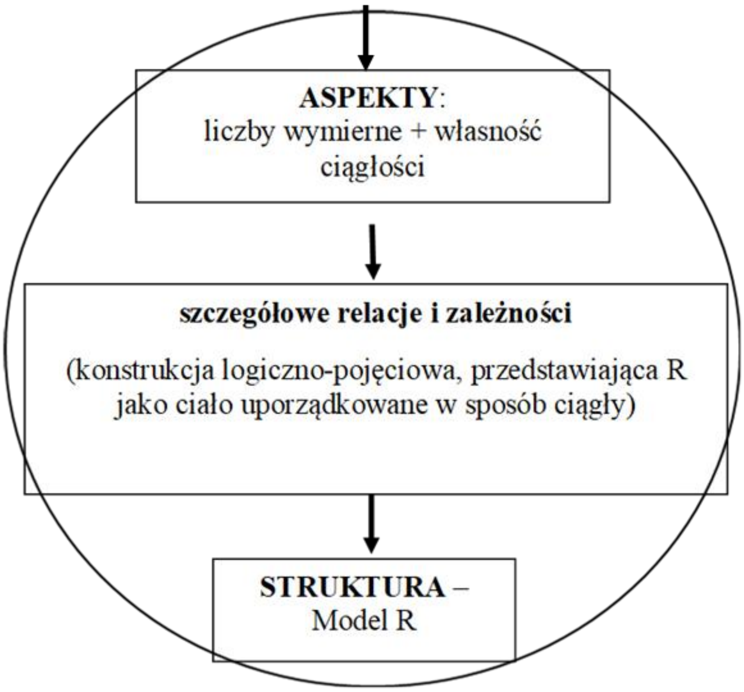


Rysunek 10 Schemat przekrojów Dedekinda.

Przy czym przekrój ostatni jest wykluczany obecnie przez liniowość porządku (nie może być dwóch liczb-punktów w tym samym miejscu – liczba to pewna klasa abstrakcji granic ciągów), natomiast przekrój pierwszy jest wykluczany przez własność ciągłości. Stąd przekrojami, jakie mogą występować w zbiorze ciągłym (zarówno złożonym z punktów, jak i liczb), sąt przekrój drugi i trzeci. Sam Mioduszewski pisze, że Dedekind odwoływał się do wyobrażeń oraz intuicji geometrycznych czy też topologicznych[680].

Można stwierdzić, iż Dedekind w związku z przypisywanym mu strukturalizmem epistemiczno-metodologicznym najpierw wybierał i składał w całość najistotniejsze, niezbędne aspekty (konstruując w ten sposób ramy struktury), a dopiero potem wyprowadzał szczegółowe relacje i zależności między elementami. Jego konstrukcję *R* można przedstawić następująco:

[680] J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii*..., *dz. cyt.*, 7,12.

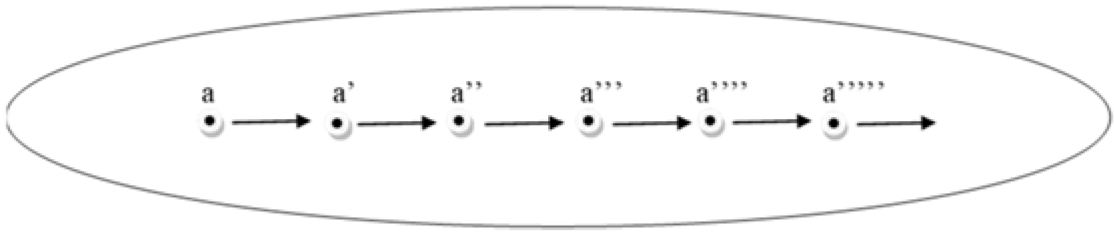


Rysunek 11 Schemat konstrukcji zbioru R przez Dedekinda.

Podobną rzecz można zauważyć odnośnie do modelu liczb naturalnych. Tam Dedekind, konstruując teoriomnogościowy model zbioru prosto nieskończonego, zajmuje się jednocześnie strukturą teoriomnogościową, jak i na jej przykładzie definiuje zbiór liczb naturalnych. Nie tylko jak w przypadku liczb rzeczywistych zajmuje się „tworzeniem" (tj. teoriomnogościowym redefiniowaniem) poszczególnych liczb, dzięki funkcji następnika, ale jednocześnie nadaje przedmiotowość całemu zbiorowi liczb naturalnych. W tym przypadku mamy więc do czynienia zarówno ze strukturą teoriomnogościową, ze strukturą liczbową (N), jak i z pojedynczymi liczbami, tworzonymi przez uwikłane w strukturę odwzorowanie (w łańcuch).

Jego model zbioru liczb naturalnych, tj. zbiór prosto nieskończony, oparty był na koncepcji łańcucha. Nie podawał symbolicznego wyniku nieskończenie wielu operacji, a jedynie „samotworzącą" się strukturę (poprzez obecność odwzorowania, będącego dla Dedekinda rozróżnialnym od statycznego zbioru). Zbiór ten w kontekście dowodu istnienia zbioru nieskończonego reprezentował – oprócz potencjalnego aspektu tworzącej się nieskończoności – również nieskończoność aktualną. Współcześnie można w sposób statyczny opisać zarówno odwzorowanie, jak i łańcuch[681]. Uważamy, że u Dedekinda ów dynamizm pozwolił połączyć aspekt potencjalności oraz aktualności nieskończoności. Tym, co Dedekind wziął pod uwagę, konstruując teoriomnogościowy model liczb naturalnych, tyłu podstawowe elementy zbioru, odwzorowanie i cały zbiór jednocześnie. Należy dodać, iż obydwu zbudowanym przez niego modelom liczbowym przypisuje się własność kategoryczności[682], co może świadczyć o ich poprawności i skuteczności.

Model zbioru *N* można przedstawić wizualnie następująco:



Rysunek 12 Schemat modelu zbioru N.

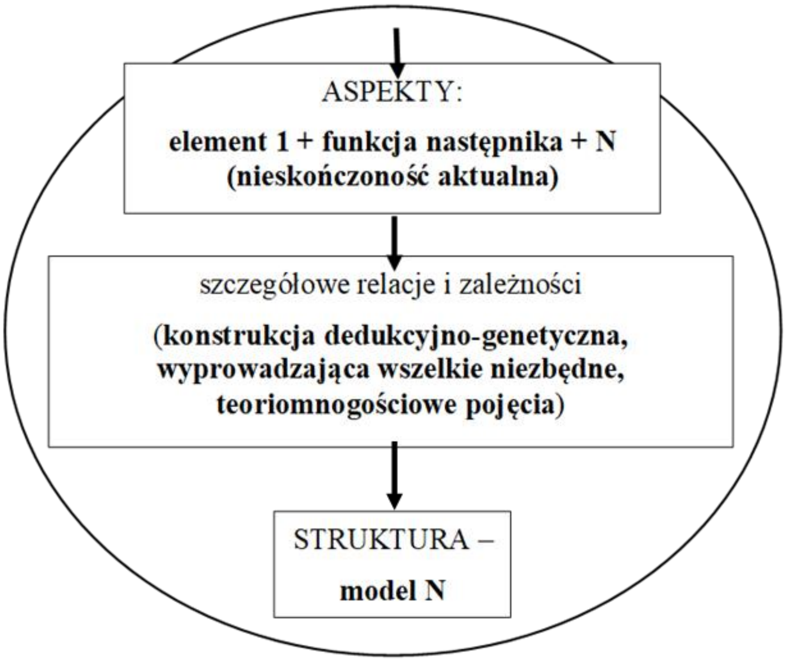
Gdzie element a jest elementem pierwszym w zbiorze liczb naturalnych, strzałki oznaczają funkcję następnika, a elementy odpowiednio: *a’*, *a’’*, *a’’’*…, oznaczają następniki elementów odpowiednio: *a*, *a’*, *a’’*… Dodatkowo to nie jest tylko przepis, jak można wytwarzać w nieskończoność kolejne liczby naturalne poprzez funkcję następnika (czy też jak się te liczby samoistnie dzięki tej funkcji wytwarzają). Zbiór *N* dany jest w tej definicji (w tym modelu) jako w całości gotowy. Tak więc Dedekind połączył w modelu zbioru prosto nieskończonego dwa aspekty nieskończoności – aktualność (poprzez przedstawienie gotowego zbioru w całości),

[681] Odwzorowanie jako zasadę, określającą przyporządkowanie elementów z pewnych zbiorów, a łańcuch jako zbiór uporządkowany liniowo w kontekście porządku częściowego.

[682] Jeśli chodzi o kategoryczność jego modelu zbioru liczb rzeczywistych, wspomagamy się m.in. uwagą Błaszczyka w: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 11. Natomiast kategoryczność zbioru liczb naturalnych potwierdza Joyce: D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind’s: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 15. Należy pamiętać o uwzględnieniu odpowiednich warunków, aby modele te były kategoryczne.

oraz potencjalność (poprzez niekończącą się możliwość aktywności funkcji następnika na coraz to kolejnych, produkowanych elementach).

David Joyce wspomina, że dowód zbioru nieskończonego Dedekinda, „jest zaskakująco niematematyczny, w przeciwieństwie do całej reszty tej pracy, która jest dość rygorystyczna”[683]. Pomimo to można zauważyć, iż cały model teoriomnogościowy nieskończonego zbioru liczb naturalnych opierał się na sformalizowaniu (uściśleniu) intuicji określających zbiór liczb naturalnych. Określenie, że reszta pracy jest rygorystyczna, może dotyczyć wtedy logicznych mikrozwiązków wprowadzanej treści[684], ponieważ nadrzędne cele – budowa modelu – związane są nie ze standardowo rozumianą rygoryzacją, ale raczej z myśleniem wizualnym i metodą modelowania. Jego proces konstrukcji zbioru *N* można przedstawić przy pomocy następującego schematu:



Rysunek 13 Schemat konstrukcji zbioru N przez Dedekinda.

683 D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?,dz. cyt.*, 13.

684 Por. z dyskusją Gandona odnośnie stanowiska Poincarego: S. Gandon, *Quelle philosophie pour quelle mathématique?..., dz. cyt.*

Głównym argumentem za proponowanym konstrukcjonizmem Dedekinda jest – tak samo jak w przypadku strukturalizmu – omawiana metoda modelowania zagadnień matematycznych. Oznacza to bezpośrednio zależność konstrukcjonizmu Dedekina od rekonstruowanego w jego kontekście strukturalizmu metodologiczno-epistemicznego. Wszelkie mniejsze struktury, jakie rozważał lub konstruował, były rozpatrywane w odniesieniu do budowanych modeli liczbowych (mowa tu o dwóch pracach z zakresu podstaw matematyki).

Umysłowe konstrukcje Dedekinda charakteryzowała zarówno pewnego rodzaju bezpośrednia intencja uchwycenia i wprowadzenia konstruowanej struktury, jak i sam ogląd (wizualna intuicja) tej struktury. Przypomnijmy, że mówimy tu o modelach liczbowych, których u Cantora nie rozpoznaliśmy. Na pewno nie w taki sposób – w przypadku modelu N u Dedekinda, u Cantora nie mamy jego konstrukcji w ogóle, a jedynie ogólne wzmianki o możliwości sprowadzenia matematyki do teorii mnogości. Dedekind potrafił operować z bardziej abstrakcyjnej perspektywy (strukturalistycznej) wprowadzanymi obiektami i zależnościami. A to oznacza, iż posiadał również większy poziom abstrakcji ich oglądu niż Cantor. Używał złożonych, abstrakcyjnych specyfikacji kategorii wizualnych poprzez połączenie formalnych opisów językowych z określonymi naocznościami.

W kontekście rekonstruowanego w pracy konstrukcjonizmu można rozpatrzyć jedno z założeń konstruktywistycznych[685] – lecz w słabszej wersji, uwzględniającej również ujęcie umysłowe nieskończonych obiektów i procedur[686]. Otóż Dedekind nie zajmował się rozważaniami o „rzeczach", które nie były dla niego konstruktywne, konstruowalne, a udowodnić było równoznaczne ze skonstruowaniem. Matematyk z Brunszwiku nie pisał o przedmiotach, których nie miał ściśle opracowanych według racjonalnej, strukturalistycznej metody i którymi się nie zajmował w tym sensie, że nie zajmował się strukturą, do jakiej dane przedmioty przynależą. Można wręcz rzec, że te „rzeczy" nie istniały dla Dedekinda. Wynikało to z tego faktu, iż tak jak u Cantora strukturalizm był konsekwencją konstrukcjonizmu związanego z opracowywaniem bardziej skomplikowanych bytów matematycznych (był od

[685] Chodzi tu o nieuznawanie niekonstruowalnych pojęć i zależności. Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym..., dz. cyt.*; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów..., dz. cyt.*

[686] J. Dadaczyński, *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen..., dz. cyt.*

niego zależny), tak u Dedekinda, konstrukcjonizm wydaje się jedynie pochodną strukturalistycznego oglądu rzeczywistości matematycznej[687].

Niektórzy autorzy wskazują na metodologiczny strukturalizm Dedekinda. José Ferreirós i Erich Reck twierdzą, że „Dedekind połączył swój strukturalizm matematyczny lub metodologiczny ze strukturalistyczną koncepcją obiektów matematycznych, tj. formą strukturalizmu filozoficznego". Badacze ci opierają ten pogląd np. na wypowiedzi niemieckiego matematyka, iż liczby są „wolnymi tworami ludzkiego umysłu", uzyskanymi przez rodzaj „abstrakcji" z bardziej konkretnych systemów obiektów[688]. Niektórzy zauważają w praktyce metodologicznej Dedekinda tendencje wykraczające poza teorię mnogości w kierunku teorii kategorii[689].

Jak już kilkakrotnie zauważyliśmy, Dedekind posiadał poprzez swoje strukturalistyczne podejście i wyższy poziom abstrakcji oglądu matematycznego[690]. Był to ogląd kierowany na konkretne struktury i w konkretnym celu. Oczywiście jako jeden ze skutków owego strukturalistycznego podejścia wskazuje się na dość sztywne ramy jego praktyki naukowej – tj. ograniczanie się do przedstawiania tylko tych problemów, które dały się rozpracować strukturalnie lub wchodziły w zakres jakiejś struktury. Mimo iż Cantor czasem tylko ogólnie nawiązywał do zauważanych przez siebie problemów, jego uwag nie należy pomijać, gdyż dobrze zinterpretowane, mogą stanowić cenny filozoficzno-matematyczny wkład naukowy. Niemniej jednak, można zauważyć pewien związek między korzystaniem z intuicji w kontekście opracowywania konkretnej struktury (w opozycji do opierania intuicji na konkretnych przekonaniach), a możliwością poprawniejszego i trafniejszego opisu i rozwiązywania matematycznych problemów.

Podsumowując, oprócz bezpośrednich, poszczególnych obiektów, na podstawie których rekonstruowaliśmy konstrukcjonizm Dedekinda w rozdziale 2, zauważamy u tego uczonego

---

[687] Co potwierdza wnioski dotyczące rozdziału pierwszego, w którym analizowaliśmy konstrukcje liczb rzeczywistych (uzupełnianie zbioru liczb wymiernych).

[688] J. Ferreirós, E.H. Reck, *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions...*, *dz. cyt.*

[689] L. Corry, *Richard Dedekind: Numbers and Ideals...*, *dz. cyt.*; J. Ferreirós, *Dedekind's Map-Theoretic Period...*, *dz. cyt.*; C. McLarty, *Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of Functors...*, *dz. cyt.*

[690] Wnioski, jakie płyną z jednoczesnej analizy praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda, dotyczące związku między poziomem abstrakcji oglądu matematycznych obiektów, intuicyjnością i podejściem strukturalistycznym, są bardziej przekonujące, choć może być to temat na osobną pracę.

takie elementy konstrukcjonizmu, związane bezpośrednio z konstruowaniem dwóch modeli liczbowych, które wydają się elementami nadrzędnymi względem innych elementów konstrukcjonizmu. Konstruując dany model, Dedekind wykorzystywał zarówno intuicję (ogląd), jak i intencję skierowane na wprowadzaną strukturę. Tym samym przypisywany mu konstrukcjonizm jest ściśle związany ze strukturalizmem epistemologiczno-metodologicznym, a nawet z niego wynika. Można powiedzieć, że charakteryzuje go – jeśli porównać z konstrukcjonizmem Cantora – wyższy poziom abstrakcji (intencja oraz intuicja nakierowane były na struktury bardziej złożone i abstrakcyjne). Kwestię tę rozwiniemy dalej.

5.3 Pragmatyczny realizm Cantora i Dedekinda (teza pomocnicza c)

W niniejszym podrozdziale scharakteryzujemy odmianę realizmu ontologicznego, którą zrekonstruujemy na podstawie analizy praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda. Jak wspominaliśmy, można mówić o dwóch wymiarach realizmu ontologicznego. Po pierwsze, wspominaliśmy o realizmie wewnętrznym względem praktyki indywidualnej, a także o realizmie związanym z wiedzą dziedziczoną (zależnym z kolei od historyczno-społecznej praktyki matematycznej). Poniżej wyjaśnimy znaczenie tych dwóch pojęć, jednak należy pamiętać iż w kontekście obiektów matematycznych oraz perspektywy badawczej niniejszej pracy, skupiającej się wokół praktyki matematycznej, mówimy o istnieniu abstrakcyjnym oraz pragmatycznym.

Realizm wewnętrzny względem indywidualnej praktyki będzie odnosił się tak do obiektów podstawowych przyjmowanych u podstaw matematycznych teorii (jak elementy, zbiory, liczby czy funkcje), jak również do pozostałych obiektów-struktur, konstruowanych umysłowo, w oparciu o obiekty podstawowe.

Jeśli chodzi o realizm związany z wiedzą dziedziczoną, będzie mowa o istnieniu obiektów matematycznych przyjmowanych w perspektywie historyczno-społecznej, a nie wynikających z indywidualnego wkładu badacza. Z punktu widzenia tradycyjnej filozofii, będzie chodziło o tzw. wiedzę obiektywną lub intersubiektywną (komunikowalną), tworzącą wiedzę tła danych badań. W interesującym nas przypadku w zakres tej wiedzy będzie wchodziło to, czym się inspirowali Cantor i Dedekind w swej matematycznej praktyce, oraz to, jak treści przez nich wprowadzone stały się częścią tej wiedzy.

Zaproponujemy, aby połączyć wymagania PMP z perspektywą matematyki klasycznej poprzez wykorzystanie koncepcji II i III świata Poppera. Propozycja ta pomoże również adekwatnie opisać rekonstruowany aspekt filozoficzny praktyk matematycznych Cantora i Dedekinda. Takie podejście jest typowe dla programu filozofii w nauce, który tutaj stosujemy w analizie filozofii obu matematyków.

Wewnętrzna ontologia indywidualnej praktyki matematycznej

Pragmatyczny realizm wewnętrzny względem indywidualnej praktyki matematycznej podmiotu jest dobrym punktem wyjścia do dalszych rozważań nad realizmem Cantora i Dedekinda. W pewnym sensie jest on również uprzedni względem realizmu wiedzy obiektywnej, jako wiedzy skonstruowanej przez ludzkość w perspektywie historycznej.

Wychodząc od takiego pragmatycznego, wewnętrznego realizmu ontologicznego, jaki można zrekonstruować na podstawie obydwu praktyk matematycznych, postaramy się scharakteryzować bardziej szczegółowo ów realizm u każdego z uczonych, aby możliwie zróżnicować obie indywidualne propozycje.

W kontekście ontologii wewnętrznej, przypisanej zarówno Cantorowi, jak i Dedekindowi, można rozważyć zarówno realizm odnośnie do istnienia przedmiotów matematyki, jak i zawarty w żądaniu, aby zdania matematyczne były obiektywnie prawdziwe, jakie akceptował Frege[691]. Jednakże Frege nie uważał, aby pomiędzy tymi dwoma powyższymi realizmami był związek, tj. żeby zdania matematyczne miały wyjaśniać kwestie związane z matematycznymi obiektami. Uważał, że zdania zawierające te obiekty powinny być obiektywnie prawdziwe, co zdaniem Georga Kreisela (jak przytacza Linnebo) implikuje prymat problemu obiektywności (prawdziwości) zdań, nad samym problemem istnienia obiektów matematycznych[692]. Rozróżnienie takie wydaje się tu przydante, ponieważ wskazujemy na przynajmniej częściową niezależność intuicji (a więc i opartych na niej podstawowych obiektów matematyki) od języka.

Realizm dotyczący podstawowych obiektów w matematyce może być trywialny. Można tu podać przykład interpretacji ontologii Willarda Van Ormana Quine’a dokonany przez Stephena Yablo następująco: „zarys jego programu prezentuje się następująco: znajdź najlepszą

[691] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 94.

[692] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 31–32.

ogólną teorię – spełniającą naukowe standardy lub wynikającą z nich – i rozważ, co musi istnieć, aby ta teoria była prawdziwa"[693].

Do takich podstawowych obiektów ontologii w przypadku ujęcia Dedekinda należy zaliczyć elementy zbioru, zbiory i funkcje (odwzorowania). Natomiast w przypadku ujęcia Cantora będą to zarówno liczby (naturalne bądź wymierne), jak i całe zbiory.

Jednakże należy przyznać, iż sprawa nie jest tak oczywista w przypadku pytania o istnienie bardziej skomplikowanych struktur, a w przypadku Dedekinda – również modeli tych struktur. Tutaj należy skorzystać z perspektywy strukturalistycznej. Jak widzieliśmy, strukturalizm jest propozycją pozwalającą wyjaśnić bardziej szczegółowo zarówno metodę efektywnej praktyki naukowej, jak i epistemologiczne oraz ontologiczne kwestie związane z uprawianiem matematyki[694]. Co więcej, propozycja ta nie musi wykluczać ontologii podstawowych obiektów, innych niż struktury (które zostały wcześniej opisane)[695].

Interesująca w tym kontekście jest również propozycja Kalmara, którą rozważa Imre Lakatos[696]. László Kalmar twierdzi nie tylko, że podstawowe obiekty matematyczne powstały dzięki metodzie abstrahowania ich z rzeczywistości. Według niego tak powstały również aksjomaty[697]. Jest to istotna kwestia, ponieważ jeśli aksjomaty określimy jako podstawowe (zasadnicze) relacje między podstawowymi bytami teorii matematycznej, wówczas możemy przyznać taką samą, naturalną ontologię nie tylko pojedynczym bytom, ale również strukturom powstałym z tych bytów i określonych na nich aksjomatycznie relacjach.

Pragmatyczny realizm opisywany w niniejszej pracy powinien być związany z procesami konstrukcyjnymi (poznawczymi) indywidualnej (lub historyczno-społecznej) praktyki matematycznej i ściśle od nich zależeć. Można sądzić, iż intuicja rozumiana jako

---

693 A. Kosecki, *O poglądach Carnapa, Ajdukiewicza i Quine'a na ontologię*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria R. 26" 101, (2017) nr 1, 76; S. Yablo, *Does Ontology Rest on a Mistake?*, „Proceedings of the Aristotelian Society" 72, (1998), 230.

694 Por. np. z przedstawioną przez Carter propozycją Peirce'a, który uważał, że „rozumowanie matematyczne jest rozumowaniem schematycznym, a Diagram to ikoniczny znak, reprezentujący racjonalne relacje". J. Carter, *Logic of Relations and Diagrammatic Reasoning: Structuralist Elements in the Work of Charles Sanders Peirce*, w: *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, red. E. H. Reck, G. Schiemer, Oxford University Press 2020, 242.

695 J. Carter, *Structuralism as a philosophy of mathematical practice..., dz. cyt.*

696 I. Lakatos, *Problems in the Philosophy of Mathematics*, w: *Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science.*, red. I. Lakatos, London-Amsterdam 1965, 187–194.

697 I. Lakatos, *Problems in the Philosophy of Mathematics..., dz. cyt.*, 188.

umiejętność (zdolność) oglądu obiektów matematycznych mogłaby stworzyć dodatkowe podstawy dla takiego realizmu obiektów matematycznych (oprócz tego, że przyznajemy obiektom matematycznym pragmatyczne istnienie, ponieważ są przedmiotem dyskursu).

Wzorując się na Poincarém, można wskazać, że intuicja jest warunkiem dotarcia do matematycznego celu (czego nie zapewnia nam racjonalne rozumowanie i mikro-logiczne połączenia)[698] – co w niniejszej pracy znajduje potwierdzenie, ponieważ Dedekind, który bardziej bezpośrednio i oficjalnie odwoływał się do intuicji, stworzył bardziej skuteczne i efektywne systemy niż Cantor, który w jakimś stopniu zdawał się odrzucać to odwoływanie do intuicji (nie wiemy tylko, czy z powodu braku takich zdolności, czy wpływu konkretnych przekonań).

Współczesną propozycją, którą uznajemy za rozwinięcie myśli Poincarégo, jest opisana przez Giaquinto koncepcja myślenia wizualnego (na której głównie opieramy bardziej szczegółowe analizy)[699]. Niemniej jednak należy pamiętać, iż mówimy o intuicji (nie zaś np. o języku opartym na określonych precyzyjnie symbolach ikonograficznych) i nie zawsze musimy mieć do czynienia ze świadomymi, bezpośrednimi i jasno określonymi reprezentacjami wizualnymi. Nie znaczy to, że poznania matematycznego nie wspomagają np. nieuświadomione wyobrażenia (reprezentacje) wizualne, jakie – jak się wskazuje[700] – mogą odgrywać rolę w wizualnej percepcji (tu percepcji wyobrażeniowej) i pełnić istotną funkcję w tworzeniu nowej wiedzy.

Intuicja, o której wspomina Kurt Gödel, również nosi znamiona percepcji zmysłowej, ale interpretowana na tle wyobraźni, może być trafnym wyjaśnieniem dla doświadczenia percepcyjnego (fenomenalnego wyobrażeniowego) *a priori*, w kontekście umysłowej konstrukcji, gdzie nie zakładamy ścisłego, dosłownego odkrywania jedynej, bezwzględnie obowiązującej prawdy matematycznej, wzmacniając tym samym pragmatyczne znaczenie ontologii matematycznych obiektów. Odnosząc się do intuicji z perspektywy naturalistycznej, mamy do czynienia ze stwierdzeniem, że intuicja nie powinna być rozważana przez filozofów, jako że nie podlega ona całkowitej, ścisłej analizie. Naturaliści nazywają to nienaukowością intuicji (tj. wskazują brak zasadności łączenia umysłu ze światem). Jednak – jak wskazuje

[698] H. Poincaré, *Science et méthode...*, *dz. cyt.*, 72.

[699] M. Giaquinto, *Visualizing in Mathematics...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*; M. Giaquinto, *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics...*, *dz. cyt.*

[700] B. Nanay, *Unconscious mental imagery...*, *dz. cyt.*

Steward Shapiro – bez takiego połączenia umysłu ze światem realizm można postawić pod znakiem zapytania za stwierdzenie: „wiedza matematyczna jest wiedzą o abstrakcyjnej, bezprzyczynowej dziedzinie matematycznej”[701].

Mamy więc do czynienia nie tylko z pytaniem o możliwość poznania obiektów matematycznych, ale również z pytaniem o to, jak i dlaczego one istnieją oraz jak można je pogodzić ze światem fizycznym. Stąd intuicja związana z wyobraźnią i pewnymi procesami mentalnymi jest praktycznym wytłumaczeniem – przynajmniej części – podstaw matematycznej ontologii (w połączeniu z określonymi aspektami poznania matematycznego) oraz aspektem możliwym do zrekonstruowania w jakimś stopniu zarówno w praktyce matematycznej Cantora, jak i Dedekinda. Należy dodatkowo zauważyć, iż proponowaną w niniejszej pracy intuicję opisujemy ogólnie – nie wyjaśniamy całego procesu poznawczego, a tylko uznajemy intuicję jako jego niezbędny element.

Aby wyjaśnić genezę nazwy tego rodzaju pojęć opisujących ontologię rekonstruowaną w niniejszej pracy, można oprzeć się na rozróżnieniu zaproponowanym przez Rudolfa Carnapa[702] odnośnie do egzystencjanych twierdzeń – na wewnętrzne oraz zewnętrzne. Te drugie są przez niego uważane za „pseudotwierdzenia pozbawione treści poznawczej”[703]. Pierwsze zaś uważał jedynie za twierdzenia pewnego – przyjętego ze względów pragmatycznych – językowego schematu pojęciowego. Istnieją opracowania wskazujące na możliwą zmienność ontologii obiektów matematycznych według Carnapa, jednakże dla nas najistotniejsze jest, że najpierw według niego znaczenia posiadały tylko wyrażenia językowe, a już w roku 1963 twierdził, że wartościami semantycznymi są byty pozajęzykowe[704]. Według Piotra Warzoszczaka, w 1950 roku Carnap twierdził, iż główną intencją wprowadzenia wyżej opisanego rozróżnienia była chęć wykazania, że odniesienia do bytów pewnych klas nie wymagają istnienia bytów tych klas[705]. Jednakże można sądzić, iż ostatecznie da się pogodzić

---

[701] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*, 28.

[702] R. Carnap, *Empiricism, Semantics and Ontology*..., *dz. cyt.*

[703] P. Warzoszczak, *Późny Carnap a współczesne spory ontologiczne. Cz. I. Poglądy Carnapa na ontologię a fikcjonalizm*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 79, (2012) nr 3, 35.

[704] R. Carnap, *The Philosopher Replies*, w: *The Philosophy of Rudolf Carnap*, red. P. Schlipp, La Salle 1963, 891, przyp.10.

[705] R. Carnap, *Empiryzm, semantyka i ontologia*, w: *Empiryzm. Semantyka. Ontologia*, tłum. A. Koterski, Warszawa 2005, 12–13; P. Warzoszczak, *Późny Carnap a współczesne spory ontologiczne. Cz. I. Poglądy Carnapa na ontologię a fikcjonalizm*..., *dz. cyt.*, 38.

jego wewnętrzne pytania egzystencjalne i WTE (wewnętrzne twierdzenia egzystencjalne) z wymogiem podstawowej, wewnętrznej i naturalnej w pewnym sensie, realistycznej ontologii matematycznych obiektów.

Możemy takie stanowisko przyjąć jako uzasadnienie wewnętrznego realizmu, jaki można przypisać zarówno Cantorowi, jak i Dedekindowi. Taki podstawowy, minimalny realizm jest określany przez Zbigniewa Króla czy Oswaldo Chateubrianda jako wymagany realizm, niezbędny dla uprawiania matematyki lub analizy praktyki matematycznej[706]. Takie wyjaśnienie jest również zgodne z perspektywą PMP, która podkreśla, iż filozofię matematyki należy uprawiać, śledząc niejako od wewnątrz praktykę matematyczną (w przypadku ontologii będą to przyjmowane obiekty matematyczne), nie zaś z – często nazbyt oddalonej i wyidealizowanej – perspektywy zewnętrznej, tj. poza-matematycznej[707]. Dodatkowo wskazuje się, że ontologia konstrukcjonizmu socjologicznego, na jakim opieramy proponowany tu jego indywidualny aspekt, może być zgodna z metaontologicznym minimalizmem Linnebo[708], który chociaż zakłada, że istnieją „cienkie" przedmioty, to ich „istnienie nie stwarza (dalszych) substancjalnych wymagań wobec świata[709].

Nie będziemy dyskutować szczegółowo o wszystkich cechach przyjmowanej tu ontologii, ponieważ – zwłaszcza w kontekście wcześniejszego podrozdziału – jest to ontologia pragmatyczna. Jest ona zarówno ontologią bytów pierwotnych w matematyce, jak również następnie – jako naturalne przedłużenie – ontologią struktur, konstruowanych z tych bytów.

Wewnętrzny realizm Cantora

W przypadku Cantora możemy jako podstawowe obiekty matematyczne wymienić obiekty teoriomnogościowe – głównie będzie chodzić o sam zbiór, którego uczony początkowo nie zdefiniował, można również w jakiś sposób zaliczyć do tych obiektów same elementy zbioru, o których wspomina w definicjach zbioru w późniejszym okresie pracy naukowej. Oprócz obiektów teoriomnogościowych warto jeszcze wymienić liczby wymierne, które były

706 O. Chateaubriand, *The Ontology of Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*; Z. Król, *O platonizmie w teorii mnogości*..., *dz. cyt.*

707 J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†*..., *dz. cyt.*

708 Ø. Linnebo, *Thin objects*, Oxford UK 2018, 4.

709 M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic*..., *dz. cyt.*, 292.

w jego mniemaniu podstawowymi – względem innych (zwłaszcza rzeczywistych) liczb – wielkościami liczbowymi.

Wśród bardziej złożonych obiektów, które odnajdujemy w praktyce matematycznej Cantora, można wymienić same liczby rzeczywiste, prostą rzeczywistą, liczby kardynalne czy porządkowe, jak również – w pewnym sensie – sam zbiór aktualnie nieskończony (w tym nieskończony iloczyn zbiorów potęgowych).

Poniżej postaramy się scharakteryzować bardziej szczegółowo wewnętrzny realizm ontologiczny Cantora. Teoretycznie można byłoby poprzestać na ogólnym stwierdzeniu, zgodnym z przyjętymi w niniejszej pracy założeniami, że w tekstach matematycznych Cantora można zrekonstruować matematyczne obiekty – zarówno te podstawowe, jak i tworzone z nich struktury, które są przedmiotami dyskursu jego praktyki matematycznej. Niemniej jednak, tak jak w przypadku rekonstruowanego dla obydwu matematyków konstrukcjonizmu, sprawdzimy, jak na ontologię wpływa różnica zauważona w kontekście metodologii (tj. strukturalizm metodologiczno-epistemiczny).

Cantor zakładał tworzenie wiedzy matematycznej na poziomie dedukcyjno-genetycznego wyprowadzania pojęć, nie zaś bezpośrednio przy pomocy wprowadzania nowych, nadrzędnych struktur. Uważał także, że wiedza ta jest dana *a priori*. Jeśli rozważamy istnienie obiektów praktyki matematycznej Cantora, to interesuje nas kwestia, w jakim stopniu mógł on uwzględniać istnienie tych obiektów w obrębie swojej praktyki – tj. w wobec dość prostego (w porównaniu z Dedekindem) sposobu rozumowania. Dlatego też przeanalizujemy proponowany realizm pod kątem podstawowego podziału: idealizm–realizm–nominalizm. Skorzystamy tutaj z propozycji Shapiro, który pisze, że w naturalny sposób w dyskursie o matematycznym przedmiocie, odnosimy się do takich podstawowych obiektów, jak „liczby, punkty, funkcje i zbiory”[710]. W kontekście odniesienia do ontologii tych przedmiotów wyróżnia idealizm, nominalizm oraz realizm.

Idealizm według Shapiro to stanowisko, zgodnie z którym istnienie matematycznych obiektów jest uzależnione wyłącznie od ludzkiego umysłu. Dodatkowo rozróżnia Shapiro idealizm subiektywny (obiekty matematyczne są subiektywnymi wytworami poszczególnych) oraz intersubiektywny (matematyczne obiekty należą do wspólnej dla wszystkich ludzi, mentalnej struktury). Shapiro twierdzi, że ten drugi rodzaj idealizmu może być związany z

[710] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics…*, *dz. cyt.*, 25.

„wszechobecną możliwością konstrukcji”[711]. Gdyby nie operacje umysłowe Cantora, nie zostałyby stworzone konstrukcje matematyczne przez niego przedstawione. Jednakże, ponieważ proponowany w niniejszej pracy realizm ma być połączeniem procesu mentalnej konstrukcji z istnieniem obiektów matematycznych (w późniejszym etapie już bez zależności od umysłu), wskazywana przez Shapiro opozycja realizm–idealizm nie do końca jest pomocna w dookreśleniu realizmu przypisywanego Cantorowi. Rekonstruowany tu realizm uwzględnia proces konstrukcji i sam w sobie ma plasować się między tradycyjnym, filozoficznym realizmem a idealizmem. Wskazuje to na konieczność uzupełnienia wykorzystywanych koncepcji o propozycje pozwalające łączyć te aspekty, jak na przykład Popperowska koncepcja trzech światów.

Nominalizm jest określany przez Shapiro jako radykalne przeciwieństwo realizmu. To znaczy, że według tego poglądu nie istnieją obiekty matematyczne, istnieją jedynie same pojęcia i konstrukcje językowe[712]. Jednakże tak, jak Shapiro twierdzi, że pojęcia oraz obiekty określane przez te pojęcia, to dwie różne rzeczy, tak samo może być to argumentem, iż pojęcia definiowane i konstruowane w praktyce matematycznej Cantora stanowią przesłankę do istnienia obiektów, określanych przez te pojęcia. Chcąc dookreślić analizowany realizm, musimy – tak jak zrobiliśmy to w przypadku Dedekinda – odwołać się do kwestii metodologii (i epistemologii). Cantorowi nie przypisujemy tu strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego[713], ale skorzystamy z propozycji Dadaczyńskiego, opartej co prawda na deklaracjach filozoficznych, jednak obserwowanej również na przykładach praktyk matematycznych.

Jak zauważa Dadaczyński, jeśli chodzi o ontologię samej matematyki, Cantor uważał, iż wystarczy ograniczyć się do rzeczywistości intrasubiektywnej. Był to pierwszy etap jego epistemologicznej metody redukcji ontologii. Drugim etapem było zawężenie ontologii tej rzeczywistości do quasi-nominalizmu, a więc do pojęć, a raczej nazw pojęć, którymi matematycy operowali w samym języku matematyki[714]. W tym miejscu epistemologia i

[711] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*, 25.

[712] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*..., *dz. cyt.*, 25–28.

[713] W takiej postaci, w jakiej przypisujemy go Dedekindowi, nazywając jego metodologię w zakresie podstaw matematyki teoriomnogościowym modelowaniem matematyki.

[714] Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.* Quasi-nominalizm (czy ogólniej – nominalizm) jest zasadniczo niezbędny (jako najwygodniejszy) dla uprawiania matematyki. Jednakże czasem potrzebne jest sięgnięcie głębszego sensu i kontekstu pojęć, relacji między nimi czy ogólniej problemów (a więc sięgnięcie ich zawartości semantycznej,

ontologia Cantora mocno się zazębiają i wpływają na siebie nawzajem. Tym samym Dadaczyński przyznaje Cantorowi miano quasi-nominalisty i metodycznego formalisty. Innymi słowy, mimo iż Cantor zakłada radykalny realizm zewnętrzny w praktyce, twierdzi również, że podmiot matematyczny „budzi do życia" matematyczne byty poprzez definiowanie pojęć.

Jeśli uwzględnić to opracowanie, można wymienić przynajmniej dwa przykłady takiego podejścia w praktyce matematycznej Cantora – formowanie liczb na podstawie granic ciągów czy definicja zbioru pustego.

Pierwszy przykład dotyczy momentu, gdy zdefiniowawszy ciągi Cauchy'ego, Cantor pisze, że definicja ta nie znaczy nic innego, jak tylko określa, że: „Ciąg (1) [tj. pewien ciąg, z założenia będący ciągiem Cauchy'ego, czyli ciągiem mającym granicę – przyp. K.T.] ma określoną granicę *b*"[715]. W tym miejscu właśnie można zauważyć tendencje Cantora w tym kierunku, który Dadaczyński nazywa quasi-nominalizmem[716]. Chodzi o podkreślanie znaczenia pojęciowo-syntaktycznej warstwy teorii matematycznej.

W tym samym miejscu Cantor zaznacza również, że: „gdy *b* jest granicą ciągu (1), a następnie $b-a_n$ wraz ze wzrastającą *n* staje się nieskończenie mała, to określenie „granica ciągu (1)" na *b* znajduje ubocznie pewne uzasadnienie"[717].

Jednocześnie wielkości *b* stają się dla niego *wielkościami liczbowymi*[718]. W tym miejscu, również obserwujemy quasi-nominalistyczne operacje, które były zauważalne w

określanej często przez kontekst problemu matematycznego czy jego związków z rzeczywistością pozamatematyczną – o ile taka jest).

[715] "Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze *b*." G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 93. Tłumaczenie pochodzi z: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych..., dz. cyt.*

[716] Ogólnie rzecz biorąc, jest to podejście epistemologiczno-ontologiczne Cantora, które Dadaczyński nazywa „brzytwą Cantora", polegające na podwójnej redukcji epistemologiczno-ontologicznej przedmiotu matematyki (podejście takie pozwalało pogodzić u Cantora platonizm z nominalistycznym podejściem do części praktyki matematycznej).

[717] Pełny akapit pisemnej wypowiedzi Cantora w tym miejscu brzmi: „Aus diesen und den gleich folgenden Definitionen ergiebt sich als Folge, daβ, wenn *b* die Grenze der Reihe (1) ist, als dann $b-a_n$ mit wachsendem *n* unendlich klein wird, womit nebenbei die Bezeichnung "Grenze der Reihe (1)" für *b* eine gewisse Rechtfertigung findet". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 93. Tekst w języku polskim za: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych..., dz. cyt.*, 170.

[718] Por. *„*Die Gesamtheit der Zahlengröβen *b* möge durch Bezeichnet werden*"*. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 94. Tekst w języku polskim za: G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych..., dz. cyt.*, 170.

centrum praktyki matematycznej Cantora. Stwierdzenie, że „określenie „granica ciągu (1)" na *b* znajduje ubocznie pewne uzasadnienie", oznacza, iż Cantor przypisywał chwilami pojęciom jedynie formę syntaktyczną i dotyczyło to także relacji między tymi pojęciami.

Inną kwestią, na przykładzie której można potwierdzić zrekonstruowany przez Dadaczyńskiego quasi-nominalizm, jest definiowany przez Cantora zbiór pusty.

Cantor określa zbiór pusty dość zdawkowo i lakonicznie. Pisze on w jego kontekście: „Przydaje się również znak, który wyraża brak punktów"[719].

Brzmi to na tyle nominalistycznie, na ile Cantor chciał zdefiniować nie samą treść, a pewną zależność logiczną na płaszczyźnie pojęciowej. Chodziło o samo pojęcie, symbol 0, bez treści, jako że według niego ów znak nie reprezentował żadnego obiektu (oznacza dosłownie, że nie istnieje nic). Rzeczywiście okazuje się, że nominalistycznie podchodził on do całego równania *P=0* (niekoniecznie świadomie), gdy pisał, że dla wybranej litery 0 równanie to oznacza, iż zbiór P nie zawiera żadnego punktu. Cantor konkludował ten fakt stwierdzeniem, że w zasadzie wtedy (mówiąc ściśle) zbiór P nie istnieje[720].

W tym miejscu warto nawiązać do komentarza Dadaczyńskiego o stanowisku Cantora względem zbioru pustego. Zwraca on uwagę, iż zaraz po zdefiniowaniu zbioru pustego Cantor stwierdza, że w zasadzie ten zbiór nie istnieje. Może to rodzić wątpliwości względem wcześniej sformułowanej definicji. Dadaczyński podaje dwa argumenty na to, iż Cantor jednak przyjmował istnienie zbioru pustego[721]. Wydaje się, że jest to po prostu efekt pilnowania formalnego operowania pojęciami[722].

---

[719] „Es ist ferner zweckmäβig, ein Zeichen zu haben welches die Abwesenheit von Punkten ausdrückt ". G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, nr 2, 1880, w GA s. 146 (145–147).

[720] „wir wächlen dazu den Buchstaben *0; P = 0* bedeutet also, daβ die Menge *P* keinen einzigen Punkt enthält, also streng genommen als solche gar nicht vorhanden ist". G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)..., dz. cyt.*, 146.

[721] Oprócz tego, że Dadaczyński przypuszcza, iż Cantor mógł najzwyczajniej nie odróżniać symbolu 0 od pojęcia „nic", podaje również dwa argumenty na to, iż akceptował on jednak istnienie zbioru pustego. Pierwszy z nich dotyczył stosunku Cantora do aksjomatu nieograniczonej komprehensji, a drugi wprowadzenia zbioru potęgowego (G. Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)..., dz. cyt.*, 272 przyp.272; J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 35 przyp.114.).

[722] Cantor pisze o zbiorze, który nie istnieje jako taki, ponieważ jest pomiędzy nim a 0 (symbolem określającym brak elementów), postawiony znak równości. Jedną z interpretacji tego, może być ta, iż Cantor dokonuje operacji umysłowej, podobnej do tej, jaką jest zbieranie w całość elementów (tworzenie zbioru). Stwierdza pewien zbiór P, a następnie stwierdza, iż w jego „wnętrzu" nie istnieją żadne elementy. Po czym stanowi, iż sam zbiór w swej istocie również nie istnieje – dokonuje więc w pewnym sensie jego dekonstrukcji.

To oznacza, iż można w jakiś sposób dookreślić stanowisko Cantora względem ontologii przy pomocy odwołania do konkretnych aspektów nominalizmu. Ontologia obiektów matematycznych, rozpatrywana względem indywidualnej praktyki matematycznej Cantora, byłaby wtedy osłabiona (mimo radykalnych platonistycznych deklaracji z perspektywy zewnętrznej), a tym samym słabsza względem ontologii Dedekinda. Nie zmienia to jednak faktu, że – jak już wcześniej zauważyliśmy – propozycja quasi-nominalizmu wpływa na rekonstruowany w niniejszej pracy realizm tak, że nie może on przez to stanowić wspólnych, uniwersalnych ram filozoficznych dla analizy praktyki matematycznej. To, że w kilku momentach praktyki matematycznej Cantora obserwujemy jego starania, aby nie odnosić się do matematycznych obiektów jako treści rozpatrywanych pojęć, nie oznacza, iż nie można na podstawie wprowadzonej przez niego treści zrekonstruować obiektów, które są przedmiotami zdań, jakie Cantor formułuje, lub bezpośrednio treścią wprowadzanych pojęć.

Sam realizm jest przez Shapiro określany jako opozycyjny w stosunku do idealizmu oraz nominalizmu pogląd, iż przedmioty matematyczne istnieją niezależnie od umysłu – zarówno poszczególnych matematyków, jak i od umysłów matematyków w ogóle. Zaznacza jednak, iż może chodzić o tylko niektóre obiekty[723]. Należy tu podkreślić fakt, że w niniejszej pracy proponujemy tego typu realizm, który jest niejako pochodną umysłowych konstrukcji matematycznego podmiotu (np. abstrahowania lub modelowania czy dedukcji), co nie wyklucza potencjalnego faktu, że struktury czy wzorce matematyczne mogą istnieć w realnym świecie, jak również (bądź lub) w umyśle. Niemniej jednak dopuszczamy, iż można odróżnić przedmiot matematyczny od innego, np. przedmiotu sztuki.

Powszechne wersje realizmu matematycznego utrzymują, iż matematyczne prawdy są niezależne od świata fizycznego[724]. Jednak nie przyjmujemy takiego podejścia w niniejszej pracy, również w kontekście dookreślenia realizmu Cantora (czy Dedekinda). Czynimy tak dlatego, że realizm proponowany tutaj uzależnia w pewnym sensie powstawanie matematycznych obiektów od procesów mentalnych (z drugiej strony nie pozostawiając ich w tej ścisłej zależności), w szczególności od intuicji, rozumianej głównie jako mentalny ogląd obiektów matematycznych czy dostęp do treści pojęć odpowiadających tym obiektom.

Operacje konstrukcjonistyczne umysłu nie muszą iść w parze z wyrażaniem konstruktywistycznych założeń. Niemniej jednak, stanowią czasem ważne (choć często odtwórcze) fragmenty umysłowych operacji.

[723] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics…*, *dz. cyt.*, 25–26.

[724] S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics…*, *dz. cyt.*, 27.

Chociaż w przypadku Cantora mamy do czynienia z ograniczaniem intuicji u podstaw tworzonych przez niego teorii (co tę ontologię – a ściślej jej rolę – osłabia), można zauważyć, iż w tej rozprawie stwierdzamy w kilku miejscach u Cantora kontekst intuicyjny – kontekst oglądu matematycznych obiektów (jak w przypadku wielkości nieskończenie dużych i małych).

Podsumowując, próbowaliśmy w tympodrozdziale dookreślić realizm wewnętrzny względem praktyki matematycznej Cantora, poprzez przeanalizowanie go w kontekście klasycznego zestawienia idealizm–realizm–nominalizm. Chociaż analizowano przypisywany Cantorowi quasi-nominalizm, nie stwierdzono, żeby uniemożliwił on przypisanie obiektom matematycznym podstawowego, dwuwymiarowego pragmatycznego realizmu (wewnętrznego względem indywidualnej praktyki matematycznej oraz perspektywy historyczno-społecznej).

Wewnętrzny realizm Dedekinda

Próbując wymienić obiekty podstawowe w ontologii Dedekinda, na pewno należy wspomnieć o teoriomnogościowych rzeczach (*Dingen*), stanowiących najbardziej podstawowe elementy zbioru. Następnie można wspomnieć sam zbiór – nazywany przez Dedekinda systemem – bardziej złożony, bo powstały w wyniku umysłowej operacji na bardziej podstawowych obiektach – elementach zebranych przez pomyślenie w całość. Ostatecznie można również odnieść się do odwzorowania, jako obiektu-zasady związanego z pewną dynamiką praktyki matematycznej, ponieważ określającego wykonywanie określonej czynności umysłowej oraz będącego w konsekwencji narzędziem łączącym statyczne obiekty matematyczne (przedmioty operacji), jak i wytwarzającym nowe.

Z bardziej złożonych obiektów należy wymienić wszystkie pozostałe struktury skonstruowane przez Dedekinda, włącznie z dwoma modelami liczbowymi (R i N), oraz takie, do których Dedekind się odwoływał, jak na przykład zbiór liczb wymiernych wraz z działaniami i porządkiem czy prostą złożoną z punktów, na której określił własność ciągłości. Mniej złożone niż same modele obiekty to na przykład zdefiniowany przez Dedekinda nad-zbiór składający się ze zbiorów czy łańcuch (*Kette*), będący podstawą zbioru prosto nieskończonego (tj. modelu N).

W metodzie modelowania matematycznych kwestii u Dedekinda można odnaleźć wskazywane przez Kalmara (a wspominane przez Lakatosa)[725] elementy tworzenia matematycznych treści – wszak niemiecki matematyk sformalizował (abstrahował) wybrane

[725] I. Lakatos, *Problems in the Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.*, 188.

aspekty modeli i związki między nimi w oparciu o ich wcześniejsze wyobrażenia. Co prawda trudno tu mówić o rzeczywistości, w jakiej te wyobrażenia istniały wobec tradycyjnie pojmowanej ontologii. Jednak w kontekście praktyki matematycznej (ale też II i III świata Poppera – ponieważ tą propozycją będziemy próbowali zobrazować, jak proponowany w niniejszej pracy konstrukcjonizm i realizm się łączą) można wskazać, iż rzeczywistością, w jakiej owe wyobrażenia (intuicje) istniały, była rzeczywistość przecięcia indywidualnej praktyki matematycznej z praktyką historyczno-społeczną. W tym punkcie przecięcia zbiór indywidualnych uwarunkowań, założeń, ale również psychologicznych stanów łączył się z obowiązującymi w danym momencie obiektami i metodami matematycznymi oraz z ich kontekstami – problemami, kierunkami rozwiązań oraz kierunkami dalszego rozwoju matematyki.

Jeśli przyjąć iż można pewną rzeczywistość, w jakiej należałoby „umieścić" matematyczne obiekty, zdefiniować jak wyżej, to Dedekind nawiązywał swoją praktyką matematyczną do jakiegoś rodzaju empirycznego naturalizmu. Modelował on zagadnienia matematyczne w podobnym sensie, w jakim modeluje się kwestie pozamatematyczne (tj. kwestie w innych dziedzinach nauki, jak np. w biologii, fizyce lub naukach społecznych czy w szeroko pojmowanej technologii)[726]. Oczywiście należy zauważyć, że modelowanie kwestii matematycznych i poza-matematycznych nie jest do końca tym samym, z uwagi na przedmiot tego, co się modeluje. Podstawą obserwacji w przypadku nauk empirycznych jest świat zewnętrzny, zaś w przypadku matematyki (nauki apriorycznej) podstawą obserwacji jest – jakby to Dedekind powiedział – „świat myśli", który w perspektywie niniejszej pracy jest też związany z już skonstruowaną wiedzą obiektywną. Jak mogliśmy zaobserwować, Dedekind jako pewne podstawowe narzędzie formalizacji oraz wyjaśniania matematyki (narzędzie budowania modeli) wykorzystywał teorię mnogości. Ale same modele liczbowe powstały w oparciu o „zaobserwowanie", wybranie oraz połączenie konkretnych, wymaganych aspektów tych zbiorów (aspektów, które były przez Dedekinda skądinąd zastane).

W tym kontekście można spróbować określić przyznany wewnętrzny (pragmatyczny) realizm obiektów praktyki matematycznej Dedekinda, poprzez zmodyfikowany argument z niezbędności Quine'a. Chociaż Linnebo wskazuje na kontrowersje dotyczące holistycznego empiryzmu Quine'a, możemy zauważyć, że jego propozycja jest interesująca z punktu widzenia

[726] Więcej na temat matematycznego modelowania można przeczytać np. w V. Mityushev, W. Nawalaniec, N. Rylko, *Introduction to Mathematical Modeling and Computer Simulations...*, *dz. cyt.*

niniejszej pracy i praktyki Dedekindowskiej. Według Quine'a przekonania matematyczne stanowią obszerne pole, gdzie granice są wyznaczane przez obserwacje, których skutkiem są zdania na temat obserwacyjnych kwestii. Wprawdzie wewnątrz tego pola przekonania są powiązane logicznymi relacjami, a Quine się sprzeciwia intuicji Kanta, jednak twierdzi również, że pole można obserwować przy pomocy zmysłów i że to one stanowią jedyne ograniczenia dla pola przekonań. Dodatkowo Quine zgadza się, że przedmioty matematyki to przedmioty abstrakcyjne[727].

Jeśli za Gödlem przypiszemy intuicji pewnego rodzaju zdolność percepcji – nie mamy tu na myśli percepcji obiektów z jakiejś dodatkowej rzeczywistości, a zwykłą wyobraźnię matematyczną – można ją traktować jak rodzaj dodatkowego zmysłu. Dodając do tego pewną intencję, jaka ukierunkowuje intuicję, otrzymujemy rodzaj zmysłu, dzięki któremu da się obserwować matematyczne „fakty" (dotyczące obiektów skonstruowanych i istniejących w perspektywie historyczno-społecznej), przyswajać je, jak i świadomie konstruować potrzebne elementy. Tego rodzaju bowiem świadomą aktywność można zaobserwować u Dedekinda. Chodzi o jego odniesienia do przedmiotów myślenia, umocnionego odniesieniem do „świata myśli", a także odniesienia i konstrukcje – prostych do zwizualizowania – właściwości ciągłości czy dynamicznej struktury łańcucha.

Argument z niezbędności Quine'a jest przez Linnebo opisany w postaci trzech przesłanek:

> „Przesłanka 1. Egzystencjalne kwantyfikatory pociągają za sobą zaangażowanie ontologiczne. Oznacza to, że aby zdanie o postaci $\exists x\ \phi(x)$ było prawdziwe, musi istnieć jakiś obiekt spełniający warunek ϕ.
> Przesłanka 2. Nauki przyrodnicze nieodzownie wykorzystują teorie, które kwantyfikują abstrakcyjne obiekty matematyczne.
> Przesłanka 3. Mamy powody, by wierzyć w to, co mówią nam nauki przyrodnicze.
> Wniosek. Mamy powody sądzić, że istnieją matematyczne obiekty abstrakcyjne"[728].

Nie jest to argument, który uzasadnia ontologię matematyki w przypadku praktyki matematycznej Dedekinda, jednakże sparafrazujemy go, zamieniając następująco:

[727] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 94.

[728] Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics*..., *dz. cyt.*, 97.

„Przesłanka 1. Egzystencjalne kwantyfikatory pociągają za sobą zaangażowanie ontologiczne. Oznacza to, że aby zdanie o postaci $\exists x\ \phi(x)$ było prawdziwe, musi istnieć jakiś obiekt spełniający warunek ϕ.

Przesłanka 2. Można w matematyce wykorzystywać teorię mnogości (do rozwiązywania problemów, do precyzacji i objaśniania sensu), która poprzez kwantyfikowanie obiektów teoriomnogościowych, kwantyfikuje abstrakcyjne obiekty matematyczne.

Przesłanka 3. Mamy powody, by wierzyć w to, jak nam się w umysłowym doświadczeniu ukazuje teoria mnogości.

Wniosek. Mamy powody sądzić, że istnieją matematyczne obiekty abstrakcyjne”[729].

Otrzymujemy pewien obraz tego, czym były podstawowe obiekty oraz konstruowane z nich struktury. Nie oznacza to, że struktury matematyczne sprowadzały się do teoriomnogościowych (czy – jak niektórzy zauważają – teoriokategorycznych), lecz wydaje się, że ontologia obiektów teoriomnogościowych była najsilniejsza, i to przy jej pomocy Dedekind konstytuował i umacniał ontologię w pozostałych obszarach matematyki. Należy pamiętać, że analizy dotyczyły podstaw matematyki w ujęciu Dedekinda.

Tego rodzaju, wyżej opisane empiryczne (bądź quasi-empiryczne) podejście nie oznacza że zrównujemy (jak niektórzy empiryści to robią) we wszystkich aspektach przedmiot matematyki z przedmiotem – na przykład – fizyki. Istnieją istotne różnice między matematyką a innymi dziedzinami nauki. Jednakże podejście to wiąże się z umocnieniem ontologii szeroko pojętego przedmiotu badanego w matematyce. Zwłaszcza – jak zauważa Wójcik – w kontekście historycznym[730]. Teza o historyczności matematyki -=– matematyka może być zbiorem zdań i teorii, rozwijających się w czasie i możliwych do sprawdzania – w odniesieniu do przeanalizownych praktyk matematycznych Cantora i Dedekinda i zaobserwowanych u nich kwestii filozoficznych będzie rozwinięta w następnym podrozdziale.

Podsumowując, można wymienić w kontekście praktyki matematycznej Dedekinda zarówno obiekty podstawowe, jak i struktury z nich konstruowane. Chcąc porównać realizm wewnętrzny Dedekinda do realizmu wewnętrznego Cantora, zaproponowaliśmy, aby ten

[729] Parafraza autorska oparta bezpośrednio na zacytowanym wcześniej argumencie Quine’a z: Ø. Linnebo, *Philosophy of mathematics...*, *dz. cyt.*, 97.

[730] W. Wójcik, *Filozofia matematyki na przełomie XIX i XX wieku*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 40, (1995) nr 4, 69–71.

pierwszy rozpatrywać pod kątem odmiany naturalistycznego empirycyzmu, nawiązując tym do wcześniej przypisanego strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego. Dedekind, traktując teorię mnogości jako pewny i oczywisty punkt odniesienia (który spełniał warunki pewnego rodzaju poglądowości), modelował wybrane matematyczne kwestie, aby sformalizować je przy pomocy teorii mnogości. Kwestie te można określić jako zaobserwowane mentalnie problemowe sytuacje matematyczne. Analiza ta wzmacnia proponowany w niniejszej pracy realizm w kontekście praktyki matematycznej Dedekinda.

W tym podrozdziale opisana została propozycja realizmu obiektów matematycznych, dookreślona względem indywidualnych praktyk matematycznych zarówno Cantora, jak i Dedekinda W przypadku tego pierwszego wydaje się ona – wbrew jego pozamatematycznym platonizującym wypowiedziom – słabsza niż w przypadku drugiego, z uwagi na to, iż momentami Cantor odwoływał się do samych tylko pojęć, unikając treści, jakie mogłyby one reprezentować. Natomiast Dedekind traktował teorię mnogości jako pewną i oczywistą podstawę całej matematyki. Nie zmienia to jednak faktu, że obiekty matematyczne, które wymieniono i analizowano w niniejszej pracy oraz które były przedmiotem dyskursu obydwu matematyków, mogą być opisane jako istniejące pragmatycznie w kontekście ich praktyki naukowej. Tego rodzaju realizm nie odnosi się bezpośrednio ani do kwestii abstrahowania podstawowych obiektów i relacji ze świata fizycznego, ani nie zakłada istnienia przedmiotów matematycznych w rzeczywistości niezależnej od umysłu i działalności człowieka. Podkreśla jedynie wymóg – nie tylko biernej – ale również aktywnej działalności umysłowej i decyzyjnej podmiotu matematycznego, tworzącej ową matematyczną ontologię. W następnym podrozdziale wskażemy, iż abstrakcyjne istnienie obiektów matematycznych względem indywidualnej praktyki matematycznej można, a nawet należy pogodzić z ich istnieniem w rzeczywistości historyczno-społecznej.

Wiedza dziedziczona w kontekście realizmu matematycznego

Rozważania na temat wewnętrznej ontologii, zarówno u Cantora, jak i Dedekinda, w niniejszym podrozdziale zamierzamy uzupełnić perspektywą społeczno-historyczną.

W rozprawie skupiamy się wokół praktyki matematycznej, a w szczególności wokół pojęcia konstrukcji umysłowej, dlatego zaznaczaliśmy niejednokrotnie, iż zależy nam na rozpatrywaniu w spójnej i niewykluczającej perspektywie zarówno aspektów epistemologii, jak i ontologii (stąd tak rekonstruowane ramy). Konstrukcja wymaga – z definicji – połączenia dostępnych elementów, uznanymi metodami w pewną całość, stąd należy zadać pytanie o pochodzenie tych dostępnych i uznanych rzeczy. W tym kontekście nie sposób pominąć perspektywy historyczno-społecznej praktyki matematycznej (i samej matematyki). Może w tym pomóc pragmatyczna propozycja konstrukcjonizmu społecznego, która jest stanowiskiem bardziej ontologicznym niż epistemologicznym i wskazuje na obiekty matematyczne definiowane przez ciągłość ich istnienia (począwszy od momentu ich wprowadzenia) – zarówno w perspektywie historycznej, jak i społecznej[731]. Jednak warto sięgnąć też do wybranej tradycyjnej, opracowanej propozycji filozoficznej.

Można tutaj zaproponować teorię Karla Poppera trzech światów, aby lepiej ująć i pogodzić dwa rodzaje ontologii rekonstruowane w niniejszej pracy, odnośnie do praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda. W szczególności uwzględnimy świat II i III. Jest to uzasadnione tym, że zarówno u Dedekinda znajdujemy świadome odniesienia do wiedzy dziedziczonej, jak i u Cantora – elementy przejmowanej wiedzy zastanej (tj. dziedziczonej). Ale także tym, iż dorobek obydwu matematyków jest współcześnie przedmiotem obiektywnego dyskursu matematycznego i filozoficznego[732].

Głównymi aspektami, w jakich kontekście wskazane zostały elementy owej dziedziczonej wiedzy, była konstrukcja liczb rzeczywistych jako odpowiedź na problem niewymierności (u obydwu matematyków) oraz zawierająca nawiązanie do teorii stosunków wielkości Eudoksosa-Euklidesa (u Dedekinda), a także kwestia samej teorii mnogości jako pewne – ogólne i odległe – nawiązanie do starożytnej propozycji podstawowych jednostek tworzących wszystko inne u Cantora, lub tylko matematykę (ale i nie w sposób absolutny) u Dedekinda, oraz wreszcie kwestia wielkości nieskończenie małych, jako pewien probierz, na ile wiedzę dziedziczoną obaj matematycy poddawali racjonalnemu opracowaniu.

Jeśli chodzi o konstrukcję liczb rzeczywistych Cantora, należy zwrócić uwagę po pierwsze na fakt, że była ona podobna do innych konstrukcji, opartych na wcześniejszych propozycjach. Chodzi konkretnie o to, że już Augustin Cauchy uważał, iż liczba niewymierna

---

[731] J. Carter, *Ontology and Mathematical Practice*..., *dz. cyt.*; J. Carter, *Mathematical Practice, Fictionalism and Social Ontology*, „Topoi” 42, (2022), doi: 10.1007/s11245-022-09856-4; M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic*..., *dz. cyt.*; S. Kaufman, *On the Emergence of a New Mathematical Object*..., *dz. cyt.*; E. Piotrowska, *Dokąd zmierza filozofia matematyki?*..., *dz. cyt.*

[732] Oczywiście należy uwzględnić wspomnianą na początku pracy różnicę między proponowanym tu dwuwymiarowym realizmem ontologicznym a ontologią II i III świata. Gdy mówimy o istnieniu obiektu w świecie II, mamy na myśli obiekt istniejący względem indywidualnej praktyki matematycznej. Gdy mówimy, że istnieje obiekt w świecie III, mamy na myśli obiekt istniejący względem perspektywy (praktyki) historyczno-społecznej. Co prawda uwzględnione przez Poppera procesy psychologiczne również adaptujemy w proponowanych tu ramach filozoficznych konstrukcjonizm-realizm, jednak zaliczamy je do epistemologii, nie do ontologii.

jest granicą ciągu fundamentalnego (liczb wymiernych)[733]. Natomiast Cantor wraz Heinem i Mérayem oparli na tym aspekcie swe konstrukcje liczb rzeczywistych[734]. Jak pisze Witold Więsław: „Konstrukcje Méraya, Cantora i Heinego to, najkrócej mówiąc, konstrukcje uzupełnienia ciała *Q* liczb wymiernych wzgledem zwykłej metryki na prostej”[735].

W tym kontekście należy zauważyć w Cantorowskiej konstrukcji *R* nie tylko sam problem (niewymierności) był zaczerpnięty z wiedzy zastanej, podobnie było z metodą jego rozwiązywania. Również podejście matematyka z Halle do liczb wymiernych, jako danych intelektowi *a priori* (wraz z określonymi na nich działaniami i porządkiem), było przez Cantora zasymilowane w ramach przejmowania poglądów ówczesnej matematyki i jej filozofii.

W powyższym kontekście mamy na myśli to, iż należy potraktować liczby wymierne jako element matematycznej wiedzy, zastany i przyswojony przez Cantora, następnie rozwinięty do nowego obiektu, jakim był zbiór liczb rzeczywistych. Należy zauważyć, że w tej sytuacji podkreślamy fakt istnienia obiektów matematycznych, które już są skonstruowane i przez to dostępne dla poszczególnych podmiotów matematycznych. Owo istnienie danego obiektu w perspektywie praktyki historyczno-społecznej może być w pewnych momentach również wzięte pod uwagę w perspektywie indywidualnej praktyki, gdzie (razem z akceptowalnymi metodami) staje się częścią nowego obiektu. Ten fakt nie wyklucza obiektywnego istnienia matematycznych przedmiotów, jednak uzależnia matematykę ściśle od działalności matematycznego podmiotu (a w konsekwencji od działalności wszystkich podmiotów razem wziętych). Tym samym można stwierdzić, że dla rzetelnego określenia rzeczywistości, w jakiej matematyka istnieje, należy uzwględnić zarówno świat II (subiektywnych aktów psychicznych), jak i III świat wyprodukowanej i komunikowanej wiedzy obiektywnej (intersubiektywnych obiektów matematycznych) Poppera[736]. Oba te światy przecinają się w momencie, gdy dany matematyk zaczyna studiować jakiś problem matematyczny lub po prostu gdy pewien student mający zamiar stać się matematykiem przyswaja pewien zakres matematycznej wiedzy.

---

[733] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1949, 396–397.

[734] P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen…*, *dz. cyt.*, 120.

[735] W. Więsław, *Matematyka i jej historia*, Opole 1997, 100.

[736] K.R. Popper, *Wiedza obiektywna…*, *dz. cyt.*

Tak samo się ma sprawa z teorią mnogości Cantora. Należy tu zestawić postawę, jaką posiadał względem stworzonej przez siebie teorii mnogości, opartej na przejętym, podstawowym pojęciu zbioru, z podejściem względem wielkości aktualnie nieskończenie małych. O ile Cantor wprowadził nieskończoność aktualną w przypadku wielkości nieskończenie wielkich w postaci zbiorów (liczb) nieskończonych, o tyle oponował przeciwko istnieniu wielkości nieskończenie małych. W przypadku nieskończenie małych mamy do czynienia z przejęciem zastanego podejścia do tych wielkości, opartego na wykorzystywaniu potencjalnie nieskończenie małych w analizie (opis ruchu). Przez takie niepełne i pozbawione strukturalnego kontekstu – bo nieuwzględniające nieskończenie małych jako obiektów, jak robi to współcześnie algebraiczna teoria ciał uporządkowanych – podejście Cantor zbudował nie całkiem poprawny dowód przeciwko istnieniu tych wielkości. To z kolei może wskazywać na fakt, iż zbiór wiedzy matematycznej III świata nie jest rozwijany jedynie prostą, kumulacyjną metodą logiczno-dedukcyjną, zgodnie z już wprowadzonymi obiektami, zależnościami, własnościami i logiką, jak również podejściami i paradygmatami. Czasem dokonuje się przez wprowadzenie nowej jakości, nowej perspektywy, pozwalającej na wprowadzenie (konstrukcję) nowego obiektu, poprzez strukturalne zdefiniowanie jego elementów (co wymaga niejednokrotnie określania jednego elementu przez właściwości innych, a w konsekwencji poszerzenia definicji niektórych elementów danej struktury). Jeśli chodzi o kwestię nieskończenie małych, jak również kwestię zbiorów nieskończonych wprowadzonych przez Cantora, taki rodzaj definiowania pokazali Piotr Błaszczyk i Marzena Fila, korzystając z propozycji Leonharda Eulera oraz współczesnej, algebraicznej teorii ciał uporządkowanych[737].

Jeśli więc chodzi o kwestię teorii mnogości, rozpatrywaną w połączeniu z kwestią nieskończoności u Cantora, mamy do czynienia z przejęciem w obrębie akceptowanej wiedzy tła dwóch aspektów – obydwu nie do końca będących ścisłymi częściami matematycznych teorii, co raczej formami założeń meta-matematycznych lub po prostu paradygmatycznymi, ogólnymi podejściami (Cantor uczynił je częścią wprowadzanej przez siebie treści matematycznej).

W przypadku Dedekinda można stwierdzić, iż bardziej świadomie i retrospektywnie odnosi się on do wiedzy dziedziczonej. Przypuszczamy, że taka postawa wynikała z postawy strukturalistycznej – był on świadom, jakie dokładnie elementy należy opracować, aby wprowadzić dany model liczbowy (przynajmniej w zakresie dwóch modeli omawianych w

[737] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective...*, *dz. cyt.*

niniejszej pracy – R i N). I tak konstruuje on zbiór liczb rzeczywistych nawiązując do Eudoksosa-Euklidesa teorii stosunków wielkości, nie tylko aby w prosty, dedukcyjny sposób wprowadzić liczby niewymierne (jak to zrobił Cantor, uzupełniając liczby wymierne o liczby niewymierne), ale również aby taka konstrukcja posiadała – sformalizowaną przez niego – cechę ciągłości, nawiązującą z kolei do intuicji geometrycznej.

Mimo iż Dedekind – tak jak Cantor – przejął pojęcie zbioru jako pewną oczywistą podstawę swojej teorii mnogości (chociaż już pojęcie zbioru prosto nieskończonego starał się udowodnić, a także traktował teorię mnogości bardziej jako narzędzie aniżeli właściwą dziedzinę matematyki, rozwijaną ze względu na nią samą, jako cel), nie wypowiadał się na temat aktualnie nieskończenie małych wielkości, a tym bardziej nie przeciwstawiał ich w antagonistyczny sposób wprowadzanej przez siebie teorii mnogości. Odniósł się jedynie do potencjalnie nieskończenie małych wielkości, a i tak zrobił to w tym celu, aby jedynie związać je z wprowadzoną przez siebie własnością ciągłości. Niemniej jednak, jak wiemy, owa własność skutecznie zabezpiecza system ją posiadający przez zawieraniem się w nim aktualnie nieskończenie małych wielkości. Natomiast system posiadający własność zupełności, jaką Cantor opisał zbiór liczb rzeczywistych, bez własności archimesodowości (bez Aksjomatu Archimedesa), tych wielkości nie wyklucza. Powyższe może podkreślać różnicę między podejściem obydwu matematyków zarówno w stosunku do wiedzy dziedziczonej, jak i do samej metodologii, ale i przedmiotu oraz celu ich praktyki matematycznej. Porównanie to wskazuje równocześnie na skuteczność i efektywność podejścia strukturalnego.

W związku z powyższym można zauważyć, że kwestia wiedzy zastanej (dziedziczonej) dotyczyła zarówno praktyki matematycznej Cantora, jak i praktyki matematycznej Dedekinda. Dla obydwu matematyków punktem wyjścia dla konstrukcji R oraz wprowadzenia teorii mnogości były częściowo podobne obiekty i podejścia. Jednak były również pewne różnice między tym, na ile oraz w jakim zakresie brali oni pod uwagę poszczególne obiekty, problemy oraz metody.

Niniejszy rozdział nawiązuje do wiedzy dziedziczonej, rozumianej jako pewien zestaw obiektów, metod i podejść, istniejący względem praktyki historyczno-społecznej, z którego konkretny matematyczny podmiot (matematyk, student) może korzystać i rozwijać jego zasoby. To podejście jest zrozumiałe w obrębie konstrukcjonizmu społecznego[738], gdzie

[738] M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic...*, *dz. cyt.*; S. Kaufman, *On the Emergence of a New Mathematical Object...*, *dz. cyt.*

analizujemy rozwój matematycznej wiedzy po obiektach – tj. uwzględniając ontologię, nie zaś skupiając się na społecznych (lub indywidualnych) procesach konstrukcyjnych. Spróbujemy teraz pokazać przy pomocy propozycji Poppera, co rozumiemy poprzez propozycję pogodzenia wcześniej wspominanej ontologii obiektów wewnętrznej względem indywidualnej praktyki matematycznej (tj. wewnętrzny względem tej praktyki realizm) z ontologią rozpatrywaną względem obiektywnie istniejącej wiedzy matematycznej (przy czym obiektywnie nie oznacza zupełnie niezależnie od matematycznego podmiotu).

Korzystając z opracowania teorii Karla Poppera przez Andrzeja Stępnika (nie chodzi tu o jego krytykę tej teorii, gdyż można polemizować z pewnymi aspektami jego interpretacji, jak np. z tym, że III świat można zredukować do świata I i II), omówimy ją poniżej w 10 punktach, uzupełniając w niezbędnych miejscach komentarzami wskazującymi, jak odnosi się ona do interesujących nas problemów[739].

1. Po pierwsze, Popper dopuszczał istnienie wiedzy zarówno subiektywnej (tu zaliczał stany umysłu i świadomości oraz dyspozycje do działania i reakcji), jak i obiektywnej (tu zaliczał problemy, teorie i argumenty jako takie).

Należy zauważyć, iż stany umysłu i świadomości u Cantora i Dedekinda to akty umysłowe (bierne lub czynne), jakich podstawą jest matematyczna intuicja oraz intencja. Argumentowaliśmy, że intuicja wraz z intencją stanowią bazę dla praktyki umysłowej matematycznego podmiotu. Tak przedmiotem wiedzy subiektywnej jest zarówno pewien obiektywny, ale cząstkowy przedmiot matematyki, jak i oryginalny, konstrukcjonistyczny wkład matematycznego podmiotu. Natomiast wiedza obiektywna to wiedza, której przedmiotem jest całokształt przedmiotu matematyki, będący wynikiem działalności społeczności naukowej (tj. wypadkowej działalności ludzkości w zakresie matematyki).

2. Po drugie, Popper uważał, iż wiedza obiektywna jest sformułowana językowo.

Należy zauważyć, że pozajęzykowa natura intuicji wykazana wcześniej nie implikuje pozajęzykowego charakteru sfery wiedzy obiektywnej. Teorie Cantora i Dedekinda są sformułowane w pewnym języku formalnym i oparte na pojęciach i związkach między pojęciami. W tej formie stają się komunikowalne i stanowią ich wkład do całokształtu

[739] K.R. Popper, *Wiedza obiektywna...*, *dz. cyt.*; A. Stępnik, *Poppera trzeci świat okiem życzliwego krytyka*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 14, (2006) nr 1, 9–29.

matematycznej wiedzy, a więc do wiedzy obiektywnej. Stąd wiedza obiektywna, jako suma (niekoniecznie prosta) takich wkładów, również jest wyrażona w jakimś języku.

3. Jedynie odnośnie do wiedzy obiektywnej Popper dopuszczał krytykę czy dyskusję.
4. Czwarty punkt odnosi się bezpośrednio do hipotezy o istnieniu trzech światów – świata I (tu zaliczał przedmioty i stany fizyczne), świata II (tu zaliczał stany psychiczne i świadomości, jak i dyspozycje do działania), oraz świata III (tu zaliczał obiektywne treści myślenia, systemy i problemy teoretyczne, argumenty, sytuacje problemowe i stany dyskusji, dzieła literackie i sztuki czy pamięć komputerową).
5. Kolejno Popper twierdzi, iż istnieje wzajemne oddziaływanie bezpośrednie między światem I oraz II, a także między światem II i III. Między światem zaś I i III istnieje jedynie oddziaływanie pośrednie – poprzez pośrednictwo świata II.
6. Popper określa świat III jako autonomiczny oraz nieredukowalny do świata II.
7. Opisuje on również sprzężenie zwrotne między II i III światem następująco: „problem wstępny” → „teoria próbna” → „eliminacja błędów” → „nowy problem”.
8. Popper określa również świat III jako powstały wskutek oddziaływania ludzkiej aktywności (tj. przedmiotów świata II).
9. Epistemologia powinna badać obiekty świata III (tzw. wiedzę obiektywną).
10. I wreszcie, Popper twierdził również, że epistemologia badająca III świat (tzw. obiektywistyczna) przynosi wiedzę na temat świata II (tj. subiektywnej świadomości czy subiektywnych procesów myślowych uczonych). Przy czym twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Należy zwrócić uwagę zwłaszcza na punkty 4-7, które przyjmujemy w niniejszej pracy za podstawę wyjaśniającą ontologię wiedzy obiektywnej, z jaką się stykali u początków swojej praktyki matematycznej Cantor i Dedekind oraz jaką twórczo rozwijali. Według propozycji Poppera, tym co łączy świat I oraz III, jest w istocie działalność człowieka. Jest to spójne z przedstawioną w tej rozprawie tezą o konstrukcjonizmie epistemicznym jako koniecznym warunku powstawania matematycznej wiedzy obiektywnej.

Dodatkowo, w związku z punktem 10, należy wskazać, iż jest on zbieżny z przyjętą w pracy metodologią. Tutaj poddawane analizie są matematyczne teksty Cantora i Dedekinda, stanowiące już część wiedzy obiektywnej, istniejącej w III świecie. Na podstawie tej analizy wyciągane są wnioski dotyczące założeń filozoficznych, uwikłanych w matematyczne kwestie, ale również wnioski odnośnie do indywidualnych cech ich praktyk matematycznych oraz celów działalności. Stąd na podstawie analizy pewnego zakresu wiedzy należącej do świata III, otrzymujemy wnioski, które (przynajmniej część z nich) mogą być odniesione do świata II – są to kwestie dotykające indywidualnych celów, założeń psychologicznych oraz aktów umysłowych matematyków. Co więcej, jedynie na podstawie tych drugich nie da się wywnioskować będących ich efektem teorii matematycznych.

Zauważmy tutaj jeszcze jedną rzecz, a mianowicie: w punktach 9 i 10, przedstawiono podejście dotyczące epistemologii, które znacznie tę epistemologię ogranicza – jak Stępnik komentuje postulat 9[740]. W kontekście współczesnych neuronauk czy rozwijającego się w filozofii matematyki kierunku badania praktyki matematycznej niekoniecznie można zgodzić się z tymi postulatami – pomijamy je więc jakonie mające wpływu na główną tezę Poppera, zamieszczoną w punkcie 4, oraz komentarze do tej tezy, zamieszczone w punktach 5-8.

To zwięzłe streszczenie propozycji Karla Poppera (a także jego krótka analiza Stępnika) pozwala na ujęcie wszystkich aspektów potrzebnych w niniejszej rozprawie. Wykorzystujemy je jako propozycję możliwej reinterpretacji filozoficznych postaw Cantora i Dedekinda, odnośnie do ontologii obiektów i rzeczywistości matematycznej zrekonstruowanych na bazie ich praktyki matematycznej i z uwzględnieniem odniesienia do wiedzy tła (zastanej).

Ogólnym wnioskiem z przeprowadzonych tutaj analiz może być to, że obiekty matematyczne – tak w przypadku praktyki matematycznej Cantora, jak i Dedekinda – mogą być analizowane jako obiekty III świata Poppera, stanowiąc podstawę obiektów istniejących względem indywidualnej praktyki matematycznej – stających się następnie częścią III świata wiedzy obiektywnej. W swojej propozycji Popper przedstawia oprócz świata zawierającego obiekty fizyczne (stanów fizycznych) i świata zawierającego stany świadomości (stanów umysłu czy predyspozycji) trzeci świat. Jest on wytworem człowieka (nie zaś idei Platona czy ducha obiektywnego Hegla). Wprawdzie jest to wytwór człowieka, ale nie jest on redukowalny do poprzednich dwóch światów ani od nich w pełni zależny – mimo iż istnieją wzajemne wpływy wszystkich trzech światów. Oprócz pewnej autonomii posiada również pewną obiektywność. Obiekty matematyczne mogą być tworzone, a następnie mogą istnieć bez podmiotu matematycznego, jak i mogą być przedmiotem historyczno-społecznej dyskusji, bez szczególnej zależności od konkretnego matematyka. W tym kontekście badanie matematyki

[740] A. Stępnik, *Poppera trzeci świat okiem życzliwego krytyka...*, *dz. cyt.*, 28–29.

zredukowanej do jednego ze światów (np. kwestii matematyki lub filozofii bez odniesienia do – szeroko pojmowanych – uwarunkowań poznawczych człowieka czy kultury) jest perspektywą zbyt wąską i nie pozwala adekwatnie wyjaśnić opisywanych tu różnorodnych aspektów matematyki.

Powyższa propozycja, jak wiele innych wątków w niniejszej pracy, jest tematem, który można szerzej analizować w odrębnej pracy, a sama propozycja Poppera może być krytykowana z różnych perspektyw, jednak wydaje się, że to najlepsze aktualnie dostępna narzędzie do zilustrowania postawionych tu problemów. Jednocześnie należy w tym miejscu zaznaczyć, iż przykład trzech światów Poppera nie pociąga za sobą pełnego i bezkrytycznego przejęcia całej tej propozycji, odnoszącej się do powstawania i rozwoju wiedzy (np. stwierdzenia o falsyfikalności nauki, dyskutowanego m.in. przez Kuhna)[741].

Jak widać, w praktyce matematycznej – zarówno Cantora, jak i Dedekinda – można, po pierwsze,zrekonstruować wewnętrzny względem indywidualnej praktyki realizm ontologiczny, opierający się na podstawowych, pierwotnych obiektach matematyki, który może być przedłużony na inne konstrukcje strukturalne. Po drugie, w ich praktyki matematyczne uwikłane są elementy wiedzy dziedziczonej (wiedzy tła), które – jak uważamy – wskazują na istotną perspektywę historyczno-społeczną analizowanych badań. Po trzecie, ukazano, że badania w kontekście praktyki matematycznej należy uzupełnić Popperowską teorią trzech światów, aby wyjaśnić wszystkie istotne kwestie. Porównując ontologie obu matematyków, wskazano w zasadzie jedną znaczną różnicę: kontekst strukturalizmu metodologiczno-epistemicznego, którego efekty można odnaleźć w szczegółowej analizie ontologii u Dedekinda, ale nie u Cantora.

5.4 Podsumowanie

W tym rozdziale przedstawiono rozważania dotyczące bezpośrednio Tezy I, czyli kwestii rewizji dotychczasowych dychotomicznych ujęć: Cantor – platonik i Dedekind – konceptualistyczny konstruktywista, stanowiącej główną tezą niniejszej pracy. Zestawione zostały założenia filozoficzne, deklarowane przez dwóch analizowanych matematyków, a także założenia przypisywane im w pewnych kręgach naukowych, z założeniami zrekonstruowanymi w tej rozprawie. Wykorzystano wywodzące się z prac Michała Hellera podejście filozofii w

[741] T.S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions*, Chicago 1970.

nauce, które rozwinięto poprzez analizę praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda w ramach podejścia PMP. Opisany tu strukturalizm służył raczej do sprecyzowania proponowanych kierunków epistemologii i ontologii (tj. konstrukcjonizm oraz realizm), nie odnosimy się bezpośrednio do niego, a do jego dookreśleń. Są nimi: modelowanie teoriomnogościowe u Dedekinda i jego brak u Cantora, a także występowanie obiektów-struktur u obu matematyków.

Skupiliśmy się tutaj na podważeniu dychotomii działalności obu matematyków, przeciwstawiającej „odkrywanie matematyki istniejącej realnie na zewnątrz i niezależnie od podmiotu" oraz „konstruowanie matematyki przez umysł podmiotu i istnienie jej w umyśle w postaci niezobowiązującej ontologicznie".

Stąd tworząc ramy filozoficzne dla analizy praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda, zaproponowaliśmy takie zestawienie aspektów ontologii i epistemologii, które zwracają uwagę na:

– konstrukcję umysłową podmiotu (konstrukcjonizm), jaką ten wykonuje, rozwiązując pewien problem i wprowadzając nowy obiekt do matematyki (co może robić z różnym zakresem intencji oraz intuicji);

– kwestię istnienia matematycznych obiektów, która łącząc perspektywę indywidualnej praktyki matematycznej (perspektywę subiektywną) z perspektywą historyczno-społeczną (perspektywą obiektywną), nadaje ontologii tych obiektów dwuwymiarowość.

Proponowany konstrukcjonizm oraz realizm mogą – poprzez skorzystanie z propozycji Hellera, aby poszerzać zakres filozoficznych pytań o matematykę, oraz dzięki przyjęciu podstawowych założeń PMP – przekraczać wspomnianą dychotomię: „odkrywanie matematyki istniejącej realnie na zewnątrz i niezależnie od podmiotu" *vs*. „konstruowanie matematyki przez umysł podmiotu i istnienie jej w umyśle w postaci niezobowiązującej ontologicznie". Wzięto pod uwagę zarówno umysłowy, konstrukcjonistyczny wkład w rozwój matematyki indywidualnego podmiotu matematycznego – ale z zaznaczeniem, iż konstrukcja ta wykorzystuje już wcześniej wprowadzone obiekty, jak i metody konstruowania (względem perspektywy historyczno-społecznej) –jak również podkreślono brak zewnętrznych względem praktyki matematycznej wymagań ontologicznych, przy jednoczesnym przyznaniu realizmu pragmatycznego, wewnętrznego wobec perspektywy indywidualnej oraz historyczno-społecznej.

Rekonstruowane aspekty filozoficzne (tj. epistemologiczny konstrukcjonizm oraz wewnętrzny i historyczno-społeczny realizm, dookreślone aspektami strukturalizmu) mogą być przypisane obydwu matematykom – chociaż z pewnymi różnicami, wynikającymi z metodą teoriomnogościowego modelowania Dedekinda, której nie możemy przypisać Cantorowi. Wykazano zatem, że przyjmowana w literaturze dychotomia jest zbyt radykalnym rozróżnieniem w kontekście praktyki matematycznej tych uczonych. Warto podkreślić, że dotychczasowy obraz bazował na deklaracjach tych uczonych oraz na ich filozoficznych interpretacjach – okazuje się więc, że również i w matematyce deklaracje filozoficzne nie zawsze idą w parze z filozofią faktycznie przyjmowaną w obrębie działalności matematycznej. To ważny wniosek, wskazujący istotną rolę, jaką odgrywa PMP dla historii i filozofii matematyki.

Pomimo wskazanej różnicy między metodologiami Cantora i Dedekinda, można zauważyć zasadnicze podobieństwo między przesłankami filozoficznymi, dotyczącymi ich praktyk (konstrukcjonizm, jeśli chodzi o epistemologię, oraz realizm, jeśli chodzi o ontologię), przez co dla dyskutowanej, radykalnej opozycji filozoficznych założeń prezentowana jest pewna alternatywa. Dodatkowo, rekonstruowane założenia filozoficzne bezpośrednio osłabiają założenia świadomie deklarowane oraz przypisywane w oparciu o pozamatematyczne wypowiedzi (tj. platonizm-konstruktywizm) zarówno Cantorowi, jak i Dedekindowi. Konstrukcjonizm wskazany w praktyce matematycznej Cantora wraz z wewnętrznym realizmem osłabiają deklarowany przez niego radykalny platonizm, natomiast strukturalizm epistemiczny wraz z ontologicznym realizmem w praktyce matematycznej Dedekinda podważają przypisywany mu konceptualistyczny konstruktywizm.

Pomimo zrekonstruowania wspólnych ram filozoficznych w oparciu o analizę praktyki matematycznej, jako alternatywy dla przypisywanych Cantorowi i Dedekindowi opozycyjnych stanowisk, nie mamy do czynienia z zupełnym brakiem różnic. Dlatego następny, ostatni rozdział przedstawi rozważania dotyczące bezpośrednio próby odpowiedzi na pytanie, co było przyczyną różnic (głównie w metodologii) między rekonstruowanymi przesłankami filozoficznymi praktyki matematycznej obu obu uczonych.

6 *Metodologie badawcze Cantora i Dedekinda (teza II)*

W niniejszej rozprawie drugą istotną tezą jest ta, mówiąca, że praktyce matematycznej Cantora i Dedekinda możemy zaobserwować znaczniejsze i bardziej fundamentalne różnice niż w rekonstruowanych tutaj ich stanowiskach epistemicznych oraz ontologicznych.

Tutaj pokażemy różnice założeń obydwu matematyków odnośnie do źródeł wiedzy matematycznej (1), celowości i zakresu stosowalności tej wiedzy (2), jak i wyróżnimy styl badań Cantora i Dedekinda (3). Stąd charakterystyka ich praktyk matematycznych przedstawiona w tej części skupiać się będzie raczej na różnicach niż podobieństwach, inaczej niż w charakterystykach ich filozofii matematyki.

Aby rozważyć stosunek obydwu matematyków do powyższych kwestii, wzięte pod uwagę zostaną fragmenty ich prac matematycznych, jak również opis ich podejścia do analizowanych problemów matematycznych , a także pomocniczo ich metamatematyczne wypowiedzi (zwłaszcza w przypadku Cantora).

(1) Analizując założenia matematyków odnośnie do źródeł matematycznej wiedzy, weźmiemy pod uwagę podstawy ich analizowanych prac, tj. odniesienia do obiektów podstawowych dla ich matematycznych teorii (u Cantora były to liczby wymierne oraz zbiory, natomiast u Dedekinda liczby wymierne, ale również własność ciągłości, a także elementy zbiorów,tzw. przedmioty myślenia i odwzorowania). U Cantora wskażemy na zgodność w tym aspekcie z jego deklaracjami, kiedy odrzucał on intuicję, a matematyczną wiedzę traktował jako daną umysłowi *a priori* (przynajmniej w samych podstawach). U Dedekinda zaś rozpoznamy szersze założenia o źródłach matematycznej wiedzy – odwoływał się on u podstaw również do intuicji związanych geometryczną własnością ciągłości, jaką się w perspektywie historycznej posługiwano, a także włączył do matematycznej teorii niezdefiniowane, pierwotne pojęcie rzeczy (*Dingen*) – przedmiotu myślenia.

(2) Próbując zrekonstruować stanowiska obydwu matematyków w zakresie założeń odnośnie do celowości czy stosowalności (jako elementu celowości) rozwoju matematycznej wiedzy w zakresie podstaw, w dużej mierze skupimy się na teorii mnogości. W przypadku Cantora przedstawimy jego bezpośrednie komentarze dotyczące możliwości zastosowań teorii mnogości również poza matematyką, jak również przywołamy jego podejście do redukcji teoriomnogościowej w samej matematyce. Wskażemy również fakt, iż większość swoich naukowych wysiłków skupił Cantor na rozwijaniu teorii mnogości jako teorii, która sama w sobie jest warta rozwijania, ze względu na to, iż dotyczy – wprowadzonej przez niego –

nieskończoności aktualnej. W przypadku Dedekinda przede wszystkim wskazana zostanie jego pełna, konsekwentna redukcja teoriomnogościowa arytmetyki liczb naturalnych *N*. Dodatkowo, przedstawione zostanie jego stanowisko na temat jego uściślenia podstaw matematyki przy pomocy teorii mnogości, a także zakres prac, które poświęcił bezpośredniemu omawianiu podstaw matematyki, w tym teorii mnogości – były to zaledwie dwa dzieła – skąd wniosek, że traktował teorię mnogości bardziej jako narzędzie niż dziedzinę przeznaczoną do rozwijania.

(3) Biorąc pod uwagę powyższe, zostanie również zbadany ogląd matematyczny obydwu matematyków w zakresie podstaw matematyki, tj. sposób ujmowania problemów, obiektów i związków między nimi. Przeanalizowane tu zostaną szczegółowo obydwie konstrukcje zbioru liczb rzeczywistych w aspekcie podstawowej struktury relacyjnej, a także – w przypadku Cantora – przybliżony opis jego zetknięcia i prac związanych z Hipotezą Kontinuum, tj. z kwestią różnoliczności/nierównoliczności zbiorów (N i R). Natomiast w przypadku Dedekinda, omówione zostaną podane przez niego trzy wersje twierdzenia o indukcji zupełnej i ich znaczenie dla redukcji teoriomnogościowej.

6.1 Przedmatematyczne założenia odnośnie do źródła wiedzy matematycznej

W niniejszym podrozdziale przeanalizujemy podejście Cantora i Dedekinda do źródeł matematycznej wiedzy. W tym celu weźmiemy pod uwagę podstawy ich analizowanych prac, tj. odniesienia do obiektów podstawowych w obrębie ich matematycznych teorii (u Cantora były to liczby wymierne oraz zbiory, natomiast u Dedekinda liczby wymierne z własnością ciągłości, a także elementy zbiorów – tzw. przedmioty myślenia i odwzorowania). U Cantora wskażemy na zgodność w tym aspekcie z jego deklaracjami, w których odrzucał on intuicję, a wiedzę matematyczną traktował jako daną umysłowi *a priori* (przynajmniej w samych podstawach). U Dedekinda zaś rozpoznamy szersze założenia o źródłach matematycznej wiedzy – odwoływał się on u podstaw również do intuicji związanych geometryczną własnością ciągłości, jaką się w perspektywie historycznej posługiwano, a także włączył do matematycznej teorii niezdefiniowane pojęcie rzeczy (*Dingen*) – przedmiotu myślenia.

Przedzałożenia Cantora

W poprzednich analizach widoczne było, że Cantor był negatywnie nastawiony do intuicyjnych założeń przyjmowanych nie tylko w matematyce, ale również w fizyce czy w naukach przyrodniczych[742]. Jednakże o ile do samej matematyki nie dopuszczał on stosowania wiedzy płynącej z doświadczenia, o tyle wiedzę otrzymaną w matematyce stosował nawet w naukach przyrodniczych.

Według Cantora konieczne było na przykład przyjęcie dwóch hipotez odnośnie do rzeczywistości fizycznej:

1. zbiór cząsteczek materialnych jest nieskończony,

2. atomy – cząsteczki – posiadają miarę[743].

Przyjęcie tych hipotez sprawiało, iż można było do zjawisk fizycznych i przyrodniczych zastosować zbudowaną przez Cantora teorię mnogości[744].

Interesująca jest asymetria w jego podejściu: zauważał możliwe połączenie między matematyką, daną niejako apriorycznie umysłowi, a światem zewnętrznym, ale na odwrót już takiego połączenia nie dopuszczał. Wydaje się, że taka postawa doskonale pasuje do deklarowanej platońskiej filozofii matematyki, według której idee matematyczne istniały w świecie zewnętrznym (*Außenwelt*), a umysł matematyka jedynie je odkrywał, budząc do życia pojęcia poprzez proces definiowania.

Jednakże założenia te nie tłumaczą w pełni owej niekonsekwencji – jeśli matematyczne prawa istniałyby w świecie transsubiektywnym, a do tego świata zaliczał Cantor również świat przyrody, to jaką można byłoby mieć pewność, że prawidłowo je odkrywa (że istnieje pełnoprawne połączenie między światem intersubiektywnym, w jakim definiował matematyczne pojęcia, a światem intersubiektywnym, w jakim matematyczne byty istniały według niego obiektywnie), albo że prawa te nie są wpisane w przyrodę (w takim przypadku korzystanie z doświadczenia w matematyce nie byłoby błędem).

Powyżej opisane podejście do świata zewnętrznego i do teorii mnogości, można potwierdzić, analizując podejście do Hipotezy Kontinuum, jak i do kwestii wielkości

---

[742] G. Cantor, *Uber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnnten stetigen Raume Gn. Zweite Mitteilung (Acta Mathematica 7, 105-124)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1885, 275.

[743] W świetle współczesnej wiedzy wiadomo, że oba te założenia nie odpowiadają naszej wiedzy o rzeczywistości fizycznej. Por. np. Z. Strugalski, *O zasadzie nieoznaczoności Wernera Heisenberga*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 24, (1979) nr 2, 355–366.

[744] J. Dadaczyński, *Georg Cantor i idea jedności nauki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 44, (2009), 88.

nieskończenie małych[745]. Cantor podążał bardziej za swoim przekonaniem (podporządkowanym teorii mnogości lub odziedziczonym) niż za strukturalnym rozumowaniem. W przypadku przekonania dotyczącego Hipotezy Kontinuum, chodziło o intuicję wypracowaną w ramach matematycznej metodologii (odkrycie nierównoliczności zbiorów było jak najbardziej zawarte w obrębie środków i znaczeń matematycznych). Pozamatematyczne pobudki jego postępowania widoczne były w uporze w podejmowaniu prób udowadniania owej hipotezy. W przypadku wielkości aktualnie nieskończenie małych można częściowo wytłumaczyć jego postawę panującym ówcześnie paradygmatem oraz podejściem wynikającym z pewnego przyzwyczajenia, polegającego na uwzględnianiu jedynie nieskończenie małych zmiennych. Lecz w ich przypadku pozamatematyczność postępowania tłumaczymy tym, że Cantor podejmował próby dowodów, żeby wykazać, iż nie mają prawa bytu w kontekście całej matematyki.

Konsekwencją takiego podejścia do źródeł matematycznej wiedzy, polegającego na uznawaniu bezkrytycznie tego, co mentalnie już poznane, było dość bezkrytyczne „przejmowanie" przez Cantora podstawowych elementów matematyki. Nie zadawał on pytań o zasadność i kontekst wybranych, przejętych obiektów, pojęć czy przekonań, tak jak to robił Dedekind (np. wobec konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych). Sama jego konstrukcja R była analogiczna do tej, jaką podał Karl Weierstrass czy opisał wcześniej Charles Méray. Zbiór liczb wymiernych traktował jako pierwotny i podstawowy względem rozbudowanego zbioru R. Jego postawa wobec zbioru liczb aktualnie nieskończenie małych – jak wspomnieliśmy wcześniej – również została przejęta bez poważniejszej refleksji nad ich związkiem z innymi matematycznymi pojęciami i obiektami. Również w świetle ogólnych uwag Cantora o możliwości redukcji arytmetyki liczb naturalnych (i matematyki w ogóle) do teorii mnogości należy wskazać, iż oparł się on prawdopodobnie na pomyśle Fregego, co częściowo skłoniło go do zauważenia i dość radykalnego poparcia takiej ogólnej możliwości.

Innym przykładem jest przypadek przejęcia przez Cantora od Weierstrassa pojęcia[746] „punktu skupienia" zbioru. Wychodząc od „sfery pojęciowej" liczb rzeczywistych, rozważał dowolne zbiory P, tzw. „zbiory punktów"[747]. Punktem skupienia zbioru P, według Cantora

[745] Nie należy ich mylić ze zmiennymi wielkościami nieskończenie małymi, zwłaszcza w przypadku Cantora, który je radykalnie rozróżniał.

[746] J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory...*, *dz. cyt.*

[747] Tzw. „Punktmenge". G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 98.

(przy założeniu, że zbiór był nieskończony), była taka liczba rzeczywista *r*, że każde jej otoczenie[748] zawierało punkty ze zbioru P[749]. Pojęcie punktu skupienia zostało wykorzystywane do definicji zbiorów pochodnych, miało charakter raczej topologiczny niż geometryczny czy arytmetyczny. Pojęcie m.in. otoczenia punktu pociąga za sobą np. pojęcie wnętrza czy domknięcia danego, otaczającego konkretny punkt, zbioru[750]. Pojęcia te służą do ogólnego opisywania zbiorów. Fakt, iż dane dwa zbiory mają tożsame własności topologiczne, nie jest sprzeczny z istnieniem różnic np. geometrycznych między tymi samymi zbiorami[751].

Warto zastanowić się nad tym, jakie filozoficzne założenia mogły kształtować taką postawę u matematyka z Halle. Mogło to być na przykład przekonanie, iż przedmioty matematyczne, a wręcz cała matematyczna rzeczywistość są odkrywane[752], mimo iż w opracowanej propozycji Dadaczyńskiego, który przypisuje Cantorowi quasi-nominalizm (tj. operowanie w praktyce matematycznej samymi pojęciami), mogłoby się zbiegać – jak wspomnieliśmy – z deklarowanymi przez niego założeniami o realizmie obiektów

---

[748] Definicja otoczenia według Cantora: *„Otoczenie punktu jest tutaj rozumiane jako dowolny przedział, który zawiera punkt w swoim wnętrzu"*. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 32. *„*Unter Umgebung eines Punktes sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt in seinem Innern hat*"*. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)*..., *dz. cyt.*, 98.

[749] Por. *„*Unter einem Grenzpunkt einer Punktmenge P versteche ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daβ in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus *P* sich befinden, wobei es vorkommen kann, daβ er auβerdem selbst zu der Menge gehört*"*. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)*..., *dz. cyt.*, 98. Polskie, dosłowne tłumaczenie brzmi następująco: „jako punkt skupienia pewnego zbioru punktów *P* rozumiem punkt prostej o takiej własności, że w dowolnym otoczeniu tego punktu znajduje się nieskończenie wiele punktów z *P*, przy czym może się zdarzyć, że on sam należy do zbioru*"*. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 32.

[750] *Wnętrze* danego zbioru A jest – najogólniej mówiąc – współcześnie definiowane w topologii jako maksymalny zbiór otwarty zawierający się w tym zbiorze A; natomiast *domknięcie* danego zbioru A jest minimalnym zbiorem domkniętym zawierającym zbiór A. Jeśli zbiór A jest zbiorem domkniętym, to jego *domknięcie* jest zbiorem z nim tożsamym, lub – innymi słowy – składa się z jego *wnętrza* i *brzegu*. Przy czym *brzeg* to zbiór punktów a, w których otoczeniach znajdują się zarówno punkty należące do zbioru A, jak nienależące do zbioru A.

[751] Mioduszewski podaje prosty przykład, który może dobrze zilustrować owe różnice pomiędzy właściwościami topologicznymi a innymi, bardziej szczegółowymi (w tym przypadku geometrycznymi). W rozumowaniu Eulera, dotyczącym problemu mostów królewieckich (ogólnie rzecz biorąc, chodziło o pytanie, czy można w ten sposób przejść przez wszystkie mosty prowadzące na pewną wyspę w Królewcu, rozmieszczone w dany sposób na opływającej wyspę rzece, aby przez każdy z mostów przejść tylko jeden raz), nie były brane pod uwagę takie cechy geometryczne jak np. długość łuków pomiędzy węzłami czy ich zakrzywienie. Istotne było jedynie ich przecinanie się lub nie. Problem ten Euler zaliczył do działu geometrii, który nazwał geometrią położenia (*geometria situs*). Nazwa topologii została użyta dopiero w 1847 roku przez Listinga, jako greckie brzmienie określenia nowego działu – *analysis situs*. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni Euklidesowych*, Katowice 1994, 14–15.

[752] Por. z propozycją quasi-nominalizmu Dadaczyńskiego: J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*..., *dz. cyt.*

matematycznych. Taka perspektywa mogłaby dopuszczać w praktyce matematycznej pewien rodzaj naoczności (intuicji), odtwarzanej w umyśle Cantora jako treści przejmowanych pojęć[753].

Niemniej jednak to, co najistotniejsze w tym podrozdziale, to fakt, iż można podejście matematyka z Halle wytłumaczyć deklaracją, że źródłem matematycznej wiedzy był zewnętrzny świat idei, a w praktyce matematycznej sam umysł, w jakiś sposób (być może przy pomocy pewnego rodzaju naoczności) definiujący pojęcia odpowiadające ideom. Cantor ddrzucał tym samym udział jakiegokolwiek doświadczenia w powstawaniu i rozwoju matematycznej wiedzy, jednocześnie uważając istniejące pojęcia za posiadające wystarczająco określony kontekst i znaczenie.

Rola przedzałożeń u Dedekind

Zastanawiając się nad tym, jak Dedekind postrzegał źródło matematycznej wiedzy, najpierw wypada wspomnieć o najwcześniejszym etapie jego zainteresowania teorią mnogości czy raczej jej wybiórczymi narzędziami.

Wspomina się, że Dedekind z różnych względów, wcześniej od Cantora zajął się teorią mnogości[754], nie w sposób systematyzujący samą teorię zbiorów, ale w kontekście wykorzystania jej podstawowych pojęć i struktur. Jednym z przykładów tej działalności matematyka ma być jego dzieło z 1871 roku[755], a więc wyprzedzające pierwsze, formalne kroki Cantora w dziedzinie teorii mnogości[756]. Całą teorię ideałów, którą rozwijał[757] w ślad za Ernstem Kummerem oraz Leopoldem Kroneckerem, opierał na pojęciach dotyczących zbiorów. Sam tłumaczył, że ideały[758] są według niego podobnie jak liczby rzeczywiste –

[753] Z intuicją matematyczną, jest związana wizualizacja, wyobraźnia matematyczna. Myślenie wizualne spełnia wiele funkcji w procesie poznania matematycznego. Por. np. M. Sochański, *Wizualizacje w poznaniu matematycznym a kategoria intuicji przestrzennej*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 21, (2013) nr 1, 153–164.

[754] J. Ferreirós, *On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*..., *dz. cyt.*, 346.

[755] R. Dedekind, *Über die Komposition der binären quadratischen Formen*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1871, 223–261.

[756] Mowa o pracy Cantora z 1872 roku.

[757] R. Dedekind, *Über die Komposition der binären quadratischen Formen*..., *dz. cyt.*; R. Dedekind, *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen (Supplement XI von P. G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3 Aufl., 515-530)*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1879, 297–315.

[758] *Ideał pierścienia R* jest we współczesnej matematyce definiowany jako podzbiór *I* pierścienia *R*, który ma następujące własności:

a. I jest podgrupą, addytywnej podgrupy pierścienia R;

b. $(\gamma \in R \wedge \alpha \in I)$ => $(\gamma\alpha \in I)$;

c. $(\gamma \in R \wedge \alpha \in I)$ => $(\alpha\gamma \in I)$.

Pierścień natomiast jest definiowany jako zbiór elementów wraz z odpowiednimi działaniami (addytywnym i multiplikatywnym), oraz elementem odwrotnym względem działania addytywnego. Przy czym struktura ta musi spełniać następujące warunki:

1. Struktura (R,+,0) jest grupą abelową, tj.:
   a. $\forall a,b,c \in R$: $a+(b+c)=(a+b)+c$;
   b. $\forall a \in R$: $a+0=a$;
   c. $\forall a \in R\ \exists b \in R$: $a+b=0$;
   d. $\forall a,b \in R$: $a+b=b+a$.
2. Struktura (R,*) jest półgrupą:
   a. $\forall a,b,c \in R$: $a*(b*c)=(a*b)*c$.
3. Działanie addytywne jest rozdzielne względem działania multiplikatywnego:
   a. $\forall a,b,c \in R$: $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$;
   b. $\forall a,b,c \in R$: $(a+b)*c=(a*c)+(b*c)$.

Oczywiście, jeśli *pierścień* jest *przemienny*, oba warunki rozdzielności działań są równoważne (działanie multiplikatywne jest wtedy przemienne). Dodatkowo pierścień może posiadać element neutralny względem działania multiplikatywnego (co nie oznacza istnienia elementów odwrotnych dla elementów zbioru, względęm działania multiplikatywnego), nazywany jest wtedy *pierścieniem z jedynką*.

Pojęcie czy raczej struktura pierścienia w algebrze (tak jak i inne określane tam struktury) spełnia funkcję bardzo ogólnej charakterystyki zbioru, w którym są określone pewne działania, przy czym zbiór może być złożony z dowolnych elementów, tak samo działania również mogą być określone w dowolny sposób (choć jedno musi spełniać warunek addytywności, drugie multiplikatywności – działanie addytywne jest rozdzielne względem działania multiplikatywnego). Jedynym warunkiem takiej struktury (tj. zbioru elementów z określonymi na nich działaniami) jest to, żeby na elementach tego zbioru dało się wykonywać działania oraz żeby miało to matematyczny sens. Oczywiście należy pamiętać, że abstrakcyjna charakterystyka algebraiczna bierze swój początek w arytmetyce, tj. w opisywaniu zbiorów liczb – naturalnych, całkowitych, rzeczywistych itd., oraz dobrze znanych działań dodawania i mnożenia, wraz z odpowiednimi elementami neutralnymi 0 i 1.

obiektami arytmetycznymi[759]. Stąd – jak uważał – definicje liczb i ideałów są do siebie podobne – a więc można wykorzystać pojęcie zbioru do definiowania ideałów, tak jak później to uczynił przy definiowaniu zbioru liczb rzeczywistych.

Wobec powyższych kwestii zauważamy, iż strukturalistyczno-teoriomnogościowe podejście Dedekinda stanowiło podstawę nie tylko dla opracowywania podstaw matematyki (jak w przypadku modeli liczbowych). Było również podstawą jego postrzegania całej matematyki – podstawową ontologię matematyki stanowiły zbiory i struktury z nich tworzone. Rodzi to skojarzenia z pitagorejską wiarą w to, że świat jest stworzony z elementarnych cząstek. Jednak w przypadku Dedekinda obserwujemy swoisty, matematyczny „atomizm": owe elementarne cząstki ograniczają się do tworzenia matematycznych struktur. Niemniej jednak mamy do czynienia w jego praktyce matematycznej z pewnym odwołaniem się do pierwotnych i tych samych pojęć teoriomnogościowych (a według niektórych – nawet teoriokategorycznych). Zwracamy uwagę na możliwość intuicyjnego odniesienia się przez Dedekinda do tak prostych obiektów u podstaw matematycznych teorii.

Chociaż niektórzy wskazują na podobieństwa między Cantorem a Dedekindem[760], to w przypadku założeń odnośnie do źródła matematycznej wiedzy należy wskazać różnicę. Otóż w porównaniu do Cantora, który całkowicie odrzucał wiedzę płynącą z doświadczenia (w tym jakąkolwiek intuicję), Dedekind nie unikał (choć nie tłumaczył) prostych, podstawowych odwołań do intuicji czy do umysłowego oglądu podstaw opracowywanych problemów[761]. Można to potwierdzić przykładem: w konstruowaniu definicji własności ciągłości oparł się on na „wrażeniu umysłowym". Owo „wrażenie" ciągłości zaczerpnięte z geometrycznej prostej, w szeroko pojętym sensie mogło się odnosić do relacji umysł–świat zewnętrzny i mogło być akceptacją tego, że matematyczne wzorce są „zaczerpnięte" z pewnego rodzaju doświadczeń – choćby poprzez naoczność czasoprzestrzeni, jak u Kanta.

Formalna definicja ciągłości nie jest tylko intuicyjna ani nie jest tylko umysłowym wrażeniem. Ale zakładamy, że owo umysłowe wrażenie było częścią procesu umysłowego, jaki doprowadził do stworzenia definicji (definicja ta jest możliwa do graficznego przedstawienia

[759] R. Dedekind, *Sur la théorie des nombres entiers algébriques (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, XI (1877): 278–293)*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1930, 268–269.

[760] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*..., *dz. cyt.*

[761] Można traktować Dedekinda „świat myśli", jako rodzaj rzeczywistości.

na prostej rzeczywistej). Nie chodziło o ujęcie wizualne całego zbioru ciągłego, co według Marcusa Giaquinto jest niemożliwe[762], ale o ujęcie lokalnego przekroju – tj. o założenie, że w każdym miejscu „prostej" (zbioru ciągłego), w każdym jej „przekroju" znajdujemy zawsze dokładnie jeden, i tylko jeden punkt (liczbę). Zauważmy, że Dedekind nie określił, jak punkty w zbiorze ciągłym się łączą ze sobą, a jedynie opisał relację między zbiorami, powstałymi poprzez przekrój (każdy element jednego zbioru jest mniejszy od każdego elementu drugiego zbioru, przy czym punkt-liczba otrzymany w wyniku przekroju był największym elementem zbioru pierwszego oraz najmniejszym elementem zbioru drugiego).

Takie odniesienia Dedekind czynił nie tylko w przypadku kwestii pojęcia ciągłości w opracowaniu problemu niewymierności, ale również co do podstaw teorii mnogości oraz zbioru nieskończonego. Dedekind przyjął jako podstawowe elementy swojej teorii mnogości pewne przedmioty myślenia – rzeczy (*Dingen*) – będące uzasadnieniem dla elementów zbioru i samych zbiorów.

Dlatego też stosunek Dedekinda do tradycji kantowskiej nie jest jasny. Na podstawie tego, co zostało przeanalizowane, można uznać, iż Dedekind, odwołując się do swoich „wrażeń umysłowych", nakładał na wybrane matematyczne przedmioty – może nie tyle formę apriorycznej naoczności czasu i przestrzeni, na bazie której miały być tworzone według Kanta – co raczej bardziej ogólną formę intuicyjnej percepcji, pozwalającą na świadomy ogląd matematycznych obiektów (poprzez naturalną zdolność umysłu człowieka lub podnoszone w XIX wieku przez logicystów doniosłe prawo myśli). Nie rozpatrywał jednak Dedekind połączeń czy genezy tej zdolności w kontekście doświadczeń, ogólnie pojętego „świata zewnętrznego".

Ostatecznie, pomimo iż Dedekinda uważa się za bardziej formalistycznie nastawionego, dalszego od intuicji, niż Cantora, to jednak właśnie Dedekind w sposób spójny i uporządkowany, sięga w umyśle po pewnego rodzaju doświadczenia. Tak jest w przypadku podstaw teorii mnogości, jak i w przypadku ciągłości prostej geometrycznej. Wiedza matematyczna w praktyce Dedekinda jest konstruowana przez umysł człowieka, ale ten ma prawo odwoływać się do pewnego rodzaju podstawowych naoczności, aby na ich podstawie konstruować tę wiedzę.

[762] M. Giaquinto, *Cognition of Structure...*, *dz. cyt.*

6.2 Celowość i wykorzystywanie matematycznej wiedzy

W niniejszym podrozdziale wskażemy na różnice między Cantorem i Dedekindem odnośnie do celowości i zakresu stosowalności wiedzy matematycznej. Próbując zrekonstruować stanowiska obydwu matematyków co do założeń o celowości rozwoju matematycznej wiedzy w zakresie podstaw, w dużej mierze skupimy się na teorii mnogości. W przypadku Cantora przedstawimy pomocniczo jego bezpośrednie komentarze o możliwości zastosowań teorii mnogości również poza matematyką, jak również przywołamy jego podejście do redukcji teoriomnogościowej w samej matematyce. Wskażemy również fakt, iż większość swoich naukowych wysiłków skupił Cantor na rozwijaniu teorii mnogości jako teorii, która sama w sobie jest warta rozwijania, ze względu na to, iż dotyczy – wprowadzonej przez niego – nieskończoności aktualnej. W przypadku Dedekinda przede wszystkim wskazana zostanie jego pełna, konsekwentna redukcja teoriomnogościowa arytmetyki liczb naturalnych *N*. Dodatkowo, przedstawione zostanie jego stanowisko na temat jego celu uściślenia podstaw matematyki przy pomocy teorii mnogości, a także zwrócimy uwagę na zakres prac, jakie poświęcił bezpośredniemu omawianiu podstaw matematyki, w tym teorii mnogości.

Cel badań matematycznych w ujęciu Cantora

Jak zaznaczyliśmy wcześniej, Cantor z założenia nie uwzględniał w matematyce wiedzy pochodzącej z doświadczenia ani intuicji. Jednakże wiedzę otrzymaną na podstawie opracowanej przez siebie teorii mnogości stosował do świata zewnętrznego, do świata przyrody. Można jednak zauważyć, że nie traktował jej tylko jako narzędzia do objaśniania tego świata. Wydaje się, że Cantor traktował teorię mnogości jako teorię, stanowiącą samą w sobie wartość i cel. Widać to na przykładzie jego stosunku do nieskończoności aktualnej – zarówno wobec wielkości nieskończenie dużych, jak i małych – choć względem każdej z nich miał Cantor odpowiednio odmienne podejście, oraz na przykładzie jego stosunku do Hipotezy Kontinuum.

Jeśli chodzi o stosowanie teorii mnogości w świecie zewnętrznym, można bliżej się przyjrzeć następującej kwestii. Matematyk z Halle przyjmował (pochodzącą z ówczesnej fizyki) dychotomię w dziedzinie monad: dzielił je na materialne oraz eteryczne[763]. Podział ten umożliwiał zastosowanie zaawansowanych wyników otrzymanych w ramach teorii mnogości.

---

[763] G. Cantor, *Uber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnnten stetigen Raume Gn. Zweite Mitteilung (Acta Mathematica 7, 105-124)...*, *dz. cyt.*, 275–276.

Liczba wszystkich monad materialnych wszechświata, a także dowolnego ciała miała być nieskończona i policzalna, natomiast liczba wszystkich monad eterycznych wszechświata oraz dowolnego ciała miała być continuum[764]. Przyjąwszy powyższe założenie, Cantor mógł wykonywać na owych „fizycznych" zbiorach operacje teoriomnogościowe i dokonywać ich dekompozycji[765]. W konsekwencji twierdził on, że własności mnogościowo-topologiczne składników dekomponowanych zbiorów (związane m.in. z ich mocami) lub kombinacji tychże składników pozwolą na głębsze zbadanie takich zjawisk jak światło, ciepło, elektryczność, magnetyzm. Co więcej, obliczenia matematyczne według Cantora miały pozwolić również na uchwycenie różnic w składzie i własnościach chemicznych poszczególnych ciał[766]. W konsekwencji stosowania swojej teorii postulował również tworzenie alternatywnych mechanik, ponieważ według niego badania nad takimi mechanikami mogłyby przynieść nowe i znaczące odkrycia w fizyce[767]. Cantor przyznawał się do tego, że potencjalna możliwość zastosowań idei teorii mnogości była dla niego dużą motywacją w pracy matematyka. Wiele razy odwoływał się również do przykładów z zakresu malarstwa i muzyki, chcąc przedstawić intuicję dotyczącą zastosowań pojęcia typu porządkowego[768].

Widzimy więc silny wpływ wypracowanej przez niego teorii zbiorów na założenia w innych dziedzinach nauki niż matematyka, co może oznaczać, że był z nią jakoś związany. Można tu potwierdzić metodologiczny aspekt działalności matematyka z Halle, polegający na uogólnianiu dokonanych przez niego odkryć na szerszy zakres. Jednakże, jak wcześniej wspomniano, intuicja – zdaniem Cantora – powinna być wyrugowana z fizyki i nauk

[764] J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*..., *dz. cyt.*, 292.

[765] Szczegóły techniczne owej dekompozycji można znaleźć w: J. Dadaczyński, *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora*..., *dz. cyt.*, 140–141 przyp.22. Ogólnie rzecz biorąc, Cantor rozróżnił zbiory ze względu na ich relacje ze zbiorami pochodnymi na: domknięte (jeśli $P' \subset P$), doskonałe (jeśli P'=P) oraz gęste w sobie (jeśli $P \subset P'$). Wprowadził również koherencję ($Pc \equiv P \cap P'$) oraz adherencję ($Pa \equiv P \cap (P - P')$), inherencję ($Pi = Pc^{a}$) i parę innych struktur, dzięku czemu można było np. podzielić zbiór P w następujący sposób: $P \equiv P_1 \cup P_2$, gdzie P_1 i P_2 były zbiorami o porządkach $alef_0$ i $alef_1$.

[766] G. Cantor, *Uber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnnten stetigen Raume Gn. Zweite Mitteilung (Acta Mathematica 7, 105-124)*..., *dz. cyt.*, 276; J. Dadaczyński, *Georg Cantor i idea jedności nauki*..., *dz. cyt.*, 89–90.

[767] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)*..., *dz. cyt.*, 157.

[768] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)*..., *dz. cyt.*, 177.

przyrodniczych[769]. Kwestionował on również intuicyjne postrzeganie czasu i przestrzeni *a priori*[770] oraz był przeciwny determinizmowi[771]. Wydaje się paradoksalne, że Cantor, który sam posługiwał się intuicyjnie matematyką w innych dziedzinach nauki (narzucał postulaty czystej matematyki światu zewnętrznemu, gdzie wiele rzeczy podlega wielu ograniczeniom), jednocześnie postulował odcięcie działalności naukowej od wszelkich intuicji. Można zauważyć pewną zasadę. Cantor był ostrożny w kwestii intuicji czy pewnego oglądu świata zewnętrznego (nawet odnośnie do geometrii), jednak tylko w przypadku korzystania z niej podczas budowania teorii czy założeń naukowych. W stosowaniu teorii matematycznej do – pełnego przecież ograniczeń i niewiadomych – świata zewnętrznego takiej samej ostrożności już nie przejawiał[772].

Kolejnym problemem przybliżającym celowość praktyki matematycznej Cantora jest ogólne odniesienie do możliwości redukcji matematyki (arytmetyki) do teorii mnogości, której jednak bezpośrednio nie przeprowadził. W 1884 roku Cantor napisał artykuł[773], w którym wyraził przypuszczenie o możliwości sprowadzenia (zredukowania) arytmetyki do teorii mnogości. Pomysł opierał się na definiowaniu skończonych liczb naturalnych poprzez liczby porządkowe, a w zasadzie wtedy przez typy porządkowe, gdyż Cantor definiował typy porządkowe tak samo jak porządkowe liczby, z jedną różnicą – jak wskazuje Dadaczyński[774] – zamiast pojęcia „zbioru" używał określenia „pojęcia ogólnego"; gdyby użyć pojęcia zbioru otrzymalibyśmy współczesną definicję liczby porządkowej – tj. typu porządkowego[775].

W swojej definicji Cantor opierał się na tym, iż każdy zbiór, który jest prosto uporządkowany, ma swój określony typ porządkowy, czyli „pojęcie ogólne", obejmujące

---

[769] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)..., dz. cyt.*

[770] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*, 192.

[771] J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite..., dz. cyt.*, 293.

[772] Innymi słowy, Cantor stosował wiedzę matematyczną wobec problemów świata zewnętrznego, jednak ta wiedza, a raczej jej geneza, była u niego oderwana od Aussenwelt, i niepochodząca w jego mniemaniu z tego świata.

[773] Choć napisał ten artykuł w 1884 roku, to został on dopiero opublikowany w roku 1970. Por. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung - An unpublished paper by Georg Cantor*, „Acta Mathematica" 89, (1970) nr 124, 65–107.

[774] J. Dadaczyński, *Georg Cantor i idea jedności nauki..., dz. cyt.*, 86.

[775] Czyli obiektu wyabstrahowanego od konkretów, związanego z tym porządkiem o tyle, o ile jest ten obiekt wspólny dla wszystkich porządków z nim izomorficznych.

również wszystkie inne zbiory „tak samo uporządkowane”[776]. Matematyk z Halle twierdził, iż skończone liczby naturalne są niczym innym, jak zdefiniowanymi typami porządkowymi skończonych zbiorów. Ujął to następująco: „Typy zbiorów skończonych prosto uporządkowanych to nic innego jak skończone liczby całkowite [chodzi o liczby naturalne – przyp. K.T.], o znakach: 1, 2, 3, ..., *v*, ...”[777].

Niektórzy wskazują na przekonanie, iż znalazł on „modele dla skończonych liczb naturalnych w teorii typów porządkowych”[778]. Cantor poszedł o krok dalej. Wyciągnął daleko idące wnioski o redukowalności całej matematyki (a nie tylko arytmetyki liczb naturalnych) do teorii mnogości. Ujął to następująco:

> „Ta [ogólna teoria typów – K.T.] stanowi ważną i dużą część czystej teorii mnogości [Théorie des ensembles – wyrażenie w języku francuskim, oznaczające dokładnie teorię mnogości – przyp. K.T.], w tym czystej matematyki, ponieważ ta ostatnia moim zdaniem jest niczym innym jak czystą teorią mnogości”[779].

Można więc powiedzieć, że Cantor wypowiedział się ogólnie (omijając formalną dedukcję) na temat teoriomnogościowej redukcji matematyki. Jednakże nie zrobił tego w taki sposób, w jaki Dedekind przedstawił tę kwestię w swojej pracy z 1888 roku.

---

[776] Por. „ten typ jest ogólnym pojęciem, które wynika z *M* jeśli abstrahujemy go od natury jego elementów zachowując kolejność ich poprzedzania, tak że z nich wychodzą jednostki, które stoją wobec siebie w określonej relacji poprzedzania” . G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (Principien einer Theorie der Ordnungstypen)*, tłum. P. E. B. Jourdain, New York 1915; G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung - An unpublished paper by Georg Cantor...*, *dz. cyt.*, 87.

[777] „Jede einfach geordnete Menge hat nun einen bestimmten Ordnungstypus oder, wie ich mich auch k¨urzer ausdr¨ucken will, einen bestimmten Typus; darunter verstehe ich denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchem samtliche der gegebenen geo- ¨ rdn. Menge ahnliche geordnete Mengen, und nur diese, (folglich auch di ¨ e gegebene geordnete Menge selbst) fallen. Die Typen der endlichen einfach geordneten Mengen sind nichts Anderes, als die endlichen ganzen Zahlen, in Zeichen: 1, 2, 3*, ..., v, ...”,* G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung - An unpublished paper by Georg Cantor...*, *dz. cyt.*, 87.

Należy oczywiście zauważyć, że jego liczby całkowite to nic innego, jak liczby naturalne, gdyż nie uwględnia on liczb całkowitych ujemnych, czasem nawet również zera. Dlatego też w tłumaczeniu rozważań Cantora i w analizie jego teorii pojawiają się w całej niniejszej pracy zamiennie pojęcia liczb naturalnych i całkowitych, choć zawsze w określonym kontekście (tj. pojęcia te mogą być używane zamiennie tylko w kontekście mowy o liczbach całkowitych dodatnich).

[778] J. Dadaczyński, *Georg Cantor i idea jedności nauki...*, *dz. cyt.*, 86–87.

[779] „Sie [die allgemeine Typentheorie – K.T.] bildet einen wichtigen und grossen Theil der reinen Mengelehre (Theorie des ensembles), also auch der reinen Mathematik, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts anders als reine Mengelehre*”,* G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung - An unpublished paper by Georg Cantor...*, *dz. cyt.*, 84.

Jeśli idzie ściśle o redukcjonizm u Cantora, a także o specyficznie rozumiany logicyzm[780], warto zwrócić uwagę na jedną rzecz: można zauważyć zbieżność lub nawet związek przyczynowy między wypowiedziami Fregego i Cantora odnośnie do redukcji teorii liczb oraz całej matematyki do teorii mnogości. Cantor jako jedyny napisał recenzję (w 1885 roku)[781] do pracy Fregego z 1884 roku[782], gdzie Frege przedstawiał pomysł wyprowadzenia teorii liczb z teorii zbiorów. W 1884 roku, w swojej pracy[783] Cantor ogłosił, że matematyka jest „czystą teorią mnogości"[784]. Pamiętajmy, że wiek XIX to w matematyce okres podejmowania prób zarytmetyzowania matematyki, stąd sprowadzenie arytmetyki do teorii mnogości mogło oznaczać naturalną możliwość redukcji całej matematyki do teorii zbiorów[785].

Ostatnią kwestią, o jakiej wspomnimy, jest podejście matematyka z Halle do nieskończoności. Nieskończoność to pojęcie, za którym kryje się nietrywialne zagadnienie zarówno matematyczne, jak i filozoficzne. Propozycje obu matematyków dotyczące konstrukcji liczb rzeczywistych, teorii mnogości, a nawet arytmetyki liczb naturalnych wymagały założenia o istnieniu nieskończoności aktualnej w matematyce[786]. O ile Arystoteles czynił podział na nieskończoność potencjalną i aktualną, to w matematyce nie akceptował tej drugiej[787]. Z perspektywy matematyka, problemem było przez wieki (od starożytności do XIX

---

[780] L. Horsten, *Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*; N. Tennant, *Logicism and Neologicism*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2017.

[781] G. Cantor, *Die Grundlagen der Arithmetik (Deutsche Literaturzeitung, VI. Jahrg. S. 728-729)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1885, 440–443.

[782] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.

[783] G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung - An unpublished paper by Georg Cantor..., dz. cyt.* Choć artykuł został opublikowany w 1970, Cantor napisał go w roku 1884. Por. J. Dadaczyński, *Składowa konceptualistyczna w przedfregowskich podstawach matematyki*, „Studia Philosophiae Christianae" 38, (2002) nr 1, 63.

[784] Przypis 779.

[785] J. Dadaczyński, *Antynomie teoriomnogościowe a powstanie klasycznych kierunków badania podstaw matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 26, (2000), 38–58. Cantor również próbował najpierw arytmetyzować swoją teorię zbiorów. Por. „Nauka orozmaitościach (Mannigfaltigkeitslehre). Tym słowem określam obszerną naukę, której próbowałem dotąd nadać kształt tylko w specjalnej postaci arytmetycznej czy geometrycznej nauki o zbiorach". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)..., dz. cyt.*; tłum: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych..., dz. cyt.*, 157.

[786] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym..., dz. cyt.*, 215.

[787] Np. Arystoteles, *Fizyka*, w: *Arystoteles „Dzieła wszystkie"*, tłum. K. Leśniak, t. II, Warszawa 1990; Arystoteles, *Metafizyka..., dz. cyt.*; J. Gomułka, *Filozofia nauk formalnych i jej związek z koncepcją podmiotu we wczesnym i średnim okresie twórczości Ludwiga Wittgensteina*, Kraków 2016.

stulecia) formalne opisanie tej wielkości. Z perspektywy zaś filozoficznej problemem jest określenie jej ontologii, epistemologii, ale również sama interpretacja jej istnienia. Sprawę komplikuje fakt istnienia nieskończoności odwrotnej – tj. wielkości aktualnie nieskończenie małych. Propozycje analizowanych w niniejszej pracy matematyków burzyły dotychczasowe metafizyczne intuicje odnośnie do znaków liczbowych[788]. Intuicjoniści (jak Kronecker), wprost się nieskończoności aktualnej sprzeciwiali, formaliści – jak pisze Jakub Gomułka – nie oczekiwali istnienia nieskończoności aktualnej, ponieważ nie oczekiwali istnienia niczego[789]. Podejście to wynikało głównie z chęci formalizacji analizy matematycznej, a więc z chęci czystego i uporządkowanego przedstawienia matematycznej struktury, wyabstrahowanej i uzupełnionej w potrzebne założenia[790].

Cantor próbował bronić teoriomnogościowej tezy, w której przypisywał formalnemu znakowi wielkości aktualnie nieskończenie dużej semantyczną treść (wprowadzał pewne *novum*, które mogło być posądzone o kontekst intuicyjny i brak formalizmu)[791]. Chociaż jego platonistyczne deklaracje związane z teorią mnogości (tj. nieskończonością) były główną obroną tego, do czego doszedł na drodze w pełni racjonalnej dedukcji, dzięki metodzie wyodrębniania nowych problemów naukowych, były one – jak wskazywaliśmy – zewnętrzne względem wprowadzonej matematycznej teorii. W związku z tym takie podejście nie było konieczne. Ale można je interpretować jako argument, za pewnym pozamatematycznym przywiązaniem Cantora do tej teorii. Potwierdza to, że była ona dla niego sama w sobie celem, wartym rozwijania.

To samo można zaobserwować na przykładzie jego podejścia do wielkości aktualnie nieskończenie małych oraz Hipotezy Kontinuum. Należy zauważyć, iż Cantor dość mocno

---

[788] K. Rotter, *Gramatyka filozoficzna w dobie sporu o podstawy matematyki. Eseje o drugiej filozofii Wittgensteina*, Opole 2006.

[789] Frege jednak nazywał takie podejście formalistyczne „zafałszowywaniem rzeczywistości". J. Gomułka, *Filozofia nauk formalnych i jej związek z koncepcją podmiotu we wczesnym i średnim okresie twórczości Ludwiga Wittgensteina...*, *dz. cyt.*, 210–212.

[790] Również będące wyabstrahowanymi. Głównie mamy tu na myśli formalizm Hilberta.

[791] Należy podkreślić, że Cantor miał prawo podtrzymywać paradygmat ówczesnej analizy, który wykluczał nieskończenie małe wielkości jako zbyt intuicyjne (czy w ogóle intuicyjne). Wtedy nie było jeszcze formalnie opracowanej teorii systemów niestandardowych. Pierwszy takie prace wykonał Abraham Robinson w 1961: A. Robinson, *Non-standard analysis*, „Proceedings Royal Academy, Amsterdam" 64, (1961), 432–440. Należy też zwrócić uwagę da dodatkową rzecz. Otóż nawet jeśli w problemie nieskończenie małych było coś, co przyciągało na tyle mocno intuicję Cantora, że z nimi walczył (zamiast je np. w jakiś sposób badać i uwzględniać), to poświęcił on naprawdę ogromną ilość czasu i wysiłków, aby do matematyki, mimo oporu środowiska, wprowadzić teorię zbiorów zawierającą nieskończoność aktualną (liczby pozaskończone).

zaangażował się w argumentację przeciwko aktualnie nieskończenie małym wielkościom. Pisał: „Z punktu widzenia czystej analizy arytmetycznej, nie istnieją żadne nieskończenie małe wielkości, lecz [istnieją] zmienne wielkości stające się nieskończenie małymi”[792].

Jednak oprócz tego, że mógł przejąć ówczesne podejście do wymienionych wielkości, sprzeciw względem nich wynikał także z niemożliwości – w jego mniemaniu – pogodzenia ich z koncepcjami związanymi z teorią mnogości. Pisał wszak: „Fakt aktualnie nieskończonych liczb jest zatem tak małą podstawą dla istnienia aktualnie nieskończenie małych wielkości, że wręcz przeciwnie, niemożliwość tych ostatnich można udowodnić za pomocą tych pierwszych”[793].

Jak wiadomo, Cantor oparł swój dowód przeciwko istnieniu nieskończenie małych na dwóch pojęciach: wielkości liniowej oraz liczby porządkowej[794]. Obecnie wykazuje się błędność lub przynajmniej niepełność tego dowodu, a dodatkowo nie są jasne matematyczne motywy jego przeprowadzenia. Stąd wnioskujemy, iż te powody były pozamatematyczne – jak bezkrytyczne przejęcie ówczesnego stanowiska względem nieskończenie małych wielkości oraz intuicyjne przywiązanie do stworzonej przez siebie teorii mnogości.

Kwestia zmagań Cantora z Hipotezą Kontinuum omówiona już została w pracy wcześniej, dlatego tutaj przypomnijmy najważniejsze fakty, aby podkreślić, iż owe usilne, wykraczające poza matematyczne motywacje próby jej rozwiązania miały swoje źródło w tym, że matematyk z Halle traktował teorię mnogości jako cel sam w sobie.

Otóż można stwierdzić, że pierwszy krok do sformułowania Hipotezy Kontinuum był wykonany przez Cantora, gdy analizował rozróżnienie „liczności” zbiorów przeliczalnych oraz

[792] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)..., dz. cyt.*, 156–157; Tłumaczenie: G. Cantor, *O nieskończonych liniowych rozmaitościach punktowych (Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. Mathematische Annalen XX, 113–121. 1882)..., dz. cyt.*

[793] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)..., dz. cyt.*, 408.

[794] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective..., dz. cyt.*; P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes..., dz. cyt.*

nieprzeliczalnych w 1873/1874 roku[795]. Bardziej formalnym krokiem był ten z 1878 roku[796], kiedy przypuścił, że każdy zbiór nieskończony, jest równoliczny albo z *N* albo z *R*. W pracy z 1884 roku[797] Cantor zajął się ponownie próbą udowodnienia Hipotezy Kontinuum. Problem powrócił jeszcze w 1895 roku, kiedy została wprowadzona notacja „alefów", dzięki której można było dokładniej sformułować problem kontinuum[798].

Jak zostało wskazane, Cantor przeciwstawiał nieskończenie małe wielkości wielkościom nieskończenie dużym. Używał też argumentów poza-matematycznych, aby uzasadniać istnienie tych drugich. Reszta omówionych w tym podrozdziale przykładów również przemawia za stwierdzeniem, iż teoria mnogości – która była teorią zbiorów nieskończonych – była dla Cantora celem samym w sobie, ale widział on również celowość wprowadzania jej jako narzędzia do badania i wyjaśniania pozostałych dziedzin wiedzy.

Cel badań w ujęciu Dedekinda

Jak zostało wspomniane, Dedekind wykorzystywał teoriomnogościowe narzędzia i metody jeszcze dużo wcześniej przed rokiem 1888.

Erich Reck zauważa ważną różnicę między podejściem Dedekinda i Kroneckera do problemu algebraicznego[799], który wymagał poszukiwania zastępstwa dla Fundamentalnego Twierdzenia Arytmetyki. Rozwiązał znalazł Ernst Kummer: zaproponował wprowadzenie tzw. „ideal divisors", które – choć rozwiązywały problem matematyczny – nie miały ściśle określonej zasady wprowadzenia oraz zakresu stosowalności (nie mówiąc już o precyzyjniejszym określeniu natury tych obiektów matematycznych). Zarówno Kronecker, jak i Dedekind pracowali później nad tym zagadnieniem. Jak zauważa Reck, różnice między ich pracą były zasadnicze: o ile pierwszy z nich podszedł do problemu w sposób z założenia

[795] Można się odnieść do pracy Cantora z 1874 roku, w której uzyskał formalną pewność (przeprowadził pierwszy dowód) tego, iż zbiór liczb rzeczywistych *R* jest większy/różnoliczny od zbioru liczb naturalnych *N*. Por. G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258–262)..., dz. cyt.*

[796] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)..., dz. cyt.*

[797] G. Cantor, *Cantor, G, 1884, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten (6), „Mathematische Annalen" 23, 453–488 https://doi.org/10.1007/BF01446598 .210–146..., dz. cyt.*

[798] Chodzi o prace z lat 1895/97. G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2, Math. Annalen nr 46 s. 481–512 (1895); nr 49, S. 207–246 (1897); w GA: s. 282–356.

[799] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*

ograniczony – tj. finistycznie i konstruktywistycznie[800], o tyle drugi, zgodnie ze swoim stylem, potraktował problem bardziej abstrakcyjnie i kompleksowo[801]. Dodatkowo, należy zauważyć, że teoria ideału Dedekinda jest takim uogólnieniem teorii liczb idealnych Kummera, że pracę z liczbami zastępuje pracą ze zbiorami. Mamy więc do czynienia z silnym i wyraźnym teoriomnogościowym kontekstem, w jakim Dedekind osadza swoją algebraiczną teorię. Przemawia to za stanowiskiem, że teoria mnogości była dla niego podstawowym narzędziem wyjaśniania matematycznych problemów.

Dodatkowo możemy zauważyć, że to, co u Cantora było pomysłem, wyrażanym w kilku postulatach, dla Dedekinda stało się podstawą budowania arytmetyki liczb naturalnych czy narzędziem wykorzystywanym w innych działach matematyki. Opracowując teorię mnogości, bardzo płynnie przechodzi do modelu liczb naturalnych (o czym więcej w następnym rozdziale). W trakcie opracowywania modelu arytmetyki liczb naturalnych Dedekind omawia np. zasadę indukcji zupełnej (zawierającej np. pojęcie następnika), przez co klaruje się dosyć prosty stosunek między liczbą a zbiorem (czego nie zauważamy u Cantora).

Dedekind przedstawił liczby naturalne[802] w swojej pracy *Was sind und was sollen die Zahlen?* z 1888 roku[803]. Należy zauważyć, że wprowadził arytmetykę liczb naturalnych poprzez wprowadzenie pewnego podstawowego zbioru N (chodzi o zdefiniowany wcześniej zbiór prosto nieskończony), wyróżnionego elementu 1 oraz funkcji następnika (a także warunków, jakie ta funkcja spełnia)[804]. Zbiór N wraz z funkcją jeden-do-jednego $\varphi : N \rightarrow N$

---

[800] Można mówić o pewnym zamierzonym modelu działania, o pewnym założonym schemacie praktyki matematycznej, który wyklucza nieskończoność i „wolne" wytwory ludzkiego umysłu. Metoda Kroneckera skutkowała „teorią dzielników" i rozszerzeniem „teorii form" („theory of forms") Gaussa i Kummera. Por. H.M. Edwards, *The Genesis of Ideal Theory*, „Archive for History of Exact Sciences" 23, (1980), 321–378; H.M. Edwards, *Divisor Theory*, Boston 1990; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics…*, *dz. cyt.*

[801] Wprowadził on po raz pierwszy do matematyki pojęcie ciała algebraicznego (rozważał on pojęcie ciał liczb algebraicznych), a także zastąpił Kummerowskie liczby idealne ideałami (gdzie ideał I pierścienia R jest podzbiorem t.ż. $\forall a, b \in I: a + b \in I, a - b \in I, \forall a \in I, \forall c \in R: a \times c \in I$). H.M. Edwards, *Dedekind's Invention of Ideals*, „Bulletin of the London Mathematical Society" 15, (1983), 8–17, doi: https://doi.org/10.1112/blms/15.1.8; J. Gray, *A History of Abstract Algebra*, w: Berlin 2018; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics…*, *dz. cyt.*

[802] Pytanie tytułowe w jego dziele o liczbach dotyczy w zasadzie nie tylko liczb naturalnych, ale liczb w ogóle (Czym są i czym powinny być liczby? – K.T). To jest dodatkowy aspekt, jaki różni Cantora i Dedekinda w ich podejściu do liczb, w tym liczb naturalnych.

[803] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?…*, *dz. cyt.*

[804] J. Dadaczyński, *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta…*, *dz. cyt.*, 105; D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 15. Należy zauważyć, że liczba n_0, następująca po n jest nazywana jej następnikiem, stąd funkcja φ jest nazywana funkcją następnika.

jest łańcuchem elementu 1. Taki zestaw – jak zauważa Joyce – wystarczy do skonstruowania liczb naturalnych. Można powiedzieć, że w ramach ogólnej teorii zbiorów Dedekind wprowadza tymi definicjami model liczb naturalnych, a definicje te stały się aksjomatami Dedekinda-Peano dla liczb naturalnych (tak je określił sam Peano)[805].

Dedekind – w przeciwieństwie do późniejszego Cantora – nie stawiał sobie jako celu znalezienia jakichkolwiek zastosowań opracowanej teorii matematycznej do innych dziedzin nauki niż matematyka (w tym do wyjaśniania tego, jak funkcjonuje świat zewnętrzny i z czego jest zbudowany). Opracowane teorie stosował jedynie w innych problemach i dziedzinach matematyki (jak np. traktował teorię mnogości).

Główne opracowania koncepcji mnogościowych Cantora i Dedekinda powstawały mniej więcej w tym samym okresie. Różnica między nimi była taka, że u Dedekinda eksplikowanie i stosowanie podstawowej wiedzy z zakresu teorii mnogości miało miejsce dużo wcześniej, przed rokiem 1888, kiedy powstała jego główna praca teoriomnogościowa. Natomiast prace Cantora związane z rozwojem samej teorii mnogości były dość rozciągnięte w czasie – ale na początku dotyczyły samej teorii mnogości, nie zaś jej stosowania. Pracował on nad zagadnieniami od momentu publikacji jego początkowych opracowań z tego zakresu (datowanych, w zależności od interpretacji zawartości na rok 1878 lub 1879, a nawet jeszcze wcześniej – na 1872), aż do końca swojej działalności naukowej. Oczywiście Dedekind po roku 1888 nie zrezygnował z prac, nawiązujących do teorii mnogości, jednak nie były to prace bezpośrednio podejmujące problemy w zakresie tej teorii, lecz podobnie jak przed rokiem 1888 wykorzystujące teoriomnogościowe założenia do opracowywania problemów z zakresu innych dziedzin matematyki.

O ile więc o Cantorze możemy powiedzieć, że traktował teorię mnogości prawie od początku prac jako odrębną dziedzinę i cel badawczy sam w sobie, a następnie również jako narzędzie do pracy w innych dziedzinach wiedzy, tak o Dedekindzie możemy powiedzieć, iż od początku traktował teorię mnogości jako najbardziej fundamentalne narzędzie w matematyce, a nawet jako oryginalną perspektywę, z jakiej opracowywał inne matematyczne problemy.

[805] D.E. Joyce, *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?*,*dz. cyt.*, 15.

6.3 *Dwa style badań matematycznych: Cantora i Dedekinda*

W niniejszym podrozdziale zostaną scharakteryzowane różnice stylów badań matematycznych obu uczonych w zakresie podstaw matematyki: wskażemy istotne różnice w sposobie ujmowania problemów, obiektów i związków między nimi. Pojęcie stylu prowadzenia badań wprowadzamy tutaj, aby opisać charakterystyczne cechy metodologii danego uczonego, decydujące o oryginalności jego badań[806]. W przypadku Cantora i Dedekinda prace badawcze są w dużej mierze porównywalne, o czym traktowały wcześniejsze rozważania w tej rozprawie. Tutaj wrócimy ponownie do niektórych przykładów, które wzbogacimy o nowe, aby ukazać różnice w metodologii obu matematyków. Różnice te są różnego rodzaju i różnej wagi, tworzą jednak istotną charakterystykę ich metodologii. Zatem celowe jest rozważanie zespołów cech wyróżniających metodologie, bo o badaniach decyduje cała zaangażowana metodologia, a nie tylko pojedyncze, innowacyjne rozwiązania. W pojęciu stylu staramy się tutaj uchwycić jedynie najważniejsze różnice między metodologicznymi perspektywami obydwu matematyków, zastrzegając, że charakterystyka stylu może nie być kompletna, bo zagadnienie to jest materiałem na odrębną rozprawę. Mimo to ukazanie zespołów najważniejszych charakterystycznych różnic powinno być wystarczające do uzasadnienie postawionej tutaj tezy.

Przeanalizowane tutaj zostaną obydwie konstrukcje zbioru liczb rzeczywistych w aspekcie podstawowej struktury relacyjnej, a także – w przypadku Cantora – przybliżony opis jego zetknięcia i prac związanych z Hipotezą Kontinuum, tj. z kwestią różnoliczności/nierównoliczności zbiorów (N i R); natomiast w przypadku Dedekinda, omówione zostaną podane przez niego trzy wersje twierdzenia o indukcji zupełnej i ich znaczenie dla redukcji teoriomnogościowej.

Jeśli chodzi o podstawową strukturę relacyjną konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych, u Cantora wskażemy relację kongruencji, określoną na ciągach „tworzących" liczby, nie zaś na samych liczbach rzeczywistych. U Dedekinda taką relacją była relacja dwóch zbiorów, złożonych z liczb rzeczywistych, wyznaczanych jednoznacznie przez przekrój Dedekinda – była więc to relacja ograniczona do poziomu samych liczb rzeczywistych. Wskażemy, że Cantor nie potrafił na problemy matematyczne popatrzeć z perspektywy w pełni strukturalnej, o czym świadczy niezupełne wykluczenie nieskończenie małych z jego konstrukcji R, przy jego negatywnym do nich podejściu. Natomiast Dedekind, chociaż ograniczał brane pod uwagę

[806] Więcej w: P. Mancosu, *Mathematical Style*..., *dz. cyt.*

kwestie, potrafił skutecznie opracować w pełni strukturę R, o czym świadczy jej „odporność" na wielkości aktualnie nieskończenie małe. Będziemy wskazywać, iż u Cantora ogląd problemu konstrukcji R sytuował się wewnątrz struktury R, natomiast ogląd tego problemu przez Dedekinda sytuował się od zewnątrz na tej struktury.

Jeśli chodzi o przykłady dotyczące bezpośrednio teorii mnogości, które potwierdzają wymienioną różnicę pomiędzy oglądem matematyki Cantora i Dedekinda, w kontekście tego pierwszego zostanie wskazane, że sam fakt odkrycia różnic w zbiorach nieskończonych zaskoczył go. W konsekwencji Cantor poświęcił następnie część swoich wysiłków badawczych na ulepszanie tego dowodu. Istotne jest tu, że problem odkrył, badając właściwości zbiorów nieskończonych, a więc bezpośrednio w trakcie prac nad teorią mnogości (wewnątrz niej), po czym rozwijał go również wewnątrz tej teorii. Wobec trzech wersji twierdzenia o indukcji zupełnej Dedekinda wskazane zostanie, że wszystkie te wersje, opracowane zostały w ścisłym kontekście teoriomnogościowego modelu arytmetyki liczb naturalnych. Dwie pierwsze wersje były przedstawione w oderwaniu od arytmetycznych intuicji, natomiast ostatnia nawiązywała bezpośrednio do N. Miało to na celu zdefiniowanie liczb naturalnych poprzez model teoriomnogościowy.

Różnica perspektyw obu matematyków

Zanim przejdziemy do analizowania przykładów, scharakteryzujmy pokrótce pojęcie perspektywy, jakie zamierzamy w niniejszym rozdziale opisywać.

Chodzi o takie uchwytywanie kwestii matematycznych przez matematyków, jakie Skowron opisuje przy pomocy metafory zamku u Arthura Schopenhauera. Owa budowla może być zwiedzana i doświadczana na różne sposoby, z różnych perspektyw[807]. Będziemy chcieli na podstawie analizy opisanych wcześniej problemów spróbować zrekonstruować rodzaj perspektywy, jaką Cantor i Dedekind posiadali względem struktury zbioru liczb rzeczywistych, jak i względem teorii mnogości. Zwłaszcza rodzaj perspektywy będzie zależał tak od punktu wyjścia (założeń) rozważań, jak i od celów tych rozważań. Założenia i cele matematyczne tworzą – jak wcześniej wspominaliśmy – pewne intencje towarzyszące i kształtujące samą praktykę matematyczną, stąd potrzebne będzie psychologiczne dookreślenie pojęcia intencjonalności (oznaczające zbiór tych intencji, rozumianych nieodłącznie od nakierowania

[807] A. Schopenhauer, *Świat jako wola i przedstawienie*, tłum. J. Garewicz, Warszawa 2012, t. I, 172; B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii...*, *dz. cyt.*, 301.

– oglądu – na matematyczne obiekty), jaka mogła ukształtować specyficzny styl danego matematyka.

Każdy z analizowanych matematyków analizował i badał matematyczne obiekty i struktury w określony sposób. Będziemy opisywać pewien *intencjonalizm* zarówno w Cantorowskiej praktyce matematycznej, jak i w praktyce Dedekindowskiej[808]. Obydwaj dokonywali umysłowych wyborów, jednak – co należy zaznaczyć – każdy z nich, podejmował owe wybory kierując się odmiennymi powodami.

Chociaż na początku pracy określone zostało filozoficznie pojęcie intencji i intencjonalności, przedstawimy tu nieco bardziej bezpośredni opis psychologiczny, jako że propozycja filozoficzna Searle'a nawiązuje do psychologicznych stanów intencjonalnych. Posłużymy się ogólną definicją intencjonalności Jacoba Pierre'a. Wskazuje on na etymologię pojęcia intencjonalności w łacińskim określeniu *tendere.* Jak pisze Pierre: „istotną ideą stojącą za intencjonalnością jest myślowe ukierunkowanie na obiekty (lub zwracanie na nie uwagi), tak jakby umysł był skonstruowany jako mentalny łuk, którego strzały mogą być właściwie wycelowane w różne cele"[809].

Możemy uwzględnić inne łacińskie pojęcie *intentio*, którego używano w średniowieczu dla określania tego, co może być prawdziwe w odniesieniu do rzeczy i właściwości leżących poza umysłem, prezentowanych umysłowi. Intencja może jednak również dotyczyć rzeczy mentalnych[810].

---

[808] Pojęcie intencji związanej z nakierowaniem na obiekt jest zasadniczo tym, na czym się skupiamy, opisując pojęcie stylu. W kwestii perspektywy będziemy zwłaszcza zwracali uwagę, jakiej części matematycznej struktury owa intencja i intuicja dotyczą. Styl matematyczny (czy też styl uprawiania matematyki) nie jest kanonicznym pojęciem w filozofii i historii matematyki. Można jednak znaleźć wiele przykładów określonych stylów, nazywanych tak zarówno przez historyków i filozofów matematyki, jak i samych matematyków, np. styl Archimedesa, abstrakcyjno-teoriomnogościowy styl Dedekinda czy epsilonowy styl Weierstrassa. Kryteria różnicowania stylów matematycznych dotyczą również miejsca (narodowości, grup społecznych), jak i czasu (różnych okresów, dla których charakterystyczny był dany sposób uprawiania matematyki, zmieniających się pod wpływem przełomowych odkryć czy osobowości). Istnieją stanowiska porównujące matematykę do sztuki – jednakże między nimi istnieje zasadnicza różnica – postacie fikcyjne pojawiają się w jednym dziele, natomiast byty matematyczne istnieją w różnych teoriach matematycznych. Por. J. Burgess, *Mathematics and Bleak House...*, *dz. cyt.*; L. Horsten, *Philosophy of Mathematics...*, *dz. cyt.* Ogólnie w niniejszej pracy styl matematyczny będzie oznaczał pewną charakterystykę tzw. praktyki matematycznej. Czyli np. intencjonalność podmiotu matematycznego (a więc zakres tych matematycznych bytów czy szerzej problemów matematycznych, które w sposób zamierzony zajmują istotne miejsce w umyśle), zakres metod oraz używanych narzędzi matematycznych, czy też szerzej pojmowaną motywację dla podejmowania się właśnie tych a nie innych problemów, dokładnie w taki sposób, w jaki dany podmiot się ich podejmuje.

[809] P. Jacob, *Intentionality...*, *dz. cyt.*

[810] P. Jacob, *Intentionality...*, *dz. cyt.*

W tym kontekście intencjonalizm jako składowa stylu uprawiania matematyki (praktyki matematycznej) będzie oznaczał pewną charakterystykę tego, „na czym" i „w jaki sposób" (a w pewnym sensie również „dlaczego") skupia się umysł podmiotu matematycznego. Opisując stany mentalne, nie utożsamiamy ich ze stanami jedynie subiektywnymi, chcąc uniknąć zbytnio skomplikowanych aspektów dyskusji, dotyczącej psychologizmu[811].

W niniejszym podrozdziale postaramy się odpowiedzieć na pytanie o charakterystykę tego, „na czym" Cantor i Dedekind mentalnie się skupiali oraz jak to się odnosiło do konstrukcji *R* oraz teorii mnogości. Pamiętamy przy tym o analizach wcześniejszych podrozdziałów, to jest o założeniach dotyczących źródeł matematycznej wiedzy, jak i ich matematycznych celach.

Podstawowa struktura relacyjna liczb rzeczywistych

Główna idea niniejszego podrozdziału jest taka, że Dedekind oparł konstrukcję liczb rzeczywistych na innego rodzaju strukturze relacyjnej (na innym zbiorze) niż Cantor. U Dedekinda była to relacja między dwoma podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych (jednoznacznie określająca daną liczbę rzeczywistą), u Cantora była to relacja kongruencji, określona między ciągami, i utożsamiała liczbę rzeczywistą z nieskończonym zbiorem ciągów ze sobą kongruentnych.

Cantor bardzo szczegółowo i dokładnie przedstawił w swojej konstrukcji genezę liczb rzeczywistych, opisując zbiory ciągów Cauchy'ego, relacje na nich i ich granice. U Cantora punkt-liczba stwarzana przez przekrój Dedekinda była miejscem wyznaczanym przez nieskończenie wiele ciągów liczbowych, ze sobą kongruentnych. Dedekind, określając

[811] Jeśli chodzi o definicję psychologizmu, przytoczmy opinię Olszewskiego, który pisze: „Przez psychologizm w filozofii matematyki rozumiem pogląd, według którego pojęcia matematyczne wywodzą się z praw psychologicznych. Charakter owego wywodzenia może być różny. Może ono być rozumiane w sensie eksplikacji, pochodzenia czy jeszcze innym". Por. A. Olszewski, *O nieusuwalności podmiotu matematycznego*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XLVI, (2010), 103. Dodatkowo Olszewski różnicuje psychologię z kognitywistyką, zaznaczając że obie mają charakter nie normatywny, a empiryczny, jednak w przypadku psychologii owa empiryczność dotyczy opisu faktualnych własności Podmiotu (człowieka), natomiast w przypadku kognitywistyki – wyidealizowanych możliwości tegoż Podmiotu. A. Olszewski, *O nieusuwalności podmiotu matematycznego...*, *dz. cyt.*, 104. Należy jednak podkreślić, że całkowite rezygnowanie z perspektywy psychologicznej (choć teraz bardziej naukową być może jest kognitywistyka, ale należy się zastanowić, czy rzeczywiście w pełni psychologię zastępuje), również może być błędem.

własność ciągłości, punkty utożsamiał z granicami ciągów[812]. U Cantora liczba-punkt, implikuje w zasadzie istnienie nieskończenie wielu ciągów[813].

W tym kontekście Dedekind bardziej konkretnie niż Cantor (tj. w sposób optymalny, nie wykraczając poza to, co konieczne) określa zbiór liczb rzeczywistych. Sam zbiór liczb rzeczywistych, jak również zbiór liczb wymiernych, w oparciu o który go budował, traktował Dedekind wyraźnie jako pewną strukturę, której elementy są połączone ze sobą określonymi właściwościami, działaniami i relacjami[814]. Jednak podstawową zasadą definiującą ten zbiór liczb jest zasada ciągłości, która powoduje że podstawowym poziomem rozważań tego zbioru są same przekroje. Punkty-liczby, wyznaczane przez owe przekroje w zbiorze liczb rzeczywistych, są określane jednoznacznie, a zależą jedynie od właściwości, jakie zgodnie z zasadą ciągłości mają spełniać.

Cantor utożsamiał liczbę rzeczywistą z nieskończoną ilością ciągów podstawowych[815], współzbieżnych ze sobą, podczas gdy Dedekindowi wystarczył przekrój, jednoznacznie wyznaczający tę liczbę[816]. Jest to dobry przykład na uchwycenie subtelnej różnicy między perspektywą badawczą Cantora i Dedekinda.

---

[812] Niektórzy twierdzą, że podstawowym celem Dedekinda w jego *Stetigkeit und irrationale Zahlen* było: „zastąpienie niezdefiniowanych pojęć (mniej lub bardziej geometrycznych) i opartych na nich tak zwanych intuicyjnych uzasadnień, dowodami wyprowadzonymi z jasno sformułowanych definicji. Szukał on przede wszystkim takich definicji, z których można wyprowadzić podstawowe twierdzenia o istnieniu granic. W tym celu potrzebował zdefiniować system w pewnym sensie zupełny, czy też ciągły". Por. R. Bunn, *Developments in the foundations of mathematics, 1870–1920...*, *dz. cyt.*, 222.

[813] W istocie Cantor sam miał problemy z jednoznacznym określeniem tej relacji. Raz pisał o tym, że jednemu punktowi odpowiada nieskończenie wiele ciągów (liczb), w innym zaś miejscu, że jednemu punktowi odpowiada jedna liczba. Por. „zu jeder Zahlengröβe ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröβe*"* (pl: „do każdej wielkości liczbowej należy pewien punkt linii prostej, którego współrzędna jest równa tej wielkości liczbowej"). G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 97. „ Ja schon die Gleichsetzung zweier Zahlengröβen *b, b'* aus *B* ihre Identität nicht einschlieβt, sondern nur eine bestimmte Relation ausdrückt, welche zwischen den Reihen stattfindet, auf welche sie sich beziechen" („Nawet równanie dwóch wielkości liczbowych *b, b'* z *B* nie uwzględnia ich identyczności, a jedynie wyraża pewną relację zachodzącą między szeregiem, do którego się odnoszą"). G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 95.

[814] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 329–331.

[815] W istocie Cantor sam miał problemy z jednoznacznym określeniem tej relacji. Raz pisał o tym, że jednemu punktowi-granicy odpowiada nieskończenie wiele liczb, w innym zaś miejscu, że jednemu punktowi-granicy odpowiada jedna liczba. Por. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)...*, *dz. cyt.*, 97.

[816] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen...*, *dz. cyt.*, 319.

Warto zauważyć, że u Cantora istnieje pewien dodatkowy, można powiedzieć głębszy poziom „budowy” liczby rzeczywistej, którego u Dedekinda nie zauważamy[817].

Koncepcja owych przełomowych przekrojów wynikała w przypadku Dedekinda bezpośrednio ze sformułowanej przez niego (również w kontekście metamatematycznym czy filozoficznym) właściwości ciągłości zbioru – a dokładniej, właściwości ciągłości porządku liniowego. Charakteryzujący jego metodę intencjonalizm[818] może sprawiać wrażenie, iż Dedekind miał wszystko zaplanowane (wiedział co, jak, gdzie i po co opracować) w swojej matematycznej działalności.

Stąd w kontekście struktury zbioru liczb rzeczywistych podstawowa relacja określona przez Dedekinda dotyczyła bezpośrednio samego zbioru tych liczb, natomiast podstawowa relacja określona przez Cantora dotyczyła tego, co tworzy pojedynczą liczbę. Można stwierdzić więc, że w kontekście problemu niewymierności, perspektywę Dedekinda można określić jako zewnętrzną względem struktury R, natomiast perspektywę Cantora można określić jako wewnętrzną względem struktury. Nie twierdzimy tym samym, iż Cantor nie ujmował skonstruowanej przez siebie struktury R w jakimś momencie całościowo – niemniej nie zrobił tego bezpośrednio na początku, a w konsekwencji w trakcie rozwiązywania problemu niewymierności.

Perspektywa wewnątrz-strukturalna Cantora

W oparciu o fakt, iż Cantor prawie bezkrytycznie przyjmował wiedzę zastaną przez siebie w matematyce, a wraz z nią również towarzyszące jej pozamatematyczne poglądy, możemy stwierdzić, iż pozwalało mu to traktować matematykę jako daną umysłowi *a priori*, w sposób całkowicie pewny. Jego podejście do matematycznej praktyki charakteryzował następujący schemat: najpierw wybierał on fragment zastanej teorii (w niniejszej pracy wspomniana została teoria szeregów Fouriera), który dogłębnie i szczegółowo badał

[817] Relacja w matematyce to podzbiór (dowolny) iloczynu kartezjańskiego pewnej skończonej liczby zbiorów. U Dedekinda przekrój (odpowiadający liczbie rzeczywistej w zbiorze tych liczb) to iloczyn kartezjański dwóch podzbiorów $A \times B$ (rozłącznych oraz dających w sumie cały zbiór liczb rzeczywistych), dla dowolnej liczby rzeczywistej r, gdzie $A=\{x: x \leq r\}$ *oraz* $B=\{x: x>r\}$. Jest określany na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Natomiast u Cantora relacja kongruencji to iloczyn kartezjański określony na zbiorze liczb, które są ze sobą kongruentne $[r]\times[r]$ (dziś powiemy, że na klasie określającej daną liczbę rzeczywistą $[r]=\{x: x_1 \sim x_2\}$). Zbiór [r] nie jest podzbiorem liczb rzeczywistych, a jego elementem, ewentualnie podzbiorem jednoelementowym. Inna sytuacja byłaby w przypadku ujęcia mereologicznego, gdzie podzbiory danego zbioru mogą być również jego elementami.

[818] Pojęcie to dotyczyło również opisu podejścia Cantora, lecz w inny sposób. Samo pojęcie jest wyjaśnione w przybliżeniu. Ogólne jego znaczenie obejmuje obszar zagadnień i ich powiązań oraz sposobów, na jakie dany matematyk decydował się je opracowywać. Oznacza pewną zauważalną decyzyjność w wyborze podejmowanych zagadnień czy sposobu ich podejmowania.

(powiedzielibyśmy, że stosował wtedy metodę dedukcji lub jak to nazywa Wiesław Wójcik – precyzacji)[819], a następnie wyodrębniał nowy problem, na jego podstawie tworzył nową płaszczyznę badawczą, którą następnie rozwijał (według Wójcika byłaby to metoda abstrakcji) [820]. U Cantora owym wyodrębnionym i rozwijanym problemem była zarówno konstrukcja liczb rzeczywistych, jak również cała jego teoria mnogości. Dodatkowo w pracy dotyczącej konstrukcji liczb rzeczywistych z 1872 roku znajdowała się również zapowiedź jego teorii mnogości[821].

Powyższe oznacza, iż sądzimy, że perspektywa badań Cantora względem (często dopiero powstających) struktur była wewnętrzna w ramach struktury, choć mogła być zewnętrzna w stosunku do pewnych jej elementów. Badania w takim stylu koncentrują się na rozpatrywaniu wnętrza (tj. problemów, które stanowią część) danej struktury. Nie dotyczą zaś charakteryzowania samej struktury i jej najistotniejszych aspektów, jak to ma miejsce w oglądzie określanym jako perspektywa zewnętrzna względem struktury, co jest raczej typowe dla metody modelowania teoriomnogościowego Dedekinda. Aby wyjaśnić na matematycznym przykładzie powyższą kwestię u Cantora, przeanalizujemy kwestię problemu różnoliczności zbiorów N i R.

Oddzielną od procesu „porządkowania" liczb kwestią prac nad liczbami nieskończonymi Cantora była kwestia mocy (liczby kardynalnej) oraz różnicy mocy dwóch zbiorów nieskończonych: zbioru liczb naturalnych N oraz zbioru liczb rzeczywistych R[822]. Oczywiście w badaniu tego problemu Cantor nie ograniczył się do dwóch powyższych zbiorów; należy również zaznaczyć, że problem ten stanowił podstawę dla innej, ważnej matematycznej

[819] W. Wójcik, *Koncepcja dowodu a struktura rozwoju nauki*, „Studia Philosophiae Christianae" 26, (1990) nr 1, 194–202.

[820] W. Wójcik, *Koncepcja dowodu a struktura rozwoju nauki..., dz. cyt.*

[821] Por. z definiowaniem przecięcia (części wspólnej) nieskończenie wielu pochodnych zbiorów, tj. $P^{(\infty)}$, pochodna numer ∞. G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)..., dz. cyt.*, 98.

[822] Pierwsze wzmianki o wątpliwościach Cantora, dotyczących tej kwestii, zaczęły się pojawiać się około 1873 roku. Por. np. G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 2.12.1873*, w: *Briefweschel Cantor-Dedekind*, red. J. Cavaillès, E. Noether, Paris 1937, 13–14; G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 7.12.1873*, w: *Briefweschel Cantor-Dedekind*, red. J. Cavaillès, E. Noether, Paris 1937, 14–15; G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 9.12.1873..., dz. cyt.*; J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora..., dz. cyt.*, 48; W. Ewald, *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics..., dz. cyt.*, t. 2.

kwestii, jaką jest Hipoteza Kontinuum[823]. Jednakże w niniejszym rozdziale przedstawimy samą kwestię odkrycia i rozwijania przez Cantora problemu różnoliczności zbiorów.

Cantor udowodnił, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych, choć intuicyjnie ten drugi wydawał się bardziej liczny. Następnie postawił pytanie, czy zbiory *N* (liczb naturalnych) i *R* (liczb rzeczywistych), oba nieskończone, odpowiadają sobie jak „jeden do jednego"?[824] W odpowiedzi Dedekind przedstawił dowód, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych (*A*) jest policzalny (tj. istnieje odpowiedniość „jeden do jednego" z *N*)[825]. Niedługo później Cantor udowodnił, że założenie, że *R* jest policzalne, jest nieprawdziwe[826]. Dowód był przeprowadzony metodą „nie wprost". Cantor najpierw zakładał, iż wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału (0,1) można jedno-jednoznacznie ponumerować w indeksach kolejnymi liczbami z *N*:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots .$$

W następnym kroku Cantor konstruował taką liczbę rzeczywistą – również z przedziału (0,1) – że nie należała ona do ciągu mającego zawierać wszystkie liczby rzeczywistych z przedziału (0,1). Istnienie takiej, nienależącej do powyższego ciągu, „nowej" liczby rzeczywistej było sprzeczne z założeniem, dlatego w konsekwencji Cantor wyciągnął wniosek, iż nie istnieje funkcja jednoznacznie odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych[827].

[823] Hipoteza Kontinuum, to równanie: $\aleph_1 = c$, gdzie $\aleph_1$ oznacza pierwszą, nieprzeliczalną liczbę kardynalną, natomiast c oznacza liczbę kardynalną kontinuum (moc zbioru liczb rzeczywistych). Jest to stwierdzenie, że nie ma zbioru, którego moc byłaby ostro większa od mocy zbioru liczb naturalnych *N* i zarazem ostro mniejsza od mocy zbioru liczb rzeczywistych *R*. Uogólniona Hipoteza Kontinuum dotyczy każdego nieskończonego zbioru A i mówi, że nie istnieje zbiór B, taki że: $\bar{\bar{A}} > \bar{\bar{B}} > \overline{\overline{2^A}}$, gdzie 2^A oznacza zbiór potęgowy zbioru A (tj. zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A). W dalszej części pracy temat ten będzie jeszcze poruszony.

[824] W. Ewald, *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*..., *dz. cyt.*, t. 2; J. Ferreirós, *The Early Development of Set Theory*..., *dz. cyt.*

[825] Wzmianka o dowiedzonym przez Dedekinda fakcie równoliczności zbioru wszystkich zespolonych liczb algebraicznych ze zbiorem liczb naturalnych widnieje w jednym z listów: G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 2.12.1873*..., *dz. cyt.*, 13. W 1874 roku Cantor przedstawił fakt nierównoliczności zbioru liczb algebraicznych i zbioru liczb rzeczywistych, w swojej pracy: G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)*..., *dz. cyt.*

[826] Cantor przedstawił tak naprawdę dwa dowody na to, iż nie istnieje funkcja odwzorowująca jednoznacznie zbiór liczb naturalnych *N* w zbiór liczb rzeczywistych *R*.

[827] Por. „So glaube ich schliesslich zum Grunde gerkommen zu sein, weschalb sich der in meinen früheren Briefen mit *(x)* bezeichnete Inbegriff nicht dem mit *(n)* bezeichneten eindeutig zuordnen lässt*"*. Por. G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 7.12.1873*..., *dz. cyt.*, 15. Warto od razu nadmienić, iż Cantor rozróżniał pojęcie samego

Dokładnie opisał wyniki swoich badań[828] po raz pierwszy w pracy z 1874 roku, czyli zaraz po wymianie korespondencji na ten temat z Dedekindem[829]. W artykule tym odniósł się najpierw do liczb algebraicznych. Napisał, iż liczbą algebraiczną jest wyłącznie każda liczba rzeczywista, spełniająca następujące równanie z całkowitymi współczynnikami n, a_0, a_1,…, a_n:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Przy pewnych warunkach powyższe równanie jest ściśle określone, a liczb algebraicznych ω spełniających to równanie jest (co najwyżej) n[830]. W listach z 1873 roku Dedekind przedstawił swoje rozwiązanie problemu równoliczności zbioru liczb naturalnych oraz liczb algebraicznych, stąd możemy, idąc za wskazaniami Ferreirósa przypuszczać, iż niezwykle niefortunne[831] dla znajomości obu naukowców było umieszczenie na wstępie najnowszego artykułu Cantora rozważań o tym, co Dedekind formalnie dokonał, bez wskazania jego autorstwa. Cantor bowiem rozważa dalej kwestię równoliczności zbiorów A i N[832].

---

zbioru od pojęcia zbioru liczb. Używał odnośnie do nich odpowiednio niemieckich terminów: „Inbegriff" oraz „Werthmenge".

[828] Jak sam pisał w 1890 roku. Należy zaznaczyć, iż część z tych wyników powstała również w ramach korespondencji naukowej z Dedekindem. Ten fakt, jak również jego analiza filozoficzna oraz jej wpływ na postrzeganie praktyki matematycznej Cantora będą rozwinięte na dalszych stronach niniejszej pracy.

[829] G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)*..., *dz. cyt.*

[830] „wir können uns hierbei die Zahlen *n* und a_0 positiv, die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, an$ ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daβ nach den bekannten Grundsätzen der Arithemtik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekhert gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen *ω,* welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reelen algebraishen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inberiff von Zahlengröβen welcher mit *(ω)* bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfahen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, das in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl *α* unendlich viele Zahlen aus *(ω)* liegen*"*.

G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)*..., *dz. cyt.*, 115.

[831] Sama zaistniała sytuacja mogła być niefortunna, nawet bez wnikania w przyczyny podjęcia decyzji Cantora o takiej konstrukcji jego artykułu czy też zakresu jego świadomości w problematycznym (bo dotyczącym powiązań artykułu jednego autora z korespondencją dwóch naukowców) zakresie.

[832] „um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daβ man den Inbegriff *(ω)* dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen *ν,* welcher durch das Zeichen *ν* angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daβ zu jeder algebraischen Zahl *ω* eine bestimmte ganze positive Zahl *ν* und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl *ν* eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl *ω* gehört, daβ also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegiff *(ω)* in der Form einer unendlichen gesetzmäβigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von *(ω)* vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet*"*.

Cantor zastanawia się nad konkretną zasadą, umożliwiającą jednoznaczne przypisanie liczbom naturalnym liczb algebraicznych, jednak sam ogranicza się do zaprezentowanego w paragrafie 1 swojego artykułu przedstawienia najogólniejszych warunków takiego przyporządkowania[833]. Dalej matematyk z Halle zapowiada paragraf 2, w którym – w sposób różnicujący zbiory *N*, *A* od *R* – chce ukazać własność liczności zbioru liczb rzeczywistych. Otóż, jak pisze, w paragrafie 2 ma dalej przedstawić wyraźną różnicę, jaką odkrył między kontinuum zbioru liczb rzeczywistych a „naturą całości" zbioru rzeczywistych liczb algebraicznych[834].

G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)...*, *dz. cyt.*, 115.

[833] „Sobalt man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nacht Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in §1 denjenigen Anonrdnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt".

G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)...*, *dz. cyt.*, 115.

[834] „Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen eine Anwendung zu geben, füge ich zu dem §1 den §2 hinzu, in welchem ich zeige, daβ, wenn eine beliebige Reihe reeller Zahlgröβen von der Form (2) vorliegt, man in jedem vorgegebenen Intervalle *(α…β)* Zahlen η bestimmten kann, welche nicht in (2) enthalten sind; kombiniert man die Inhalte dieser beiden Paragraphen, so ist damit ein neuer Beweis des zuerst von Liouville bewiesenen Satzes gegeben, daβ es in jedem vorgegebenen Intervalle *(α…β)* unendlich viele transzendente, d. h. nicht algebraische reelle Zahlen gibt. Ferner stellt sich der Satz in §2 als der Grund dar, warum Inbegriffe reeller Zahlgröβen, die ein sogenanntes Kontinuum bilden (etwa die sämtlichen reellen Zahlen, welche ≥ 0 und ≤ 1 sind), sich nicht eindeutig auf den Inbegriff *(ν)* beziehen lassen; so fand ich den deutlichen Unterschied zwischen einem sogenannten Kontinuum und einem Inbegriffe von der Art der Gesamtheit aller reellen algebraischen Zahlen*"*.G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)...*, *dz. cyt.*, 115–116.

Owa odkryta różnica była miejscem (czy momentem), w którym można upatrywać genezy Hipotezy Kontinuum. Można w tym miejscu dodać, iż stosunek Cantora do problemu Hipotezy Kontinuum jest charakterystyczny dla niego, i może stanowić pewien specyficzny aspekt stylu matematycznego Cantora. Należy podkreślić że niekoniecznie chodzi o postawienie matematycznego problemu. Samo dojście do stwierdzenia o nierównoliczności zbiorów *N* i *R* odbyło się drogą jak najbardziej racjonalną, przy użyciu czysto matematycznych metod. Postawienie hipotezy o nieistnieniu zbioru, którego moc jest większa od mocy zbioru *N* oraz mniejsza od mocy zbioru *R*, choć jest to założenie niewynikające wprost z przeprowadzonych wcześniej badań, też można tłumaczyć pewną matematyczną ciekawością. Jednakże późniejsze, usilne próby udowadniania tej hipotezy, związane z negatywnymi stanami psychicznymi Cantora, już nie mogą być zaliczone do racjonalnych wyborów i czynności matematyka. Co zresztą potwierdza współczesne stanowisko na temat statusu Hipotezy Kontinuum. Obecnie wiadomo, że owa hipoteza jest niesprzeczna, ale również niezależna od aksjomatyki teorii mnogości Zermelo-Fraenkla (w wyniku badań K. Gödla oraz P. Cohena: P. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis I*, „Proceedings of the U.S. National Academy of Sciences" 50, (1963), 1143–1148; K. Gödel, *Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis*, „Proceedings of the U.S. National Academy of Sciences" 25, (1938), 220–224.), Hipoteza Kontinuum jest niezależna nawet od aksjomatyki ZFC (P. Koellner, *The Continuum Hypothesis*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2019.).

Odwołując się w 1890 roku[835] do swojej pracy z roku 1874, *Über eine Eingeschaft des Inbegriffs aller reelen algebraischen Zahlen*[836], Cantor stwierdza, iż tam właśnie znajduje się pierwszy dowód twierdzenia, mówiącego o istnieniu nieskończonych zbiorów różnolicznych od zbioru wszystkich liczb 1, 2, 3, …, *v*, … [837] (zbiorów, których nie da się jednoznacznie odwzorować w zbiór liczb naturalnych). I tak przypomina on, że w dowodzie z roku 1874 (paragraf 2) zostało pokazane, iż sumy wszystkich rzeczywistych liczb z pewnego (dowolnego) przedziału (α, ..., β) nie da się zapisać w postaci następującego szeregu:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots$$

Cantor pokazał więc w 1874 roku, iż w zbiorze liczb rzeczywistych *R* jest więcej elementów niż w zbiorze liczb naturalnych *N*, zbiorze liczb wymiernych *Q*, a także niż w zbiorze liczb algebraicznych *A*, czyli moc zbioru liczb rzeczywistych *R* jest (silnie) większa niż moc zbioru liczb naturalnych/wymiernych/algebraicznych. Wykorzystał do tego właściwości wprowadzonych wcześniej liczb niewymiernych[838].

---

[835] G. Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)..., dz. cyt.*

[836] G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)..., dz. cyt.*

[837] „In dem Aufsatze, betitelt: Über eine Eingeschaft des Inbegriffs aller reelen algebraischen Zahlen (Journ. Math. Bd. 77, S. 258) [hier S. 115], findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, daβ es unendliche Mannigfaltigkeiten gibt, die sich nicht gegenseitig eindeuting auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, …, *v*, ... beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreiche 1, 2, 3, ..., *v*, ... haben".

G. Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)..., dz. cyt.*, 278.

[838] Rozpatrywał bowiem przedział ($\alpha ... \beta$), dany arbitralnie, gdzie zachodziła nierówność: $\alpha<\beta$. W przedziale tym znajdywał dwie liczby α' oraz β', z szeregu liczb rzeczywistych ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots$) – określmy go symbolem S, które również spełniały nierówność: $\alpha'<\beta'$, a które same tworzyły następny przedział: ($\alpha' ... \beta'$). W tym zaś przedziale znowu znajdował kolejne liczby α'' oraz β'' (również z szeregu *S*), takie że: $\alpha''<\beta''$, tworzące następny, mniejszy przedział ($\alpha'' ... \beta''$). W ten sposób otrzymujemy cały ciąg przedziałów *(α...β), (α'...β'), (α''...β'')…*, gdzie każdy zawiera wszystkie po nim następujące. W tej sytuacji Cantor widzi dwa rozwiązania: albo liczba tak tworzonych przedziałów jest skończona, albo nieskończona. Jeśli liczba tych przedziałów jest skończona, to można ustalić ostatni: ($\alpha^{(v)} ... \beta^{(v)}$), gdzie może być najwyżej jedna liczba należąca do szeregu *S*, a więc możemy przyjąć istnienie liczby η, która należy do tego przedziału, ale nie należy do szeregu *S*. Jeśli zaś liczba przedziałów jest nieskończona, to granica zwiększających się liczb $\alpha, \alpha', \alpha''\dots$ osiąga w końcu wartość α^{∞}, a granica zmniejszających się liczb $\beta, \beta', \beta''\dots$ osiąga w końcu wartość β^{∞}. Jeśli $\eta=\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$, to η (ze względu na definicję – nie wspomnianą w pracy – przedziałów), nie może należeć do szeregu *S*. Cantor uzasadnia jeszcze w przypisie: „Wäre die Zahl in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo *p*,ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn liegt nicht im Innern des Intervalles ($\alpha^{(p)} ... \beta^{(p)}$), während die Zahl *n* ihrer Definition nach im Innern dieses Intervalles liegt". G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)..., dz. cyt.*, 117 przyp.1. Jeśli zaś $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, to jest oczywistym, iż każda liczba z przedziału ($\alpha^{\infty} ... \beta^{\infty}$), nie należy do szeregu S.

W 1890 roku Cantor przedstawił jeszcze bardziej uporządkowaną metodę, pozwalającą udowodnić ogólniejsze twierdzenie o różnoliczności zbiorów (*X* oraz 2^X), w której nie trzeba wykorzystywać liczb niewymiernych (jest więc ona bardziej ogólna, jednak w dalszym ciągu dotyczyła tego samego problemu). Otóż rozważa on zespół (*Inbegriff*) *M*, wszystkich elementów $E = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots)$, o nieskończenie wielu współrzędnych, z których każda współrzędna to *w* albo *m*. Dalej twierdzi, że taka rozmaitość *M* (*Mannigfaltigkeit*) nie ma rozmiaru szeregu 1, 2,…, *v*,… Wynikało to według niego z następującego zdania:

„Jeśli $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ jest prostym nieskończonym szeregiem elementów rozmaitości M, to zawsze istnieje element E_0 z M, który nie odpowiada żadnemu elementowi E_v"[839].

Cantor w dowodzie rozważa rozmaitość M:

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots a_{1,v}, \dots)$$

$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots a_{2,v}, \dots)$$

$$\dots$$

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots a_{\mu,v}, \dots) \dots$$

Gdzie elementy $a_{\mu,v}$ są równe *w* lub *m*. Następnie bierze szereg $b_1, b_2, \dots, b_v, \dots$, taki że elementy b_v również są równie *m* lub *w*, jednak są różne od odpowiednich elementów $a_{v,v}$ (tj. np. jeśli $a_{v,v} = w$ to $b_v = m$). W ten sposób staje się oczywiste, iż dla $E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ nie zachodzi równość $E_0 = E_\mu$. A więc Cantor pokazuje, że nie tylko zbiór *N* i zbiór *R* różnią się ostro swoimi mocami, ale można to stwierdzenie dostosować (ostrej nierówności) do każdego nieskończonego zbioru *X* (tu kontinuum liniowe, tj. odcinek liczb rzeczywistych <0,1>) oraz jego zbioru potęgowego (tu zbiór wszystkich funkcji, których dziedziną jest cały

[839] „Ist $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ irgendeine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit *M,* so gibt es stets ein Element E_0 von *M*, welches mit keinem E_v, übereinstimmt". G. Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)..., dz. cyt.*, 278.

<0,1>, a zbiór wartości to {0,1})[840], umożliwiając rozróżnienie nieskończonych liczb kardynalnych; tak że $X < 2^X$.

Otrzymany wyżej omówiony wynik Cantor opatrzył (jak wcześniej wskazywaliśmy, już w trakcie korespondencji z Dedekindem, w 1873 roku) jedynie krótkim, aczkolwiek interesującym z punktu widzenia niniejszej pracy komentarzem. Komentarz ten zawierał informację dotyczącą faktu, iż matematyk z Halle napotkał na istotne różnice między zbiorami, których wcześniej się – można powiedzieć – nie spodziewał[841]. Odkryte różnice (owa różnoliczność zbiorów) ustanowiły dodatkowy i zarazem niezwykle istotny aż do dzisiaj zakres problemów i badań w teorii mnogości[842].

Jerzy Dadaczyński zauważa, że użyte przez Cantora wyrażenie: „różnica co do istoty" oznacza własność nierównoliczności czy relacji większości/mniejszości zbiorów. Może być to o tyle istotne, że owa różnica mocy (liczebności zbioru) odnosząca się do zbiorów skończonych była dość oczywista. Natomiast jeśli chodzi o zbiory nieskończone – możemy sądzić, że to, co Dedekind przyjął *explicite*, jako cechę definiującą zbiory nieskończone (o czym więcej w dalszej części tego rozdziału), Cantor *implicite* zakładał. Chodzi tu o stwierdzenie, że – parafrazując wypowiedź Dedekinda odnośnie do zbiorów nieskończonych – „część jest równa całości"[843]. Bowiem *N*, będąc częścią *R*, nie jest z nim równoliczny. W kontekście nierównoliczności zbioru *N* oraz *R*, Cantor dokładnie to mógł mieć na myśli, nazywając nieoczywistym, że zbiór *N* (podzbiór) nie jest w żadnym razie równy zbiorowi *R* (nadzbiorowi), choć oba są nieskończne. Dodatkowo należy zwrócić uwagę na fakt, iż pierwszy dowód – jak go Cantor nazywa – nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych, opiera na dość ogólnym, intuicyjnym podejściu – może nie tyle geometrycznym, co topologicznym. Cantor opiera się na definicji przedziału i właściwości zupełności zbioru liczb rzeczywistych. Natomiast drugi

[840] G. Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)...*, *dz. cyt.*, 279–280.

[841] Por. „und ich schliesse daraus, dass es unter den Inbegriffen und Werthmengen Wesenverschiedenheiten gibt, die ich bis vor kurzem nicht ergründen konnnte*"*. Por. G. Cantor, *List do R. Dedekinda z 9.12.1873...*, *dz. cyt.*, 16.

[842] Nie tylko zapoczątkowały badania nad Hipotezą Kontinuum (jej sformułowanie i próby udowodnienia), ale również badania nad różnicowaniem pozaskończonych wielkości teoriomnogościowych, w tym badania nad dużymi liczbami nieskończonymi.

[843] Dokładna wypowiedź Dedekinda brzmi: „O systemie S mówi się, że jest nieskończony, jeśli jest podobny do odpowiedniej części samego siebie". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 357.

dowód jest przedstawiony w formie bardziej przejrzystej i formalnej (arytmetyczno-algebraicznej).

Podsumowując: głównym mechanizmem praktyki matematycznej Cantora była więc pewnego rodzaju, głęboka i szczegółowa precyzacja fragmentu teorii, jakim się zajmował, oraz jaką apriorycznie przyjmował. Ten proces w jego przypadku był kwestią dokładnego badania różnych „danych" bytów w matematyce i relacji między nimi. Wynik badań teoriomnogościowych Cantora, dotyczący różnoliczności zbiorów (można datować ten wynik na rok 1873), był przez niego rozwinięty w roku 1874, a później dodatkowo sformalizowany przy pomocy opracowywanej w latach 1878–1891 metody przekątniowej, którą matematyk z Halle udowodnił odkrytą przez siebie różnoliczność N i R w roku 1891.

W kontekście powyższych analiz należy zauważyć dwie kwestie, które pomogą określić perspektywę Cantora względem teorii mnogości. Pierwsza kwestia to element zaskoczenia matematyka z Halle, gdy odkrył różnoliczność dwóch zbiorów nieskończonych – co mogło się wiązać z przyjętymi wcześniej założeniami. Druga kwestia – związana tym razem z określonymi celami i kierunkiem praktyki matematycznej Cantora – to długotrwałe i konsekwentne dopracowywanie kwestii różnoliczności zbiorów nieskończonych, jakie było związane – jak zauważył sam Zermelo w przypisie do pracy Cantora z 1878 roku[844] – z równie długotrwałymi pracami nad Hipotezą Kontinuum. Zarówno Hipoteza Kontinuum, jak i odkryta różnoliczność zbiorów nieskończonych były kwestiami niejako tworzącymi, ale również należącymi do tworzonej przez Cantora teorii mnogości. Co bezpośrednio potwierdza, iż perspektywa tego matematyka względem tworzonej przez siebie teorii była wewnętrzna, ewentualnie skierowana „na" jej elementy. Przynajmniej częściową propozycję perspektywy zewnętrznej „na" tę teorię formuują proponują współcześnie – jak sądzimy – Piotr Błaszczyk i Marlena Fila, którzy przy pomocy algebraicznej teorii ciał uporządkowanych uzupełniają wewnętrzną perspektywę Cantora o takie elementy, jak np. nieskończenie małe wielkości[845]

W związku z powyższym, możemy stwierdzić, iż perspektywa Cantora względem teorii mnogości mogła być w dużej mierze perspektywą wewnętrzną. W swej praktyce matematycznej Cantor był intencjonalnie nakierowany na przyjęte i rozwijane elementy tej

[844] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)...*, *dz. cyt.*, 133 przyp. 2.

[845] P. Błaszczyk, M. Fila, *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective...*, *dz. cyt.*

teorii, nie zaś na to, aby tę teorię odgórnie scharakteryzować. Można wiązać to bezpośrednio z brakiem strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, rozpoznanego u Dedekinda.

Wykorzystując symboliczny opis Searle'a[846], można opisać ogólnie intencjonalność Cantora względem teorii mnogości (ograniczając stany intencjonalne do samych zamiarów-intencji) w postaci sumy zamiarów względem obiektów i działań w zakresie prac nad teorią mnogości:

$$\bigcup_1^n (I_n(O_{TM} \vee D_{TM})),$$

gdzie I_n oznacza n-ty zamiar, O_{TM} oznacza reprezentatywną treść stanu intencjonalnego (zamiaru) będącą obiektem należącym do teorii mnogości, a D_{TM} oznacza reprezentatywną treść stanu intencjonalnego (zamiaru) będącą działaniem na obiektach wewnątrz teorii mnogości, przy czym symbol $I(O \vee D)$ oznacza że treścią reprezentatywną stanu intencjonalnego (zamiaru) jest albo obiekt, albo działanie (chociaż taka radykalna alternatywa – w odniesieniu do rzeczywistości – to często idealizacja i uproszczenie).

Jednocześnie można tłumaczyć problematyczne elementy praktyki matematycznej Cantora – jak brak Aksjomatu Archimedesa (lub własności archimedesowości) w konstrukcji *R*, dowód przeciwko istnieniu nieskończenie małym, Hipoteza Kontinuum, a także nieopracowanie formalnej redukcji teoriomnogościowej arytemetyki *N*, pomimo wskazywania takiej możliwości – przypisanym mu rodzajem perspektywy badawczej[847].

---

[846] J.R. Searle, *The intentionality of intention and action*..., *dz. cyt.*, 50.

[847] Zauważmy, że perspektywa Cantora (szczególnie w porównaniu do Dedekinda) posiada mniejszy stopień abstrakcji. Mamy tu na myśli specyficzne dla matematyki, szeroko (również intuicyjnie) rozumiane, pewne metafizyczne poznanie jej badanego czy rozwijanego fragmentu, np za M.A. Krąpiec, *Metafizyczne poznanie*, w: *PEF*, red. T. Żmuda, PTTA 2010. Poziom abstrakcji będzie dotyczył zakresu niezbędnych do rozpatrzenia, oczyszczonych z intuicji elementów danego problemu, zagadnienia i jego funkcjonalności. Przyczyną tego mógł być wcześniej opisany mechanizm praktyki naukowej, tj. szczegółowe analizy, dotyczące fragmentów teorii . Cantor, skupiając się na szczegółach problemu, żeby nad nimi pracować, mógł tracić sprzed oczu pewne, inne aspekty tego samego problemu, a w szczególności szeroki, całościowy jego kontekst. Na tych szczegółach bowiem skupiał się i opierał dalsze rozważania. Mogła być to pierwotna cecha jego praktyki matematycznej, uwarunkowana pewnymi, indywidualnymi czynnikami, jak i – jak już wspominaliśmy – pozostałość po metodach stosowanych w analizie. Jeśli rozważyć to na płaszczyźnie założeń filozoficznych, przyczyną owego zauważonego niższego niż u Dedekinda poziomu abstrakcji oglądu Cantora może być brak w pełni świadomego podejścia strukturalistycznego. U Cantora zauważone aspekty strukturalizmu powiązane były raczej z konstruowaniem wymaganych struktur i w zasadzie występowały tylko w towarzystwie przejawów tegoż umysłowego konstrukcjonizmu, przynajmniej w zakresie, jaki analizowany był w niniejszej pracy.

Perspektywa nad-strukturalna Dedekinda

Należy przypomnieć, że zarówno Dedekind, jak i Cantor brali udział w systematyzacji i formalizacji dziewiętnastowiecznej matematyki (w tym w procesie uwalniania arytmetyki od geometrycznych intuicji). Jednakże pomimo iż rozpatrywane przez nich problemy matematyczne były obiektywnie sformułowane i dyskutowane w środowisku naukowym, każdy z analizowanych matematyków kierował swą uwagę na nieco inne ich aspekty. Poniżej przeanalizujemy trzy wersje twierdzenia o indukcji zupełnej, jakie przedstawił Dedekind, w celu wskazania możliwości przypisania mu całościowej perspektywy odnośnie do teorii mnogości i arytmetyki liczb naturalnych.

W niniejszym podrozdziale będziemy chcieli pokazać, iż Dedekind, rozpatrując poszczególne kwestie z zakresu opracowywanej przez siebie teorii mnogości, rozpatrywał je z perspektywy zewnętrznej. To znaczy, że przede wszystkim miał na uwadze całokształt teorii mnogości przez siebie wprowadzonej, a także to, dlaczego ją wprowadzał. Mamy tu na myśli model arytmetyki N, który Dedekind wprowadził przy pomocy zbioru prosto nieskończonego. Na przykładzie twierdzenia o Indukcji zupełnej, pokażemy, iż Dedekind nie badał samego w sobie problemu indukcji, ale wykorzystał je jako element charakterystyki zbioru liczb naturalnych w swoim modelu – definiując tę własność najpierw ściśle w kontekście teorii mnogości, a następnie zbioru liczb naturalnych.

Pierwsza wersja wyżej wymienionego twierdzenia zawarta była w 59 punkcie pracy z 1888 roku. Brzmi ona następująco:

„Aby udowodnić, że łańcuch A_0 jest częścią jakiegoś systemu Σ – niezależnie od tego, czy ten ostatni jest częścią systemu S, czy nie – wystarczy pokazać:

1. $A\ 3\ \Sigma$,
2. obraz każdego wspólnego elementu A_0 i Σ jest również elementem Σ”[848].

Dedekind pisze, że jeśli pierwszy podpunkt jest prawdziwy, to według punktu 45 istnieje $G = \mathfrak{G}(A_0,\Sigma)$. Punkt 45 – przypomnijmy – zawiera twierdzenie, iż $A\ 3\ A_0$. Rzeczywiście więc, istnieje największa wspólna część (*Gemeinheit*), równa przynajmniej samemu A. Koniec

---

[848] Por. „59. Satz der vollständigen Induktion. Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Teil irgendeines Systems Σ ist – magletzteres Teil von S sein oder nicht –, genügt es zu zeigen,

ϱ. daß $A\ 3\ \Sigma$, und

σ. daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ebenfalls Element von Σ ist”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 355–356.

końców otrzymujemy, że $G\ 3\ S$ a także (por. p. 55) $G'\ 3\ A_0$. Natomiast jeśli drugi podpunkt jest prawdziwy, to oznacza, że G jest łańcuchem. Ostatecznie otrzymujemy, że $G=A_0$, więc korzystając z 17 punktu, mamy $A_0\ 3\ \Sigma$.

Znając współczesną wersję indukcji zupełnej, widzimy, że w pierwszym punkcie warunek Dedekinda jest zastąpiony: $1 \in S$, natomiast drugi: $\forall k \in N, (k \in S \to (k+1) \in S)$. Przy czym zakładamy, że S jest podzbiorem N, a w wyniku spełnienia warunków indukcji, otrzymujemy, że $S=N$ (u Dedekinda: $G=A_0$, przy czym $G = \mathfrak{G}(A_0,\Sigma)$, natomiast to, co u Dedekinda otrzymujemy ostatecznie, to wyrażenie: $A_0\ 3\ \Sigma$). Można łatwo stwierdzić, że odwzorowanie, o którym pisze Dedekind, to funkcja następnika (obraz elementu n, to n+1). We współczesnej definicji mamy jeszcze inną różnicę. W punkcie 1 mamy dokładnie oznaczony element 1, a u Dedekinda zbiór A. Współcześnie pokazuje się przez indukcję, że S stanowi całość N, natomiast Dedekind pokazuje, że łańcuch A_0 jest częścią systemu Σ. W drugim zaś warunku, współcześnie sprawdza się czy $k \in S \to (k+1) \in S$ (czyli, czy dany podzbiór spełnia właściwość zbioru N, natomiast Dedekind pyta o to, czy *obraz każdego wspólnego elementu* A_0 *i* Σ *jest również elementem* Σ. Widzimy, że Dedekind nie korzysta praktycznie w ogóle z pojęć arytmetyki w tym momencie, a jedynie z pojęć teoriomnogościowych. Dedekind podczas rozumowania pokazuje, że na podstawie wcześniejszego twierdzenia istnieje część wspólna (*Gemeinheit*), która jest równa przynajmniej A. Pierwszy warunek więc wygląda tak: $G\ 3\ S$ (gdzie S to pewien uniwersalny zbiór), a drugi: $G'\ 3\ A_0$, przy czym drugi warunek oznacza, iż G jest łańcuchem, więc otrzymujemy: $A_0\ 3\ \Sigma$, czyli mamy $G'\ 3\ A_0\ 3\ \Sigma$. Można jeszcze raz podkreślić tutaj, że Dedekind charakteryzuje zbiór liczb naturalnych w kontekście twierdzenia o indukcji zupełnej, całkowicie w oderwaniu od charakterystyki samych elementów zbioru liczb naturalnych, do jakich jesteśmy dziś przyzwyczajeni (tj. 1, 2, 3…). Wszystko opiera na systemowym opisie charakterystyki całego zbioru i odwzorowania czy elementu wyróżnionego (można powiedzieć, że u Dedekinda jest on jedynie elementem „przykładowym", w oparciu o który wytwarza się cały zbiór liczb naturalnych[849].

Wyjątkowo, w punkcie 60, zamiast twierdzenia, definicji czy wyjaśnienia nowych konstrukcji czy pojęć, Dedekind zamieszcza rozważania na temat punktu poprzedniego, co świadczy o jego fundamentalnej roli w przedstawianej teorii. Niemiecki matematyk stwierdza, iż wprowadzona w poprzednim punkcie konstrukcja indukcji zupełnej jest podstawą dla

[849] Można porównać dodatkowo z innym przekładem tejże pracy Dedekinda na język polski: S. Dickstein, *Pojęcia i metody matematyki. Teoria działań*, Warszawa 1891.

pewnego typu dowodu, tzw. wnioskowania od n do $n+1$[850]. Dalej dodaje, że twierdzenie indukcji zupełnej wyrazić można również na inny sposób:

„Aby udowodnić, że wszystkie elementy łańcucha A_0 mają pewną własność $\mathfrak{G}$ (lub że zdanie $\mathfrak{S}$, w którym wspomniana jest nieokreślona rzecz n, jest rzeczywiście prawdziwe dla wszystkich elementów n łańcucha A_0), wystarczy wykazać, że:

ϱ. wszystkie elementy a systemu A mają własność $\mathfrak{G}$ (lub $\mathfrak{S}$ zachowuje ją dla wszystkich a) i

σ. obraz n' każdego elementu n z A_0, takiego który ma własność G, ma tę samą własność G (lub że zdanie S, jeśli odnosi się do elementu n z A_0, z całą pewnością musi odnosić się również do jego obrazu n')”[851].

Na uwagę zasługuje końcowe uzupełnienie Dedekinda, odnoszące się do twierdzenia o indukcji zupełnej. Otóż stwierdza on, że równoważność dwóch przedstawionych wersji twierdzenia o indukcji zupełnej jest oczywista gdy uda się przy pomocy Σ, wyznaczyć system wszystkich rzeczy, które mają własność $\mathfrak{G}$, czy też do których odnosi się zdanie $\mathfrak{S}$[852].

Istnieje również trzecia wersja twierdzenia o indukcji, a odnosi się ona konkretnie do zbioru liczb naturalnych:

„80. Twierdzenie o indukcji zupełnej (wnioskowanie od n do n'). Aby pokazać, że twierdzenie obowiązuje dla wszystkich liczb n łańcucha m_0, wystarczy wykazać,

ρ. że obowiązuje dla $n = m$, oraz

σ. że z ważności twierdzenia dla liczby n łańcucha m_0 wynika zawsze jego ważność dla kolejnej liczby n'.

---

[850] Por. „Der vorstehende Satz bildet, wie sich später zeigen wird, die wissenschaftliche Grundlage für die unter dem Namen der voll-ständigen Induktion”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 356.

[851] Por. „Um zu beweisen, daß alle Elemente der Kette A_0 eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{G}$ besitzen (oder daß ein Satz $\mathfrak{S}$, in welchem von einem unbestimmten Dinge n die Rede ist, wirklich für alle Elemente n der Kette A_0 gilt), genügt es zu zeigen,

ϱ. daß alle Elemente a des Systems A die Eigenschaft $\mathfrak{G}$ besitzen (oder daß $\mathfrak{S}$ für alle a gilt), und

σ. daß dem Bilde n' jedes solchen Elementes n von A_0, welches die Eigenschaft $\mathfrak{G}$ besitzt, dieselbe Eigenschaft $\mathfrak{G}$ zukommt (oder daß der Satz $\mathfrak{S}$, sobald er für ein Element n von A_0 gilt, gewiß auch für dessen Bild n' gelten muß)”. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 356.

[852] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 356.

Wynika to bezpośrednio z bardziej ogólnego twierdzenia (59) lub (60). Najczęściej występującym przypadkiem jest sytuacja, w której $m = 1$, a zatem m_0 jest pełnym ciągiem liczbowym *N*'[853].

Można zauważyć, że twierdzenie o indukcji zupełnej jest niejako – równie dokładnie i szczegółowo jak przez Cantora kwestia nierównoliczności zbiorów nieskończonych – opracowywane i precyzowane przez Dedekinda. Jednakże znajdujemy zasadnicze różnice między oboma podejściami. Po pierwsze, twierdzenie o indukcji zupełnej jest zwieńczeniem modelu liczb naturalnych, który zbudował Dedekind (zasada indukcji jest piątym aksjomatem Peano)[854]. Po drugie, jest to również twierdzenie, stanowiące pewną przesłankę, że Dedekind traktował teorię mnogości jako narzędzie do budowania struktur, nie zaś (jedynie) jako cel sam w sobie. Sam model liczb naturalnych oraz twierdzenie o indukcji opracowywane na jego potrzeby były niejako na wyższym poziomie abstrakcji w stosunku do samej w sobie teorii mnogości (podobny stosunek można przypisać również liczbom rzeczywistym). Nie były jej wewnętrznymi kwestiami, ale kwestiami opracowywanymi przy wykorzystaniu teorii mnogości – niejako nadbudowane na niej. Natomiast problem różnoliczności liczb *N* i *R* był badany przez Cantora z perspektywy wewnętrznej teorii mnogości – uczony odkrył ów problem w trakcie bezpośrednich badań liczności zbiorów, a w oparciu o odkryty problem i nim zainspirowany sformułował następnie Hipotezę Kontinuum – hipotezę, którą traktował również

---

[853] Por. „80. Satz der vollständigen Induktion (Schluβ von *n* auf *n'*). Um zu beweisen, daβ ein Satz für alle Zahlen *n* einer Kette m_0 gilt, genügt es zu zeigen,

ρ. daβ er für $n = m$ gilt, und

σ. daβ aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl *n* der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl *n'* folgt.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem allgemeineren Satze 59 oder 60. Am häufigsten wird der Fall auftreten, wo $m = 1$, also m_0 die volle Zahlenreihe *N* ist".

R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?...*, *dz. cyt.*, 361.

[854] Por. J. Mikusiński, P. Mikusiński, *Liczby naturalne i ich aksjomatyka*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne" XIX, (1976), 138–139. Powyższy zestaw jest równoważny, jak wykazano np. poniższemu:

1'. $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$;

2'. $\forall x, y: (x < y) \perp (x = y) \perp (y < x)$;

3'. $\forall Z \subset N, Z \neq \emptyset, \exists n \in Z: n \text{ jest najmniejsza}$;

4'. $\forall Z \subset N, Z \neq \emptyset, Z \text{ ograniczony } \exists n \in Z: n \text{ jest największa}$;

5'. *N* nie jest ograniczony.

Przy czym zbiór Z jest ograniczony, jeśli istnieje taka liczba x, że dla wszystkich liczb z należących do zbioru Z mamy: $z < x$. Nie jest zaś ograniczony, gdy nie istnieje takie x, że dla każdej liczby *n* należącej do zbioru liczb naturalnych *N* moglibyśmy mieć: $n < x$. Innymi słowy, dla każdej liczby x, istnieje liczba *n*, taka że: $x < n$.

jak wewnętrzny problem teorii mnogości (współcześnie wiadomo, że jest ona niezależna od aksjomatyki ZFC) [855].

Perspektywa badawczą względem teorii mnogości, jaką chcemy w niniejszym podrozdziale przypisać Dedekindowi, jest ściśle związana z przypisywanym mu strukturalizmem epistemiczno-metodologicznym. Wielokrotnie w niniejszej pracy było wskazywane takie podejście Dedekinda, które ukazywało powód zasadniczego rozróżnienia między pracą naukową Cantora i Dedekinda. Było to podejście strukturalistyczne[856]. Nie oznacza to jednak, iż żadnych przejawów strukturalizmu nie znajdziemy w pracach naukowych Georga Cantora[857]. Jednakże – chociaż oczywiście można prowadzić bardziej szczegółowe badania analizujące oba rodzaje strukturalizmów i ich związki z metodologią w obrębie konkretnej praktyki matematycznej – analizy niniejszej pracy pozwalają stwierdzić, że o ile u Cantora strukturalizm wynikał raczej bezpośrednio z jego szczegółowej pracy nad matematycznymi strukturami, o tyle podejście Dedekinda było związane ze strukturalistyczną kategorią[858], nałożoną na jego aparat poznawczy. Odnośnie twierdzenia o Indukcji zupełnej widzimy to, ponieważ opracowując tę kwestię, Dedekind chciał ukazać głębszy, teoriomnogościowo-strukturalny (teoriokategoryczny) kontekst tego twierdzenia[859] oraz nadać mu praktyczny i funkcjonalny wymiar i sens, w perspektywie opracowywanego modelu liczbowego.

Można próbować poszukiwać wyjaśnienia dla opisanej powyżej matematycznej praktyki w tym, że Dedekind (inaczej niż Cantor, którego działalność rozpoczynała się w analizie i teorii liczb) zajmował się od początku swojej pracy w większości algebrą – (stworzył

---

855 K. Wójtowicz, *Status hipotezy kontinuum w świetle koncepcji Woodina*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 19, (2011) nr 4, 67–82.

856 Całe uwikłanie arytmetyki liczb naturalnych w pojęcia teorii zbiorów oraz stworzenie „samo-generującej się" ich struktury, złożonej – jak się okaże – ze zbioru, funkcji następnika i elementu wyróżnionego – prezentowało celowość i zamiar strukturalistycznej formy ujęcia problemu przez Dedekinda.

857 W kontekście redukcji arytmetyki do teorii mnogości mamy np. do czynienia ze strukturami typów porządkowych, do których Cantor sprowadza liczby naturalne (lub przynajmniej wyraża taki zamiar). Są to struktury, gdyż Cantor definiuje je jako co prawda abstrahowane od jakości elementów zbioru, ale nie od samego zbioru i nie od relacji porządku (kolejności poprzedzania).

858 Por. z wcześniejszym przypisem. Chodzi o kategorię podobną do kategorii nałożonych według Kanta na aparat poznawczy, reprezentującą pewne strukturalistyczne ujęcie problemu.

859 Dedekind przy pomocy teorii zbiorów wyjaśniał i porządkował (ugruntowywał) zarówno pojęcia z zakresu algebry wyższej (jak np. pojęcie ideału), jak i podstawowe pojęcia arytmetyczne z zakresu teorii liczb naturalnych.

np. pojęcie pierścienia) liczbami algebraicznymi, ideałami oraz grupami[860]. Później zaczął również działać w zakresie podstaw matematyki, opracowując konstrukcję liczb rzeczywistych czy zagadnienia z teorii mnogości, podobnie jak Cantor.

Niemniej jednak nie tłumaczy to faktu, że Dedekind dokonał wyraźnego przełomu w stylu praktyki matematycznej[861]. Oczywiście nie był ani pierwszym, ani jedynym przedstawicielem i promotorem bardziej „abstrakcyjnego" podejścia do matematyki i rozwiązywania jej problemów. Wpływ na niego w tym względzie mieli między innymi Johann Dirichlet czy Geirg Riemman[862]. Należy jednak podkreślić, iż można u Dedekinda zaobserwować nie tylko ślady, czy pozostałości wpływu swoich nauczycieli. Jego naukowe wybory da się tłumaczyć intencją opracowywania struktur.

O Dedekindzie twierdzi się, iż jego charakterystyczne podejście do różnych, matematycznych zagadnień było na tyle oryginalne, że zapoczątkowało nowy styl w matematyce, naśladowany następnie przez wielu innych naukowców[863]. Uważamy jednak, że głównym powodem takiego stanu rzeczy było jego strukturalistyczne, epistemologiczno-metodologiczne podejście. Dedekind, opierając się w swej metodologii na perspektywie całej struktury, nad jaką pracował, posiadał dostęp do wszystkich niezbędnych jej elementów i reguł.

Oto przykładowy cytat, który opisuje stanowisko niektórych historyków i filozofów matematyki na temat Dedekinda i jego metod naukowych:

> „Gdyby [Kronecker – K.T.] miał jedną dziesiątą zdolności Dedekinda do jasnego formułowania i wyrażania swoich idei, jego wkład w matematykę mógłby być nawet większy niż Dedekinda. Jednak jego błyskotliwość w większości umarła wraz z nim. Z drugiej strony spuścizna Dedekinda składała się nie tylko z ważnych twierdzeń,

---

[860] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów..., dz. cyt.*; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*

[861] H. Stein, *Logos, Logic, and Logistiké: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformations of Mathematics*, w: *History and Philosophy of Modern Mathematics*, red. W. Aspray, P. Kitcher, Minneapolis 1988, 238–259; W.W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number..., dz. cyt.*

[862] E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*

[863] Wśród naukowców, którzy popierali (albo podjęli) ów wypracowany przez Dedekinda kierunek (nie licząc tego, że współczesna matematyka ciągle dąży do zwiększania zarówno formalizacji, jak i kontekstu, a więc również poziomu abstrakcji), byli m.in. Hilbert, Peano, Frege czy Russell. Mowa tu o Dedekinda perspektywie metodologiczno-epistemologicznej, która wymaga odpowiedniej (tj. strukturalistycznej i dlatego formalistycznej) metafizyki. Dodatkowo styl Dedekinda określany jest jako systematyczny, ogólny, czysty, charakteryzujący się rozumowaniem aksjomatycznym. Por. E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*

przykładów i pojęć, ale z całego stylu matematyki, który był inspiracją dla każdego kolejnego pokolenia”[864].

Można również wnioskować, że Dedekind właśnie poprzez swój strukturalistyczny ogląd problemu matematycznego i wyższy poziom abstrakcji przyjętej perspektywy działań zwiększał precyzję opisywania poszczególnych elementów danej teorii. Ujmując wszystkie potrzebne elementy danej struktury we właściwym kontekście, mógł Dedekind uniknąć również – co zresztą robił – zbędnych rozważań dotyczących kwestii, które na tę teorię *de facto* nie wpływały. Tym samym unikał błędów w formułowaniu teorii oraz zwiększał precyzję ich wprowadzania.

Wykorzystując symboliczny opis Searle'a[865], można opisać ógólnie intencjonalność Dedekinda względem teorii mnogości (ograniczając stany intencjonalne do samych zamiarów-intencji) w postaci sumy zamiarów względem modelu liczb naturalnych *N* i działań związanych z jego budową, gdzie wprowadzona teoria mnogości była jedynie narzędziem do powyższego (a więc intencje związane z teorią mnogości były pewnego rodzaju intencjami składowymi):

$$\bigcup_1^n (I_n(O_N \vee D_N)) = \bigcup_1^n (I_n(I_m(O_{TM} \to O_N) \vee I_m(D_{TM} \to D_N))),$$

gdzie I_n oznacza n-ty zamiar, O_N oznacza reprezentatywną treść stanu intencjonalnego (zamiaru) będącą obiektem modelu zbioru liczb naturalnych, a D_N oznacza reprezentatywną treść stanu intencjonalnego (zamiaru), będącą działaniem na obiektach modelu zbioru liczb naturalnych, przy czym symbol $I(O \vee D)$ oznacza, że treścią reprezentatywną stanu intencjonalnego (zamiaru) jest albo obiekt, albo działanie. Dalej, symbol O_{TM} oznacza reprezentatywną treść stanu intencjonalnego (zamiaru) będącą obiektem należącym do teorii mnogości, a D_{TM} oznacza reprezentatywną treść stanu intencjonalnego (zamiaru) będącą działaniem na obiektach wewnątrz teorii mnogości. Ostatecznie symbol $I_m(D_{TM} \to D_N)$ (lub odpowiednio $I_m(O_{TM} \to O_N)$) oznacza m-tą intencję przypisania działaniu zorientowanego na

[864] „Had he [Kronecker – K.T.] a tenth of Dedekind's ability to formulate and express his ideas clearly, his contribution to mathematics might have been even greater than Dedekind's. As it is however, his brilliance, for the most part, died with him. Dedekind's legacy, on the other hand, consisted not only of important theorems, examples, and concepts, but of a whole style of mathematics that has been an inspiration to each successive generation". H.M. Edwards, *Dedekind's Invention of Ideals*..., *dz. cyt.*; cyt. za: P. Mancosu, *Mathematical Style*..., *dz. cyt.*

[865] J.R. Searle, *The intentionality of intention and action*..., *dz. cyt.*, 50.

teorię mnogości, działanie zorientowane na model liczb naturalnych (analogicznie m-tą intencję przypisania obiektowi teorii mnogości, obiektu należącego do modelu liczb naturalnych).

Podsumowując rozważania niniejszego rozdziału, można stwierdzić, iż poprzez przykład twierdzenia o Indukcji zupełnej, jak również w zestawieniu z przypisywaną Dedekindowi metodą teoriomnogościowego modelowania jego perspektywa rozwiązywania problemów matematycznych miała charakter całościowy (nad-strukturalny). Można tak stwierdzić na podstawie analizy metodologii Dedekinda: wprowadzał teorię mnogości – a wraz z nią twierdzenie o Indukcji zupełnej – w celu budowy modelu liczb naturalnych. Interesowały go konkretne struktury i to je opracowywał w szerokiej, całościowej perspektywie obejmującej te zagadnienia, które miały ewidentny związek z danym problemem. Dedekind natomiast nie opracowywał wewnętrznych zagadnień teorii mnogości dla rozwijania jej samej, wykorzystywał ją z perspektywy zewnętrznej, traktując ją instrumentalnie.

6.4 Podsumowanie

Rozdział dotyczący ukazania różnic metodologicznych między Cantorem a Dedekindem (tutaj nazwaną Tezą II) – oprócz tego, że bezpośrednio miał scharakteryzować metodologię praktyki matematycznej i jej okoliczności (takie jak wybrane założenia, pewną celowość oraz ogląd) – pośrednio miał odpowiedzieć na pytanie o głębokie różnice między deklarowanymi i przypisywanymi założeniami filozoficznymi a założeniami i przesłankami rekonstruowanymi w niniejszej pracy, w oparciu o teksty i praktykę matematyczną obu uczonych.

Podsumowując krótko wyniki niniejszego rozdziału, prześledźmy raz jeszcze badania w nim przeprowadzone. Po pierwsze, biorąc pod uwagę deklaracje samego Cantora odnośnie do odrzucenia doświadczenia i intuicji jako źródeł matematycznej wiedzy oraz jego podejście do kwestii nieskończenie małych (których pojęcia nie zweryfikował w kontekście żadnej struktury) czy Hipotezy Kontinuum (której znaczenia również nie osadził w kontekście żadnej „nad-struktury"), wyrażone w jego twórczości, można skorzystać z propozycji Dadaczyńskiego, który przedstawia Cantora jako quasi-nominalistę. W konsekwencji dla matematyka z Halle źródłem matematycznej wiedzy był zewnętrzny świat idei, a w praktyce matematycznej sam umysł, w jakiś sposób (być może przy pomocy pewnego rodzaju naoczności, ale raczej dedukcyjnie) definiujący pojęcia odpowiadające ideom. Jeśli chodzi o założenia dotyczące źródeł wiedzy matematycznej w przypadku Dedekinda, to pomimo iż uważa się go za bardziej formalnego, bardziej abstrahującego w swej praktyce matematycznej od intuicji niż Cantor, to jednak Dedekind jest tym, który w sposób spójny i uporządkowany sięga w umyśle po pewnego rodzaju doświadczenia. Uważamy, że doświadczeniem tym są podstawowe obiekty teoriomnogościowe, które stanowiły bazę samej teorii mnogości, a oprócz tego były podstawą również jego teorii ideałów czy konstrukcji liczb rzeczywistych (np. w kontekście opisu ciągłości prostej geometrycznej). Wiedza matematyczna według Dedekinda jest konstruowana przez umysł człowieka, a ten ma prawo odwoływać się do pewnego rodzaju podstawowych naoczności, aby na ich fundamencie konstruować tę wiedzę. Ten wniosek wydaje się zbieżny z dyskutowanymi (tj. deklarowanymi i przypisywanymi) w niniejszej pracy założeniami filozoficznymi Cantora i Dedekinda.

Następnie dyskutowany był problem celowości i stosowalności wiedzy matematycznej, głównie w odniesieniu do teorii mnogości, ponieważ celowość rozwiązania problemu niewymierności wraz ze stosowalnością u obydwu matematyków była – nie licząc sposobu jego rozwiązania – zasadniczo podobna. W przypadku Cantora na podstawie jego wypowiedzi na temat możliwości zastosowań teorii mnogości poza matematyką, jak również ogólnego podejścia do kwestii redukcji teoriomnogościowej w samej matematyce została wskazana postawa przypisująca teorii mnogości tego rodzaju znaczenie, które pozwalało na jej – w pewnym sensie oczywiste – potencjalne wykorzystanie do innych, matematycznych i pozamatematycznych problemów. Niemniej jednak nie wykorzystywał Cantor teorii mnogości w usystematyzowany sposób, a raczej przez analogie. Dodatkowo, na przykładzie zbioru nieskończonego, argumentów pozamatematycznych wspierających nieskończoność aktualną oraz związku pewnych problemów (jak Hipoteza Kontinuum i wielkości nieskończenie małe) opracowywanych przez Cantora z wewnętrznymi kwestiami teorii mnogości, wskazujemy na fakt, iż teoria ta była dla dla uczonego celem samym w sobie. W przypadku Dedekinda wskazana została po pierwsze algebraiczna teoria ideałów, jaką opracował przy pomocy podstawowych elementów teoriomnogościowych, jak również jego pełna, konsekwentna redukcja teoriomnogościowa arytmetyki liczb naturalnych N. Biorąc pod uwagę, że podejście teoriomnogościowe – co zostało wcześniej wspomniane – Dedekind wykorzystywał również w ramach konstrukcji zbioru R, można powiedzieć, że traktował teorię mnogości bardziej jako narzędzie do rozwiązywania matematycznych problemów, niż samą w sobie dziedzinę, przeznaczoną do rozwijania. Była to dla niego dziedzina, umożliwiająca odwoływanie się do pewnych naoczności, czyniąc podstawy matematyki bardziej przejrzystymi i pewnymi.

Jeśli chodzi o specyfikę perspektywy badawczej, przeanalizowano podstawową strukturę relacyjną w konstrukcji liczb rzeczywistych obydwu matematyków, a także przykładowe kwestie (różnoliczność zbiorów nieskończonych u Cantora oraz twierdzenie o indukcji zupełnej u Dedekinda), związane bezpośrednio z teorią mnogości.

W przypadku podstawowej struktury relacyjnej konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych u Cantora wskazaliśmy relację kongruencji, która była relacją określoną na ciągach „tworzących" liczby, nie zaś na samych liczbach rzeczywistych. U Dedekinda taką relacją była relacja dwóch zbiorów, złożonych z liczb rzeczywistych, wyznaczanych jednoznacznie przez przekrój Dedekinda – była więc to relacja ograniczona do poziomu samych liczb rzeczywistych. O ile więc Cantor brał pod uwagę więcej szczegółów, o tyle Dedekind ograniczał się do kwestii koniecznych. Jednakże jednocześnie Cantor nie potrafił na problemy matematyczne popatrzeć z perspektywy strukturalnej, o czym świadczy niezupełnie formalne wykluczenie nieskończenie małych z jego konstrukcji R, przy jego negatywnym do nich podejściu. Natomiast Dedekind, chociaż ograniczał badane kwestie, potrafił skutecznie opracować w pełni wybrane struktury, o czym świadczy kategoryczność jego modeli liczbowych N i R, w tym odporność jego konstrukcji liczb rzeczywistych na wielkości aktualnie nieskończenie małe.

Jeśli chodzi o przykłady dotyczące bezpośrednio teorii mnogości, które potwierdzają wymienioną różnicę pomiędzy metodologią Cantora i Dedekinda, w kontekście tego pierwszego zostało wskazane, że sam fakt odkrycia różnic w zbiorach nieskończonych go zaskoczył i poświęcił on następnie część swoich wysiłków badawczych na ulepszanie dowodu odkrytego faktu. Istotne jest tu, że problem odkrył, badając właściwości zbiorów nieskończonych, a więc bezpośrednio w trakcie prac nad teorią mnogości, po czym rozwijał go również wewnątrz tej teorii. Wobec trzech wersji twierdzenia o indukcji zupełnej Dedekinda można wskazać, że wszystkie te wersje, opracowane zostały w ścisłym kontekście teoriomnogościowego modelu arytmetyki liczb naturalnych. Dwie pierwsze wersje były przedstawione w oderwaniu od arytmetycznych intuicji, natomiast ostatnia nawiązywała bezpośrednio do N. Miało to na celu zdefiniowanie liczb naturalnych poprzez teoriomnogościowy model.

Ostatecznie zarówno w kontekście konstrukcji R, jak i teorii mnogości perspektywa Cantora została zdefiniowana jako wewnąrz-strukturalny, natomiast perspektywa Dedekinda jako nad-strukturalna. Motywujemy to tym, że Cantor za obiekty intencji obierał poszczególne elementy konstruowanych struktur oraz samo konstruowanie, nie zaś bezpośrednio całe struktury – w przeciwieństwie do Dedekinda, który wprowadzał całe struktury w sposób zamierzony oraz precyzyjny i konsekwentny.

Jeśli więc chodzi o podstawowe różnice w praktyce matematycznej analizowanych matematyków, można powiedzieć, że z punktu widzenia założeń, celów jak i samej metodologii matematyki są to różnice zasadnicze.

Pierwszą różnicę dostrzegamy w tym, że Cantor wystrzegał się u źródeł wiedzy matematycznej intuicji i jakiegokolwiek doświadczenia, natomiast Dedekind korzystał z pewnego rodzaju podstawowej, oczywistej naoczności u podstaw tworzonych przez siebie struktur. Drugą różnicę dostrzegamy w tym, że o ile Cantor, uważał że można stosować poprzez ogólne analogie teorię mnogości nawet do problemów pozamatematycznych, Dedekind opracowywał jedynie ściśle określone i efektywne modele dla problemów jedynie matematycznych. Ostatnia różnica odnosi się do opisanej dla każdego z matematyków perspektywy badawczej. Cantorowi przypisujemy perspektywę wewnątrz-strukturalną, charakteryzującą się niższym poziomem abstrakcji, natomiast Dedekindowi przypisujemy perspektywę nad-strukturalną, charakteryzującą się wyższym poziomem abstrakcji[866].

Nie będziemy tu wkraczać w obszerną dyskusję na temat psychologizmu, czyli nie bierzemy pod uwagę wpływu psychologicznych czynników, wymykających się logicznej i czysto racjonalnej analizie. Natomiast nie wykluczamy, iż całokształt osobowości danego matematyka, ukształtowany przez różnorakie czynniki zewnętrzne i wewnętrzne, w jakiś

866 Różnicę tę tłumaczymy strukturalizmem epistemologiczno-metodologicznym rozpoznanym u Dedekinda, lecz nie u Cantora. Dedekind stosował metodę modelowania teoriomnogościowego do podstaw oraz innych dziedzin matematyki (jak np. arytmetyka liczb rzeczywistych, naturalnych czy algebra) wykonując tym samym matematyczną abstrakcję. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów..., dz. cyt.*, 63; E. Reck, *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics..., dz. cyt.*; W. Wójcik, *Koncepcja dowodu a struktura rozwoju nauki..., dz. cyt.* Nie zajmował się on tym, co znajdowało się poza konkretną częścią matematycznej wiedzy, jaką się sam zajmował. Tak było np. w związku z problemem wielkości nieskończenie małych, do którego nie nawiązał ani w swojej wersji teorii mnogości, ani w swoim sposobie rozwiązania problemu niewymierności. W jednym rozdziale pracy *Was sind und was sollen die Zahlen?* Dedekind opracował temat nieskończenie małych. Nie stanowiły one dla niego problemu, tj. dokładnie opisał, o jakie nieskończenie małe mu chodzi oraz w jakim kontekście ich używa. Mimo to jego linia prosta, jego skonstruowany zbiór liczb rzeczywistych nie dopuszczała istnienia nieskończenie małych. Wykazywali to Stolz (O. Stolz, *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, „Mathematische Annalen" 22, (1883), 504–519; O. Stolz, *Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen*, „Mathematische Annalen" 31, (1888), 601–604.) i Vivanti (G. Vivanti, *Sull'infinitesimo attuale*, „Rivista di matematica" 1, (1891), 135–153; G. Vivanti, *Ancora sull'infinitesimo attuale*, „Rivista di matematica" 1, (1891), 248–255.), którzy utożsamili prostą geometryczną z ciągłą linią prostą Dedekinda (odnośnie do systemów z nieskończenie małymi warto wspomnieć również o pracach Paula du Bois-Reymonda, nad tempem wzrostu funkcji, por. P.D. Bois-Reymond, *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions..., dz. cyt.*; P.D. Bois-Reymond, *Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls*, „Mathematische Annalen" 11, (1877), 149–167.). I choć w 1899 pojawiła się praca Hilberta (D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Leipzig 1899.), w której nieskończenie małe „segmenty" linii, a także liczby je mierzące zostały wprowadzone formalnie do analizy standardowej (P. Ehrlich, *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes..., dz. cyt.*, 4.), nie należy zapominać, iż prosta geometryczna nie jest dokładnie (co do istoty) tym samym, co prosta, którą wprowadził Dedekind wraz ze swoją zasadą ciągłości.

sposób może wpływać na pewną decyzyjność, kierunek czy sposób podejmowanych matematycznych badań. Stąd mówiąc o wpływie założeń filozoficznych na tworzoną matematykę, nie można pomijać czynników osobistych podmiotu matematycznego, w których da się upatrywać przynajmniej części powodów dla podejmowanych działań (motywacji) czy sposobu ich przeprowadzania. W tym kontekście możemy zauważyć, że praktyka[867] Cantora była pod wskazanymi w niniejszym rozdziale względami inna niż praktyka Dedekinda. O ile Dedekind wykonywał matematyczną pracę, opracowując zamierzone, abstrakcyjne modele matematyczne, o tyle Cantor, działając najpierw w ramach istniejących zakresów wiedzy, opracowywał ich szczegóły, np. w przypadku powstania teorii mnogości wyodrębniał podzakres problemowy, jaki stawał się samodzielnym, nowym zakresem badawczym[868].

Powyższe może stanowić pewnego rodzaju wyjaśnienie, dlaczego zauważamy różnice między deklarowanymi i przypisywanymi Cantorowi i Dedekindowi założeniami filozoficznymi, które są *de facto* zbieżne z nakreślonymi okolicznościami praktyki matematycznej, niezależnymi od samego przedmiotu matematyki. Mogą występować naturalne różnice pomiędzy indywidualnymi podmiotami w kontekście ich podejścia do założeń, celów, oraz również metodologii, które jednak nie przekładają się na filozoficzne przesłanki i kierunki (konstrukcjonizm i dwuwymiarowy realizm), wyznaczane w pewnym zakresie też przez samą matematykę.

Stąd strukturalizm epistemiczno-metodologiczny, jaki charakteryzuje proponowane ramy filozoficzne (tj. proponowany konstrukcjonizm i realizm) w przypadku Dedekinda, nie występuje zaś u Cantora (na pewno nie w takiej postaci i formie, jak u matematyka z Brunszwiku), może być wyjaśniony indywidualną różnicą między scharakteryzowanymi okolicznościami praktyki matematycznej obu matematyków. Uczynił on teorie wprowadzane przez Dedekinda efektywniejszymi i poprawniejszymi od niektórych propozycji Cantora.

[867] Mimo wielu podobieństw, charakterystycznych dla samej praktyki matematycznej (tj. wykorzystywanych metod, znaczeń czy ogólnych celów i narzędzi), a także dla dziewiętnastowiecznego stylu matematycznego, zbieżnego ze stylem matematyki niemieckiej, można zauważyć różnice dotyczące przede wszystkim motywacji dla podejmowanych badań, a także szczegółowego sposobu i kierunku ich przeprowadzania. Owe różnice mogą wynikać z unikalnych cech każdego podmiotu matematycznego. Jest to zbieżne z argumentacją popierających tezę o matematyce ucieleśnionej, przeciwko temu, aby nie utożsamiać umysłu człowieka z komputerem (ponieważ umysł człowieka to nie same, „czyste" procesy obliczeniowe). Por. L. Shapiro, S. Spaulding, *Embodied Cognition*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.

[868] Mógł on tym sposobem tracić niekiedy całościową perspektywę matematyczną, potrzebną do prawidłowego rozwiązania niektórych problemów, mogło to więc pociągać za sobą epistemologiczno-naukowe komplikacje .

7 *Zakończenie i wnioski końcowe*

7.1 Podsumowanie

Praca zawierała próbę rekonstrukcji oraz analizę porównawczą założeń filozoficznych Georga Cantora i Richarda Dedekinda, dokonaną w oparciu o analizę ich praktyki matematycznej. Dodatkowo analizowano zestawienie zrekonstruowanych założeń, z wybranymi założeniami filozoficznymi, jakie były im przypisywane na podstawie niematematycznych wypowiedzi lub filozoficznych interpretacji określonych deklaracji poczynionych w konekście teorii matematycznych. W celu głębszego wyjaśnienia różnicy pomiędzy wymienionymi założeniami, przeanalizowane zostały również okoliczności praktyki matematycznej obydwu matematyków.

Podstawowym celem pracy była analiza założeń filozoficznych, dotyczących konstrukcji liczb rzeczywistych, teorii mnogości, i arytmetyki liczb naturalnych. Założenia filozoficzne dotyczące tych trzech aspektów fundamentów matematyki były rekonstruowane oraz porównane przy pomocy podstawowej metodologii działania, czyli analizy praktyki matematycznej, inspirowanej wprowadzonym przez Michała Hellera rozróżnieniem *filozofii nauki* oraz *filozofii w nauce*, uzupełnionym o podstawowe założenia filozofii praktyki matematycznej.

Zrekonstruowano trzy istotne aspekty filozofii matematyki Cantora i Dedekinda: konstrukcjonizm epistemologiczny, realizm ontologiczny, a także związany z nimi oboma strukturalizm (u Cantora był to jedynie strukturalizm ontologiczny, u Dedekinda dodatkowo strukturalizm metodologiczno-epistemologiczny). Konstrukcjonizm epistemologiczny tłumaczyliśmy niezbędnością aktywnych i twórczych procesów umysłowych podmiotu matematycznego (jednak nie w oderwaniu od dorobku matematycznego) w kontekście konstrucji matematycznych struktur, natomiast realizm – niezbędnością pragmatycznego założenia o istnieniu abstrakcyjnych obiektów, które są przedmiotem zarówno indywidualnej praktyki, jak i wiedzy obiektywnej (tj. wytworem praktyki społeczno-historycznej).

Założenia (czy też aspekty) filozoficzne, zrekonstruowane w oparciu o analizę praktyki matematycznej zostały porównane – najpierw założenia zrekonstruowane dla Cantora z tymi zrekonstruowanymi dla Dedekinda, a następnie założenia zrekonstruowane zostały porównane z założeniami przypisywanymi tym matematykom, na podstawie ich deklaracji lub pozamatematycznych wypowiedzi.

Najważniejszymi wnioskami niniejszej pracy jest to, że:

1. W rekonstruowanych, w oparciu o analizę wprowadzania matematycznych treści (czyli o to, co się w matematyce robi), założeniach i przesłankach filozoficznych zauważono jedynie jedną ważną różnicę pomiędzy Cantorem i Dedekindem (strukturalizm epistemiczno-metodologiczny), która jednak nie wpływa istotnie na wspólne ramy filozoficzne, wypracowane jednakowo dla obu matematyków (tj. na konstrukcjonizm i realizm).
2. Zauważono więcej różnic pomiędzy:
    a. założeniami filozoficznymi Cantora i Dedekinda, opartymi na ich wypowiedziach i deklaracjach pozamatematycznych (na podstawie tego, „co się o matematyce mówi”),
    b. oraz charakterystyką praktyki matematycznej obydwu matematyków, rekonstruowaną na podstawie analizy ich założeń, celów oraz relacji do matematycznych treści (tj. na podstawie tego, „co się myśli, że się w matematyce robi”),

gdzie pierwsze są między sobą zasadniczo różne u Cantora i Dedekinda (opierają się na tradycyjnej dychotomii platonizm (odkrywanie istniejącej niezależnie rzeczywistości) – konstruktywizm (nieograniczone tworzenie umysłowej rzeczywistości), zaś drugie stanowią ścisły kontekst i skutek dyskutowanych ram filozoficznych dla obu matematyków.

Różnice pomiędzy dyskutowanymi, jak i rekonstruowanymi założeniami tłumaczymy znaczeniem indywidualnej praktyki matematycznej oraz jej scharakteryzowanymi okolicznościami, gdzie obserwujemy zarówno wpływ ich świadomych założeń filozoficznych, celów, oraz indywidualnych uwarunkowań determinujących w pewnym zakresie metodologię (różniących się między sobą w sposób zasadniczy), jak i aspekty wynikające z obiektywnej matematycznej teorii (pozwalające się scharakteryzować we wspólnych ramach dla obu matematyków). Stąd oprócz analizy samych matematycznych tekstów oraz analizy porównawczej filozoficznych założeń podjęta została próba scharakteryzowania okoliczności praktyki naukowej obu matematyków (ich naukowe założenia, cele). Przeanalizowano w tym celu ich założenia o źródle wiedzy matematycznej, podejście do wykorzystania i stosowania teorii mnogości, a także opisano wybrane aspekty ich matematycznego oglądu podstaw matematyki.

Niniejsza praca – jako studium przypadku działalności matematycznej Georga Cantora i Richarda Dedekinda w zakresie podstaw matematyki – może stanowić pewien wkład w rozważania o rozwoju matematycznej wiedzy. Mimo iż przedstawia dyskusję w obrębie zagadnień należących raczej do klasycznej filozofii matematyki, rozprawa proponuje nieco szerszą niż klasyczna filozofia matematyki perspektywę do rozważań tej dyskusji.

Praca ta stanowi argument, że rozwój matematycznej wiedzy nie powinien być ograniczany żadnym systemem filozoficznym – to raczej filozofia powinna podążać za praktyką matematyczną w jej różnorodnych odsłonach (rozróżnialnych ze względu na samą materię teorii matematycznych, uwarunkowania poszczególnych, indywidualnych praktyk, jak i kontekst społeczno-historyczny). Po to, aby filozofia nie ograniczała rozwoju matematycznej wiedzy, ale aby służyła lepszemu zrozumieniu przemian w niej zachodzących. Jest to zgodne z tym, co proponuje Michał Heller, aby poddać analizie m.in. wpływy filozoficznych założeń na rozwój naukowych teorii, klasyczne filozoficzne problemy będące uwikłanymi w naukowe teorie oraz filozoficzne refleksje dotyczące założeń teorii naukowych.

7.2 Czy cele pracy zostały osiągnięte?

Celem, jaki postawiliśmy, była analiza porównawcza stanowisk Cantora i Dedekinda. Analiza ta zorganizowana została wokół dwóch tez: pierwszej osłabiającej powszechne radykalne rozróżnianie Cantor-platonik i Dedekind-konstruktywista. Druga teza natomiast wskazywała, że najważniejsze różnice pomiędzy filozofią matematyki obu uczonych wyraża się na płaszczyźnie metodologicznej, a nie ontologicznej czy nawet epistemologicznej.

W celu uzasadnienia tych tez głównych wprowadzono szereg tez pomocniczych. Tezy pomocnicze związane były bezpośrednio ze wspólnymi ramami filozoficznymi, jakie nakreślono w pracy wspólnie dla obydwu matematyków. Wspólną ramą interpretacyjną stała się propozycja Hellera, aby skupić się na filozofii w matematyce (jako zastosowaniu koncepcji filozofii w nauce odnośnie do matematyki), zamiast typowego interpretowania tekstów deklaracji uczonych. Dzięki temu poszerzono zakres pytań filozofii matematyki o kwestie związane z perspektywą nie tylko samej matematyki, ale również z perspektywą całościowej praktyki matematycznej, która uwzględnia nie tylko matematyczny przedmiot, ale również podmiot.

Teza I

Jeśli chodzi o Tezę I, została ona uzasadniona dwojako. Po pierwsze, wskazano takie elementy rekonstruowanych ram filozoficznych praktyki matematycznej Cantora i Dedekinda, które pojedynczo odnoszą się do dyskutowanych propozycji filozoficznych (platonizm Cantora i konstruktywizm Dedekinda). Po drugie, samo wypracowanie wspólnych ram filozoficznych dla ich praktyki w zakresie podstaw matematyki bezpośrednio odnosi się do dychotomii Cantor-platonik i Dedekind-konstruktywista, osłabiając ją poprzez pokazanie odmiennej alternatywy interpretacyjnej, wskazującej istnienie wielu pokrewieństw ich stanowisk.

U Cantora znajdujemy elementy konstrukcjonizmu, ponieważ pokazujemy, że jego konstrukcje matematyczne wymagały twórczego, intencjonalnego zaangażowania umysłu, a także, że konstrukcje te dotyczyły ostatecznie nowych, wprowadzanych przez niego (mniej lub bardziej intencjonalnie i naocznie) struktur. Bezpośrednio osłabia to deklarowany przez niego platonizm, czyli takie stanowisko, że matematyk odkrywa w istocie idee, jakie istnieją poza nim niezależnie od tego, czy o nich wie, czy też nie.

W przypadku Dedekinda wskazywano, że rekonstruowany, ramowy konstrukcjonizm był ściśle zależny od strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego. Przypisywany badaczowi konstruktywizm, rozumiany jako nieograniczone tworzenie wiedzy jedynie w kontekście umysłu i przez umysł, był osłabiany wskazaniem na metodę modelowania, której towarzyszyły – oprócz intencjonalnej konstrukcji – również odniesienia do wiedzy dziedziczonej.

Dodatkowo ustalono, że obiektom praktyki matematycznej można przypisać pewien dwuwymiarowy realizm ontologiczny (uwzględniający istnienie abstrakcyjne matematycznych obiektów zarówno względem indywidualnej praktyki matematycznej, jak i względem perspektywy historyczno-społecznej), który osłabia przypisywany mu konceptualizm.

Z kolei argumentowanie przeciwko radykalnemu platonizmowi u Cantora nie oznacza że jego praktyce matematycznej nie możemy przypisać pewnego, proponowanego dla Dedekinda, wewnętrznego realizmu. Jednak jeśli weźmiemy pod uwagę tylko perspektywę wewnętrzną względem indywidualnej praktyki matematycznej (jak również względem perspektywy historyczno-społecznej), założenia o radykalnym platonizmie jako o zewnętrznym realizmie obiektów matematycznych oraz o niezależności matematycznych obiektów od matematycznego podmiotu wydają się zewnętrzne i niekonieczne.

Zrekonstruowane, wspólne dla Cantora i Dedekinda ramy filozoficzne wyznaczane przez epistemiczny konstrukcjonizm oraz ontologiczny realizm pragmatyczny (dookreślone odpowiednio aspektami strukturalizmu) stanowią dla dyskutowanej dychotomii platonizm-konceptualistyczny konstruktywizm istotną alternatywę, powstałą dzięki poszerzeniu perspektywy badawczej o koncepcje Hellera i filozofię praktyki matematycznej. O ile platonizm matematyczny kładł nacisk na niezależne od podmiotu istnienie obiektów matematycznych, o tyle konstruktywizm na wytwarzanie matematyki przez umysł (oraz w umyśle), tak proponowane zestawienie konstrukcjonizmu-realizmu wewnętrznego, bierze pod uwagę zarówno umysłowe procesy konstrukcyjne indywidualnego podmiotu, jak i pewnego rodzaju istnienie matematyki, jako niezależnego wytworu historyczno-społecznego.

Ostatecznie można uznać, że główna teza rozprawy (I) jest w pracy uzasadniona: tezy dodatkowe (a-d) w znacznej mierze wykazują, że określenia Cantor-platonik oraz Dedekind-konstruktywista (konceptualista) mogą być osłabione, a propozycja rekonstruowanych w niniejszej pracy wspólnych ram filozoficznych konstrukcjonizm-realizm osłabia bezpośrednio samą dychotomię Cantor-platonik vs. Dedekind-konstruktywista, wskazując dla niej pewną alternatywę.

Teza II

Tezy II dotyczyła tego, że same praktyki matematyczne analizowanych matematyków, różnią się między sobą w znacznie bardziej fundamentalny sposób niż rekonstruowane tutaj założenia i przesłanki filozoficzne. Teza II stanowiła dodatkowo w niniejszej pracy próbę odpowiedzi na pytanie o różnicę między wypracowanymi wspólnymi ramami tworzonymi przez epistemiczny konstrukcjonizm oraz ontologiczny realizm a dyskutowaną dychotomią platonizm-konstruktywizm.

Najważniejszym wnioskiem, który uzyskano na podstawie badania okoliczności praktyki matematycznej Cantora oraz Dedekinda[869], jest to, że różnice pomiędzy deklarowanymi (i przypisywanymi w oparciu o pewne filozoficzne schematy) założeniami filozoficznymi a założeniami i przesłankami rekonstruowanymi w niniejszej pracy mogą być tłumaczone różnicami między indywidualnie dla każdego matematyka określanymi okolicznościami jego matematycznej praktyki, czylitj. pewnymi założeniami o źródle matematycznej wiedzy, celami matematycznymi, jak i – w pewnym zakresie – przyjmowaną

[869] Należy zauważyć, że okoliczności również należą do samej praktyki, a więc określona różnica między nimi skutkuje taką różnicą pomiędzy praktykami odpowiednio obu matematyków.

metodologią tej praktyki. To ostatnie stanowi również wyjaśnienie dla zauważonego strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego, jaki dookreślał konstrukcjonizm Dedekinda.

Analizy praktyki matematycznej przeprowadzane w niniejszej pracy pozwoliły w istocie uchwycić charakterystyczne różnice pomiędzy okolicznościami tych praktyk, właściwymi dla każdego z matematyków indywidualnie.

Pierwsza różnica dotyczyła założeń o źródle wiedzy matematycznej, które to założenia u Cantora przybierały formę apriorycznej wiary w zdolność umysłu do odkrywania czystej istniejącej wcześniej matematycznej wiedzy, z odrzuceniem doświadczenia oraz intuicji, natomiast u Dedekinda były związane z poczuciem możliwości twórczego wykorzystania umysłu dla rozwoju matematycznej wiedzy. Można zauważyć, że przekonania te są zbieżne z deklarowanymi przez niego i przypisywanymi mu założeniami.

Kolejno można wskazać różnicę w zakresie celowości i stosowalności wiedzy matematycznej, głównie w odniesieniu do teorii mnogości. Warto podkreślić fakt, iż teoria ta i jej rozwijanie były dla Cantora przede wszystkim celem samym w sobie. Jeśli nawiązywał do jej wykorzystywania w stosunku do innych problemów, robił to w sposób ogólny i opierał się na już gotowych analogiach. W przypadku Dedekinda wskazane zostało, iż traktował on teorię mnogości raczej jako narzędzie do rozwiązywania matematycznych problemów, aniżeli odrębną dziedzinę do rozwijania.

Ostatnią różnicą, na jaką zwrócono uwagę, była różnica między perspektywą Cantora oraz Dedekinda konstrukcji liczb rzeczywistych oraz samej teorii mnogości. Zarówno w kontekście konstrukcji R, jak i teorii mnogości perspektywa Cantora została zdefiniowana jako wewnąrz-strukturalna, natomiast perspektywa Dedekinda jako nad-strukturalna. Umotywowaliśmy to tym, że Cantor za obiekty intencji obierał poszczególne elementy konstruowanych struktur oraz samo konstruowanie, nie zaś bezpośrednio całe struktury, w przeciwieństwie do Dedekinda, który wprowadzał całe struktury w sposób zamierzony oraz precyzyjny i konsekwentny.

7.3 Perspektywa dalszych badań

Należy wspomnieć na zakończenie jeszcze o tym, jakie dalsze perspektywy badawcze otwierają się przed analizami porównawczymi Cantora i Dedekinda. Przede wszystkim należy zauważyć iż nie omówiono całego dorobku matematycznego obu uczonych, ani też nie zbadano ich dzieł na tle współczesnej matematyki. Skupiono się na określonym zakresie podstaw matematyki, z czego bardziej szczegółowo porównano ze współczesną matematyką kwestie konstrukcji liczb rzeczywistych.

Nie rozpatrzono też wszystkich przypisywanych tym matematykom aspektów filozoficznych. Skupiono się na kwestiach, jakie bezpośrednio związane są z dychotomią odkrywanie-tworzenie. Zarówno dyskutowany konceptualistyczny konstruktywizm i platonizm (radykalny realizm), jak i rekonstruowany konstrukcjonizm epistemologiczny i ontologiczny, dwuwymiarowy realizm są aspektami filozofii matematyki, które odnoszą się do pytania o to, jak może ta wiedza powstawać i być rozwijana w kontekście indywidualnej praktyki matematycznej – dyskutowaną opozycję deterministyczne odkrywanie – solipsystyczne tworzenie przełamano uzupełniającą się propozycją konstruowanie – istnienie.

Należy przy tym zaznaczyć, iż nie było w niniejszej pracy podnoszone bardziej podstawowe pytanie o źródło wiedzy matematycznej – czy matematyka jest jedynie wyrazem konwencji językowej lub sposobu racjonalności, czy też może reprezentacją struktury świata, jak i umysłu człowieka. Innymi słowy, nie odnosiliśmy się do kwestii zależności między wspomnianymi dwoma światami Poppera a opisywanym przez niego światem I (tj. światem „fizycznym"). Ta kwestia, jak sądzimy, wymagałaby wielu osobnych badań, szczególnie w połączeniu z bardziej szczegółowymi badaniami kwestii zarówno kognitywistycznych[870] czy fenomenologicznych[871] (jak funkcjonuje umysł podmiotu tworzącego matematykę), kwestii historyczno-filozoficznych[872] (jaka jest geneza poszczególnych problemów i podejść matematycznych), jak i kwestii kulturowo-społecznych[873] (na ile w matematyce znaczenie poszczególnych problemów i pojęć przyjmuje charakter konwencji, tj. na ile – i od czego to

[870] Perspektywa kognitywistyczna szerzej jest opisana np. przez Hohola w: B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny..., dz. cyt.*; M. Hohol, *Podstawy neuronauki poznawczej*, w: *Prawo i nauki kognitywne*, red. B. Brożek, Ł. Kurek, J. Stelmach, Warszawa 2008, 13–36; M. Hohol, K. Cipora, *Perspektywy i granice ucieleśnionego poznania matematycznego*, w: *Filozofia matematyki i informatyki*, red. R. Murawski, Kraków 2015, 119–140.

[871] Propozycje fenomenologii matematyki przedstawił np. Husserl. Por. M. Hartimo, *Husserl's Transcendentalization of Mathematical Naturalism*, „Journal of Transcendental Philosophy" 3, (2020) nr 1, 289–306; M. Hartimo, *Husserl and Mathematics*, Cambridge 2021; M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic..., dz. cyt.*; E. Husserl, *Formal and Transcendental Logic..., dz. cyt.*; E. Husserl, *Badania logiczne. T. 2: Badania dotyczące fenomenologii i teorii poznania. Część 2..., dz. cyt.*

[872] Por.J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym..., dz. cyt.*; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów..., dz. cyt.*

[873] Por.P. Ernest, *Social constructivism as a philosophy of mathematics*, New York 1998; S. Haslanger, *Ontology and social construction*, „Philosophical Topics" 23, (1995) nr 2, 95–125, doi: https://doi.org/10.5840/philtopics19952324; J. Rytilä, *Social constructivism in mathematics?..., dz. cyt.*

zależy – owe problemy i pojęcia mogą być modyfikowane i uwzględniane bądź nie). Skupiliśmy się – z racji przedmiotu pracy, tj. analizy praktyki matematycznej dwóch matematyków – na wybranych aspektach procesu konstrukcji matematycznej, należących do świata II oraz na ich związkach ze światem III (obiektywnej wiedzy matematycznej).

Jeśli chodzi o propozycje samej filozofii praktyki matematycznej, należy również zauważyć, iż niniejsza rozprawa nie wyczerpuje wszystkich kwestii, jak i metod, które są zaliczane do zakresu filozofii praktyki matematycznej (a jakie zostały pokrótce opisane na początku pracy). Jessica Carter wskazuje, iż można pytać o naturę matematycznych obiektów, o to, co o nich wiemy, o tworzenie matematycznych treści, uczenie się ich lub wykorzystywanie w innych dziedzinach nauki. Wyróżnia ona trzy główne kierunki w podejściach badawczych PMP: oparte na ludzkich agentach (w tym socjologiczne i pragmatyczne), istoryczne (zawierające analizy różnego rodzaju związków pomiędzy historią, filozofią oraz matematyką) oraz epistemologiczne (uwzględniające ontologię, epistemologię oraz prace w zakresie podstaw matematyki)[874]. Jak wskazano podejście niniejszej pracy można umiejscowić w obrębie epistemicznego PMP oraz w pewnym sensie również w perspektywie ludzkich agentów, jako że rozprawa skupia się na dwóch konkretnych matematykach.

W dalszej perspektywie możliwe jest rozwinięcie i dopracowanie zrekonstruowanych ram filozoficznych konstrukcjonizm-realizm-(strukturalizm), wykorzystanie analiz niniejszej pracy (okoliczności praktyki matematycznej, zawierających założenia, cele i metody). Na tej podstawie można opracować charakterystykę styli matematycznych obydwu matematyków[875] i bardziej szczeółowo kwestię analizy obiektów matematycznych Cantora i Dedekinda w perspektywie ciągłości ich istnienia historyczno-społecznego.

Przewidując ewentualne zarzuty wobec samej PMP, której podstawowe założenia są podstawą tez niniejszej pracy, można naświetlić podejście, jakie prezentuje Sébastien Gandon w swoim artykule *Quelle philosophie pour quelle mathématique ?* Opisuje on filozofię praktyki matematycznej jako jedynie kolejny przejaw kryzysu w filozofii matematyki, nie zaś remedium

[874] J. Carter, *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†..., dz. cyt.*, 6.

[875] Por. z opisem analizy całościowej praktyki matematycznej w: P. Mancosu, *Mathematical Style..., dz. cyt.*

na niego, a także gdy określa pracę nad „case studies" matematyki, jako z reguły skazaną na niedopasowanie do wypracowanych ram pojęciowych z zakresu filozofii[876].

Odpowiadając na zarzut Gandona, należy podkreślić przede wszystkim, iż jego rozumienie filozofii matematyki w przytaczanym tu artykule jest dość wąskie, ponieważ obejmuje wyłącznie określenie filozofii matematyki jako wspólnej siatki pojęciowej, łączącej obie dyscypliny – matematykę i filozofię. W odpowiedzi na to możemy powołać się na opracowaną przez Michała Hellera koncepcję „filozofii w nauce". W jej kontekście propozycja analizy praktyki matematycznej wydaje się niezbędnym elementem całości badań filozoficznych, jakie można przeprowadzać względem matematyki. Nie sądzimy, iż w badaniach filozoficznych (matematyki) chodzi o zbudowanie jedynego, stabilnego, pewnego, nienaruszalnego i niesprzecznego programu. Taki bowiem mógłby samą matematykę ograniczać lub w nią ingerować. Chodzi raczej o rozwój (również samej filozofii) oraz o nieustanne poszukiwanie nowych pytań, a te rozwijająca się matematyka z pewnością jest w stanie filozofom zapewnić.

W świetle analiz i wyników niniejszej pracy, należy zwrócić uwagę na potrzebę szerszych i dokładniejszych analiz użytych tu pojęć intencji oraz intuicji matematycznej, zwłaszcza na bazie współczesnych badań kognitywistycznych. Warto poszerzyć liczbę analiz przypadków (*case study*) również o przykłady współczesnej praktyki matematycznej i wzbogacić je o zaproponowane tutaj ramy filozoficzne.

Na zakończenie poruszymy dwie kwestie, które wydają się nader interesujące do rozpatrzenia oraz mogą przynieść wyniki wyjaśniające wiele pytań w zakresie tak filozofii matematyki, jak i filozofii praktyki matematycznej. Pierwsza dotyczy samej matematyki, czyli problemu nieskończoności, druga zaś – praktyki matematycznej, czyli jest to propozycja fenomenologii matematyki. Obiecujące wyniki – jak sądzimy – mogłoby przynieść rozpatrywanie tych kwestii jako wzajemnie uzupełniających się i wyjaśniających.

W analizach rozprawy podkreślony został temat samej nieskończoności jako problemu nie tylko matematycznego, ale również filozoficznego. Zastanawiający jest zaobserwowany fakt, iż pomimo różnic między praktykami matematycznymi Cantora i Dedekinda, wskazane zostały pewne podobieństwa w podejściu do nieskończenie dużych wielkości, jak również do wielkości nieskończenie małych, gdzie różnice w podejściu do nieskończenie małych, przy

[876] S. Gandon, *Quelle philosophie pour quelle mathématique?...*, *dz. cyt.*

uwzględnieniu wpływów ówczesnych paradygmatów, tłumaczono odmiennością ich indywidualnych praktyk.

Bez względu na to, czy przyjmujemy za Arystotelesem podział na nieskończoność aktualną i potencjalną, czy tego podziału nie przyjmujemy, widać, iż pojęcie to, a także wszelka treść, jaka może się za nim kryć, nie są wyczerpywane przez matematyczne teorie i język – jeśli rozpatrywać nieskończoność wobec istniejącej niezależnie od podmiotu idei. Można to zauważyć w szczególności na przykładzie podejścia Cantora i Dedekinda do kwestii „dużej" nieskończoności. Wprawdzie obydwaj formalnie wprowadzili do matematyki aktualne nieskończenie duże wielkości, zbiory , mieli problem – co później zwerbalizował Hilbert[877] – aby opisać czy ująć jej całą treść.

Z drugiej strony, można rozpatrywać kwestię nieskończoności z takiej perspektywy – poprzez wskazywanie w niniejszej pracy twórczych, oryginalnych, jak również decyzyjnych elementów praktyki matematycznej zarówno Cantora, jak i Dedekinda – iż to podmiot matematyczny i jego umysł jest źródłem owej nieskończoności matematycznej. W tym kontekście nieredukowalność świata matematyki[878] mogłaby skutkować nieredukowalnością samego wytwarzającego ten świat podmiotu. Nieskończoność – jako byt wyróżniający się zasadniczo spośród innych bytów i wytworów matematycznych – może stanowić istotną charakterystykę tak matematyki (przedmiotu), jak i matematycznego podmiotu. Pomimo powstałych prac, angażujących kwestię nieskończoności w ramach rozwiązywania zagadnień z zakresu filozofii osoby[879], jest to nadal bardzo szeroki temat do dalszych badań i analiz.

Drugą kwestią, jaką można rozwinąć, jest fenomenologia matematyki. Metoda ta mogłaby pomóc w przeanalizowaniu kwestii nieskończoności matematycznej, bez konieczności zakładania przez którąś ze stron podziału odkrywanie-tworzenie. Metoda fenomenologiczna Edmunda Husserla, podobnie jak naturalizm Penelope Maddy – co

[877] D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff...*, *dz. cyt.*, 183–184. Tłumaczenie za: J. Dadaczyński, *Ontologia matematyki wczesnego Hilberta (The Early Hilbert's Ontology of Mathematics)...*, *dz. cyt.*, 80–81 przyp.5.

[878] J. Urbaniec, *Trzeci świat Karla Poppera*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" VIII, (1986), 77.

[879] J. Dadaczyński, *Pojęcie boskiej wiecznej teraźniejszości… w kontekście matematycznej analizy niestandardowej*, 34, (2013) nr 1, 31–43; K. Tytko, *Modele wartości godności człowieka i kwestia sprawiedliwości...*, *dz. cyt.*; K. Tytko, *Wartość godności osoby w kontekście zależności społecznych. Modelowanie grafowe...*, *dz. cyt.*

zauważają Mirja Hartimo[880], jak również Mary Leng[881] – stanowią próby badania matematyki i jej wewnętrznych celów. Jednakże tym, co odróżnia metodę fenomenologiczną od metody proponowanej np. przez Penelope Maddy[882], jest dodatkowa, transcendentalna perspektywa, która pozwala badać różne kwestie, nie zmuszając do ograniczania lub redukowania tego, co już w matematyce odkryte lub proponowane[883].

Husserl uważał, że choć nauka jest tworem kulturowym, to jednak jest ona wspólnym dziełem wszystkich naukowców, którzy ją współtworzyli. Postulował on wejście lub stanięcia we „wspólnotę empatii" (*Einfühlungsgemeinschaft*)[884] z matematykami, aby zrozumieć kulturową praktykę matematyczną z perspektywy historycznej. W kontekście niniejszej pracy w taką „wspólnotę empatii" możemy wejść z poszczególnymi matematykami. Owo wejście we „wspólnotę empatii" Husserl określa jako „badanie sensu" (*Besinnung*)[885], które ma umożliwić zbadanie celów matematyków[886]. Odnośnie do nieskończoności, tak jak to robimy w tej rozprawie, moglibyśmy brać pod uwagę zarówno podstawowe założenia, cele, metody, jak i wyniki badań matematycznych.

Oprócz powyższego, należałoby w ramach badania nieskończoności przyjąć podejście, jakie zostało tutaj przyjęte oraz jakie prezentuje Bartłomiej Skowron: podejście, które postuluje traktowanie matematyki nie jako dziedziny oddzielonej grubą linią rozróżnienia ścisłe-humanistyczne od podmiotu i jego doświadczenia, ale jak najbardziej możliwą w doświadczeniu do uchwycenia[887]. Wskazuje on na fakt, iż doświadczanie tzw. jakości idealnych jest ważną częścią naukowej praktyki oraz często inspiruje oraz poprzedza bezpośrednie

[880] M. Hartimo, *Husserl's Transcendentalization of Mathematical Naturalism*..., *dz. cyt.*; M. Hartimo, *Husserl and Mathematics*..., *dz. cyt.*

[881] M. Leng, *Phenomenology and Mathematical Practice*, „Philosophia Mathematica" 10, (2002) nr 3, 3–25.

[882] P. Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford 2002; K. Wójtowicz, *Naturalizm matematyczny Penelope Maddy: próba analizy*, „Filozofia Nauki" 9, (2001) nr 4, 39–64.

[883] M. Hartimo, J. Rytilä, *No Magic*..., *dz. cyt.*, 289.

[884] E. Husserl, *Formal and Transcendental Logic*..., *dz. cyt.*, 9.

[885] E. Husserl, *Formal and Transcendental Logic*..., *dz. cyt.*, 9.

[886] Husserl opisuje te założenia odnośnie do nauki w ogóle, jednak stosuje je również w swoich badaniach matematyki. Należy zaznaczyć, że „badanie sensu" w matematyce jest próbą wytworzenia sensu zamierzonego lub przekształcenia tego sensu w sens spełniony. E. Husserl, *Formal and Transcendental Logic*..., *dz. cyt.*, 9.

[887] B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii*..., *dz. cyt.*

badania naukowe. Dodatkowo Skowron, podobnie jak robimy to w niniejszej pracy, proponuje połączyć kwestie poznawcze z kwestiami ontologicznymi[888].

Zagadnienie nieskończoności poruszane przez Richarda Dedekinda i Georga Cantora jest jak widać nie tylko pasjonującą częścią historii matematyki, ale i doskonałym punktem wyjścia dalszych analiz historycznczynh i filozoficznych. Nawet w tak dobrze znanej historii kryje się wiele jeszcze nieodkrytych jeszcze aspektów, które powinny stać się przedmiotem dalszych badań.

[888] Nie dyskutujemy tutaj, czy topologia jest wystarczającym narzędziem do badania ontologii, szczególnie że autor sam przywołuje filozofię topologiczną osoby Kurta Lewina, która znacznie wykracza poza topologię, między innymi dynamizmem, jakim charakteryzuje „topologię" osoby. Do opisu tego dynamizmu nie jest wystarczające również zastosowanie proponowanej przez autora mereotopologii. B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii...*, *dz. cyt.*, 93–116. Skowron co prawda wskazuje na teorię kategorii jako narzędzie, które może być uznawane za pewną podstawę matematyki, jak i za teorię ukazującą wewnętrzny, matematyczny dynamizm. B. Skowron, *Część i całość. W stronę topoontologii...*, *dz. cyt.*, XXII. Jednakże w niniejszej pracy nie zajmujemy się poszukiwaniem propozycji dla podstaw matematyki, a raczej wskazujemy na różnorodność przejawów matematycznej praktyki, która nie może być ograniczana, ingerującym w tę działalność, przyjętym z góry metafizyczno-metodologicznym założeniem.

Bibliografia

Anscombe G.E.M., *Intention*, Oxford 1976.

Apanowicz J., *Metodologia ogólna*, Gdynia 2002.

Aronson E., Wilson T.D., Akert R.M., *Psychologia społeczna*, Poznań 1997.

Arystoteles, *Fizyka*, w: *Arystoteles „Dzieła wszystkie"*, tłum. K. Leśniak, t. II, Warszawa 1990.

Arystoteles, *Metafizyka*, w: *Arystoteles „Dzieła wszystkie"*, tłum. K. Leśniak, t. II, Warszawa 1990.

Audi R. (red.), *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, New York 1999.

Bell J.L., *Continuity and Infinitesimals*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2017.

Benacerraf P., *What numbers could not be?*, „Philosophical Review" 74, (1965), 47–73.

Bender E.A., *An Introduction to Mathematical Modeling*, New York/Chichester/Brisbane/Toronto 1942.

Bernays P., *Platonism in mathematics (Sur le platonisme dans les mathématiques. L'Enseignement Mathematique 1935 (34), 52-69)*, w: *Philosophy of Mathematics Selected Readings*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, tłum. C. D. Parsons, Cambridge 1983, 258–271.

Błaszczyk P., *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Kraków 2007.

Błaszczyk P., *Eudoxos versus Dedekind*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 15, (2007) nr 2, 95–113.

Błaszczyk P., *Nota o Lehrbuch der Algebra. Einlaitung Heinricha Webera*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VII, (2015), 117–127.

Błaszczyk P., *Nota o rozprawie Eduarda Heinego Elemente der Functionenlehre*, „Annales Universitatis Pedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VI, (2014), 139–152.

Błaszczyk P., *Nota o Über den Zahlbegriff Davida Hilberta*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticum Mathematicae Pertinentia" IV, (2012), 195–198.

Błaszczyk P., *Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VIII, (2016), 159–168.

Błaszczyk P., *O ciałach uporządkowanych*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" IV, (2012), 15–30.

Błaszczyk P., *On the Mode of Existence of the Real Numbers*, w: *Logos of Phenomenology and Phenomenology of the Logos*, red. A. T. Tymieniecka, t. 88, Dordrecht 2005, 137–155.

Błaszczyk P., Fila M., *Cantor on infinitesimals. Historical and modern perspective*, „Bulletin of the section of logic" 49, (2020) nr 2, 149–179, doi: http://dx.doi.org/10.18778/0138-0680.2020.09.

Bois-Reymond P.D., *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions*, „Annali di matematica pura ed applicata" 4, (1870), 338–353.

Bois-Reymond P.D., *Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls*, „Mathematische Annalen" 11, (1877), 149–167.

Bondecka-Krzykowska I., *Strukturalizm jako alternatywa dla platonizmu w filozofii matematyki*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 45, (2004) nr 1, 19–28.

Boyer C.B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1949.

Bralczyk J., Drabik L. (red.), *Konstrukcja*, w: *Słownik języka polskiego PWN*, Warszawa 2005.
Bridges D., Palmgren E., Ishihara H., *Constructive Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, U. Nodelman, 2022.
Brouwer L.E.J., *Intuicjonizm i formalizm*, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, tłum. R. Murawski, Poznań 2003, 263–275.
Brouwer L.E.J., *Life, Art and Mysticism*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 37, (1996) nr 3, 391–429.
Brożek B., Hohol M., *Umysł matematyczny*, Kraków 2014.
Bunn R., *Developments in the foundations of mathematics, 1870–1920*, w: *From the Calculus to Set Theory 1630–1910. An Introductory History*, red. I. Grattan-Guinness, Princeton 2000, 220–255.
Burgess J., *Mathematics and Bleak House*, „Philosophia Mathematica" 12, (2004), 37–53.
Cantor G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1, 2 (Math. Annalen 46, 481—512; 49, S. 207—246)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1895, 282–356.
Cantor G., *Beweis daß eine für jeden reelen Wert von x durch eine trigonometrischen Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1870, 80–83.
Cantor G., *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (Principien einer Theorie der Ordnungstypen)*, tłum. P. E. B. Jourdain, New York 1915.
Cantor G., *Das Script der Vorlesung uber Differentialrechnung vom Sommersemester*, „Nachlaβ Georg Cantors. Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek" 16, (1870), 3.
Cantor G., *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1867, 1–31.
Cantor G., *Die Grundlagen der Arithmetik (Deutsche Literaturzeitung, VI. Jahrg. S. 728-729)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1885, 440–443.
Cantor G., *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242–258)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1878, 119–133.
Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1932.
Cantor G., *Letter from Cantor to Kerry, February 4, 1887*, w: *Georg Cantor Briefe*, red. H. Meschkowski, W. Nilson, Berlin, Heidelberg, New York 1887, 275–276.
Cantor G., *Letter from Cantor to Vivanti, December 13, 1893. Aus den Briefbüchern Georg Cantor*,.
Cantor G., *List do G. Mittag-Lefflera z dn. 20.10.1884*, „Nachlaβ Georg Cantors, Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek" 16, (1884), 3.
Cantor G., *List do K. Laβwitza z 15.02.1884*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1932, 387.
Cantor G., *List do R. Dedekinda z 9.12.1873*, w: *Briefweschel Cantor-Dedekind*, red. J. Cavaillès, E. Noether, Paris 1937, 15–16.
Cantor G., *List do R. Dedekinda z 2.12.1873*, w: *Briefweschel Cantor-Dedekind*, red. J. Cavaillès, E. Noether, Paris 1937, 13–14.
Cantor G., *List do R. Dedekinda z 7.12.1873*, w: *Briefweschel Cantor-Dedekind*, red. J. Cavaillès, E. Noether, Paris 1937, 14–15.

Cantor G., *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,(Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91, 81–125)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1887, 378–439.

Cantor G., *Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daß eine für jeden reelen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1871, 84–86.

Cantor G., *O nieskończonych liniowych rozmaitościach punktowych (Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. Mathematische Annalen XX, 113–121. 1882)*, w: http://www.eudoxos.pl/tlumaczenia/.

Cantor G., *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*, „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" VIII, (2016), 169–177.

Cantor G., *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung - An unpublished paper by Georg Cantor*, „Acta Mathematica" 89, (1970) nr 124, 65–107.

Cantor G., *Rezension der Schrift von H. Hankel Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, Tübingen 1870*, „LitZB" 22, nr 7, 150–151.

Cantor G., *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1 (Mathematische Annalen 15 (1), 1–7)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1879, 139–145.

Cantor G., *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 (Mathematische Annalen" 17 (3), 355–358)*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1880, 145–148.

Cantor G., *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3 (Mathematische Annalen 20 (1), 113–121)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1882, 149–157.

Cantor G., *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 (Mathematische Annalen 21 (1), 51–58)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1883, 157–165.

Cantor G., *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 /Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Mathematische Annalen 21 (4), 545–591)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1883, 165–209.

Cantor G., *Uber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnnten stetigen Raume Gn. Zweite Mitteilung (Acta Mathematica 7, 105-124)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1885, 261–277.

Cantor G., *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, („Mathematische Annalen" 5, 123–132)*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1872, 92–102.

Cantor G., *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, 258—262)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1874, 115–118.

Cantor G., *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, 75–78)*, w: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Berlin 1890, 278–282.

Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten (6)*, „Mathematische Annalen" 23, (1884), 453-488(210-246), doi: https://doi.org/10.1007/BF01446598.210-146.

Carnap R., *Empiricism, Semantics and Ontology*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, 1983, 241–257.

Carnap R., *Empiryzm, semantyka i ontologia*, w: *Empiryzm. Semantyka. Ontologia*, tłum. A. Koterski, Warszawa 2005, 11–40.

Carnap R., *The Philosopher Replies*, w: *The Philosophy of Rudolf Carnap*, red. P. Schlipp, La Salle 1963, 859–1013.

Carter J., *Logic of Relations and Diagrammatic Reasoning: Structuralist Elements in the Work of Charles Sanders Peirce*, w: *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, red. E. H. Reck, G. Schiemer, Oxford University Press 2020.

Carter J., *Mathematical Practice, Fictionalism and Social Ontology*, „Topoi" 42, (2022), doi: 10.1007/s11245-022-09856-4.

Carter J., *Ontology and Mathematical Practice*, „Philosophia Mathematica" 12, (2004) nr 3, doi: 10.1093/philmat/12.3.244.

Carter J., *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects†*, „Philosophia Mathematica" 27, (2019) nr 1, 1–32, doi: 10.1093/philmat/nkz002.

Carter J., *Structuralism as a philosophy of mathematical practice*, „Synthese" 163, (2008), 119–131, doi: 10.1007/s11229-007-9169-6.

Cauchy A.L., *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*, Paris 1821.

Charmaz K., *Constructing grounded theory*, London ; Thousand Oaks, Calif 2006.

Chateaubriand O., *The Ontology of Mathematical Practice*, „Notae Philosophicae Scientiae Formalis" 1, (2012) nr 1, 80–88.

Chrudzimski A., *Roman Ingarden o intencjonalności i znaczeniu*, „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria R. 29" 116, (2020) nr 4, 339–355, doi: 10.24425/pfns.2020.135078.

Cohen P., *The independence of the continuum hypothesis I*, „Proceedings of the U.S. National Academy of Sciences" 50, (1963), 1143–1148.

Corfield D., *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge 2003.

Corry L., *Richard Dedekind: Numbers and Ideals*, w: *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Boston 2004, 66–136.

Dadaczyński J., *Antynomie teoriomnogościowe a powstanie klasycznych kierunków badania podstaw matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 26, (2000), 38–58.

Dadaczyński J., *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 20, (2012) nr 3, 99–109.

Dadaczyński J., *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Kraków-Tarnów 2006.

Dadaczyński J., *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne" XXIII/XXIV, (1990), 135–145.

Dadaczyński J., *Filozofia matematyki Immanuela Kanta jako punkt odniesienia filozofii matematyki stowarzyszonych z klasycznymi kierunkami badań podstaw matematyki*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne" 32, (1999), 22–36.

Dadaczyński J., *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Kraków-Tarnów 2000.

Dadaczyński J., *Georg Cantor i idea jedności nauki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 44, (2009), 84–99.

Dadaczyński J., *Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, „Filozofia Nauki" 30, (2022) nr 3, 33–50, doi: 10.14394/filnau.2022.0027.

Dadaczyński J., *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*, Kraków 1994.

Dadaczyński J., *Ontologia matematyki wczesnego Hilberta (The Early Hilbert's Ontology of Mathematics)*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 26, (2018) nr 4, 75–88, doi: 10.14394/filnau.2018.0025.

Dadaczyński J., *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1*, „Studia Philosophiae Christianae" 39, (2003) nr 1, 7–42.

Dadaczyński J., *Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2*, „Studia Philosophiae Christianae" 39, (2003) nr 2, 273–302.

Dadaczyński J., *Pojęcie boskiej wiecznej teraźniejszości… w kontekście matematycznej analizy niestandardowej*, 34, (2013) nr 1, 31–43.

Dadaczyński J., *Pojęcie nieskończoności w matematyce*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne" 35, (2002) nr 2, 265–270.

Dadaczyński J., *Składowa konceptualistyczna w przedfregowskich podstawach matematyki*, „Studia Philosophiae Christianae" 38, (2002) nr 1, 60–68.

Dauben J.W., *Arguments, Logic and Proof: Mathematics, Logic and the Infinite*, w: *History of Mathematics and Education: Ideas and Experience"; Papers from the Conference held at the University of Essen*, red. H. N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte, Göttingen 1992.

Dauben J.W., *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton, New Jersey 1979.

Dauben J.W., *The trigonometric background to Georg Cantor's theory of set*, „AHES" 11, (1971) nr 7, 181–216.

Davis J.P., Hersh R., *Świat Matematyki*, Warszawa 1994.

Dedekind R., *Ciągłość i liczby niewymierne*, w: R. Murawski, *Antologia tekstów klasycznych*, tłum. R. Murawski, Poznań 1994, 136–149.

Dedekind R., *Continuity and irrational numbers*, w: *Essays on the Theory of Numbers*, tłum. W. W. Beman, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co 2007.

Dedekind R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1872, 315–334.

Dedekind R., *Sur la théorie des nombres entiers algébriques (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, XI (1877): 278–293)*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1930, (1877)262-297.

Dedekind R., *Über die Komposition der binären quadratischen Formen*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1871, 223–261.

Dedekind R., *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen (Supplement XI von P. G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3 Aufl., 515-530)*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1879, 297–315.

Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, w: *Gesammelte mathematische Werke*, red. R. Fricke, E. Noether, O. Ore, Braunschweig 1888, 335–391.

Dembiński B., *Powstanie i upadek pitagorejskiego punktualizmu*, „Folia Philosophica" 15, (1997), 23–30.

Descartes R., *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, Paris 1637.

Devlin K., *Myślenie matematyczne. Twój nowy sposób pojmowania świata*, tłum. T. Walczak, Gliwice 2019.

Dickstein S., *Pojęcia i metody matematyki. Teoria działań*, Warszawa 1891.

Dummett M., *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA 1991.

Edwards H.M., *Dedekind's Invention of Ideals*, „Bulletin of the London Mathematical Society" 15, (1983), 8–17, doi: https://doi.org/10.1112/blms/15.1.8.

Edwards H.M., *Divisor Theory*, Boston 1990.

Edwards H.M., *The Genesis of Ideal Theory*, „Archive for History of Exact Sciences" 23, (1980), 321–378.

Ehrlich P., *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*, „Arch. Hist. Exact Sci." 60, (2006), 1–121.

Ernest P., *Social constructivism as a philosophy of mathematics*, New York 1998.
Eskinazi M., Giannopulu I., *Continuity in intuition and insight: from real to naturalistic virtual environment*, „Scientific Reports" 11, (2021) nr 1, 1876, doi: 10.1038/s41598-021-81532-w.
Ewald W., *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, Oxford 1996, t. 2.
Fergo H. (red.), *Infinitezymalny*, w: *Encyklopedia Gutenberga*, Kraków 1929.
Ferreirós J., *Dedekind and the Set-theoretic Approach to Algebra*, w: J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel 1999, 81–116.
Ferreirós J., *Dedekind's Map-Theoretic Period*, „Philosophia Mathematica" 25, (2017) nr 3, 318–340.
Ferreirós J., *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel 1999.
Ferreirós J., *On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*, „Historia mathematica" 20, (1993), 343–363.
Ferreirós J., *Sets and Maps as a Foundation for Mathematics*, w: J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel 1999, 215–255.
Ferreirós J., *The Early Development of Set Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.
Ferreirós J., Reck E.H., *Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions*, w: *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, red. E. H. Reck, G. Schiemer, New York 2020.
Føllesdal D., *Gödel and Husserl*, w: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, red. J. Hintikka, Kluwer, Dordrecht 1995.
Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A., *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, London 1973.
Frege G., *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.
Frege G., *The Foundations of Arithmetic*, New York 1953.
Fritz K. von, *Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont*, w: K. von Fritz, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin, New York 1971, 545–576.
Gandon S., *Quelle philosophie pour quelle mathématique?*, „Archives de Philosophie" 76, (2013) nr 2, 197–216.
Giaquinto M., *Cognition of Structure*, w: P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford 2008, 43–64.
Giaquinto M., *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, Metaphysics Research Lab, Stanford University 2020.
Giaquinto M., *Visualizing in Mathematics*, w: P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford 2008, 22–42.
Gödel K., *Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis*, „Proceedings of the U.S. National Academy of Sciences" 25, (1938), 220–224.
Gödel K., *What is Cantor's Continuum Hypothesis?*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Cambridge 1983.
Gomułka J., *Filozofia nauk formalnych i jej związek z koncepcją podmiotu we wczesnym i średnim okresie twórczości Ludwiga Wittgensteina*, Kraków 2016.
Gray J., *A History of Abstract Algebra*, w: Berlin 2018.
Gupta A., *Definitions*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.

Hallett M., *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford 1984.
Hamami Y., Morris R.L., *Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators*, „ZDM Mathematics Education" 52, (2020), 1113–1126, doi: https://doi.org/10.1007/s11858-020-01159-5.
Hartimo M., *Husserl and Mathematics*, Cambridge 2021.
Hartimo M., *Husserl's Transcendentalization of Mathematical Naturalism*, „Journal of Transcendental Philosophy" 3, (2020) nr 1, 289–306.
Hartimo M., Rytilä J., *No Magic: From Phenomenology of Practice to Social Ontology of Mathematics*, „Topoi" 42, (2023) nr 1, 283–295, doi: 10.1007/s11245-022-09859-1.
Haslanger S., *Ontology and social construction*, „Philosophical Topics" 23, (1995) nr 2, 95–125, doi: https://doi.org/10.5840/philtopics19952324.
Hauser K., *Cantor's concept of set in the light of Plato's Philebus*, „The Review of Metaphysics" 63, (2010) nr 4, 783–805.
Heine E., *Die Elemente der Functionenlehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 74, (1872), 172–188.
Heine E., *Uber trigonometrische Reihen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 71, (1870), 353–365.
Heller M., *How is philosophy in science possible?*, „Philosophical Problems in Science (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce)" (2019) nr 66, 231–249.
Heller M., *Jak możliwa jest „filozofia w nauce"?*, „Studia Philosophiae Christianae" 22, (1986) nr 1, 7–19.
Hellman G., *Structuralism without structures*, „Philosophia Mathematica" 4, (1996) nr 3, 100–123.
Hester J.E., *Metaphysics in Mathematics*, „arXiv" 2103.10512, (2021), doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.10512.
Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Leipzig 1899.
Hilbert D., *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 95, (1926), 161–190, doi: https://doi.org/10.1007/BF01206605.
Hilbert D., *Über den Zahlbegriff*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 8, (1900), 180–183.
Hodges W., *Model Theory*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.
Hohol M., *Podstawy neuronauki poznawczej*, w: *Prawo i nauki kognitywne*, red. B. Brożek, Ł. Kurek, J. Stelmach, Warszawa 2008, 13–36.
Hohol M., Cipora K., *Perspektywy i granice ucieleśnionego poznania matematycznego*, w: *Filozofia matematyki i informatyki*, red. R. Murawski, Kraków 2015, 119–140.
Horsten L., *Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.
Husserl E., *Badania logiczne. T. 2: Badania dotyczące fenomenologii i teorii poznania. Część 2*, tłum. J. Sidorek, Warszawa 2000.
Husserl E., *Formal and Transcendental Logic*, tłum. D. Cairns, The Hague 1969.
Husserl E., *Kryzys nauk europejskich i fenomenologia transcendentalna*, tłum. S. Walczewska, Kraków 2017.
Iemhoff R., *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.
Iwanowna-Sinkiewicz G., *Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznej: M. Rolle, B. Bolzano, A. L. Cauchy*, w: *Dzieje matematyki polskiej II*, red. W. Więsław, Wrocław 2013, 165–183.
Jackowski S., *Topologia I*, w: https://dydmat.mimuw.edu.pl/.
Jacob P., *Intentionality*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2019.

Jamblich, *Jamblich, Vit. Pyth. 162*, w: *Die Vorsokratiker. Griechisch/Deutsch*, red. J. Mansfeld, Stuttgart 1987.

Jane I., *The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set*, „Erkenntnis" 42, (1995) nr 3, 375–402.

Jordan Z., *O matematycznych podstawach systemu Platona*, Poznań 1937.

Joyce D.E., *Notes on Richard Dedekind's: Was sind und was sollen die Zahlen?*, Clark 2005.

Kanamori A., *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, „Bulletin of Symbolic Logic" 2, (1996), 1–71.

Kant I., *Krytyka czystego rozumu*, tłum. R. Ingarden, Warszawa 1986.

Kant I., *Prolegomena*, tłum. A. Banaszkiewicz, Warszawa 1993.

Kaufman S., *On the Emergence of a New Mathematical Object: An Ethnography of a Duality Transform*, w: *Mathematical Cultures*, red. B. Larvor, Cham 2016, 91–110.

Keisler H.J., *Foundations of infinitesimal calculus*, Prindle 1976.

Kerry B., *Ueber G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen*, „Vierteljahresschrift für wissensch. Philos." 9, (1885), 191–232.

Klein F., *The arithmetizing of mathematics*, „Bull. Amer. Math. Soc." 8, (1896) nr 2, 241–246.

Kłósak K., *Z teorii i metodologii filozofii przyrody*, Poznań 1980.

Koellner P., *The Continuum Hypothesis*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2019.

Kosecki A., *O poglądach Carnapa, Ajdukiewicza i Quine'a na ontologię*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria R. 26" 101, (2017) nr 1, 69–85.

Kosslyn S., *Image and Brain*, Cambridge, MA 1994.

Kosslyn S., Behrmann M., Jeannerod M., *The cognitive neuroscience of mental imagery*, „Neuropsychologia" 33, (1995), 1335–1344, doi: doi:10.1016/ 0028-3932(95)00067-D.

Kotarbiński T., *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Warszawa 1986.

Krąpiec M.A., *Metafizyczne poznanie*, w: *PEF*, red. T. Żmuda, PTTA 2010.

Król Z., *O platonizmie w teorii mnogości*, „Roczniki Filozoficzne" LI, (2003) nr 3, 225–252.

Król Z., *Platonizm w matematyce a platonizm w naukach matematyczno-przyrodniczych*, w: *Filozofia przyrody dziś. Philosophy of nature today*, red. W. Ługowski, I. K. Lisiejew, Warszawa 2011.

Król Z., *Uwagi o stylu historycznym matematyki i rozwoju matematyki*, w: red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Poznań 2010, 203–234.

Kuhn T.S., *The structure of scientific revolutions*, Chicago 1970.

Kupś T., *Kant a Newton (z perspektywy opus postumum)*, „IDEA – Studia nad strukturą i rozwojem pojęć filozoficznych. Białystok" XXVII, (2015).

Kuratowski K., Mostowski A., *Teoria mnogości*, Warszawa 1966.

Lakatos I., *Problems in the Philosophy of Mathematics*, w: *Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science.*, red. I. Lakatos, London-Amsterdam 1965, 187–194.

Lakatos I., *Proofs and Refutations*, New York 1979.

Lakoff G., Núñez R.E., *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York 2000.

Laugwitz D., *Debates about infinity in mathematics around 1890: the Cantor-Veronese controversy, its origins and its outcome*, „N.T.M. Neue Serie. Internationale Zeitschrift Für Geschichte und Ethik der Naturwissenscaften, Technik und Medizn" 10, (2002) nr 1–3, 102–126.

Lavine S., *Understanding the Infinite*, Cambridge, MA 1994.

Leng M., *Phenomenology and Mathematical Practice*, „Philosophia Mathematica" 10, (2002) nr 3, 3–25.

Linnebo Ø., *Philosophy of mathematics*, Princeton, Oxford 2017.

Linnebo Ø., *Platonism in the Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2018.

Linnebo Ø., *Thin objects*, Oxford UK 2018.

Łaciak P., *Struktura i rodzaje poznania a priori w rozumieniu Kanta i Husserla*, Katowice 2003.

Łukasiewicz D., *Adekwatna i apodyktyczna intuicja w kontekście transcendentalnej fenomenologii E. Husserla*, w: *Od Platona do współczesności*, red. S. Sarnowski, G. A. Dominiak, Bydgoszcz 1999, 183–198.

Łukasiewicz J., *O nauce*, w: *Poradnik dla samouków*, Warszawa, Kraków 1915, XV–XXXIX.

Maciejczak M., *Świadomość intencjonalna w Badaniach logicznych E. Husserla*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria, R. 8" 32, (1999) nr 4, 71–92.

Maddy P., *Naturalism in Mathematics*, Oxford 2002.

Mancosu P., *Mathematical Style*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta.

Mancosu P., *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford 2008.

Markiewicz P., *Georga Cantora filozofia nieskończoności = Georg Cantor's Philosophy of Infinity*, „Humanistyka i przyrodoznastwo" 10, (2004), 51–68.

Mazierski S., *Prolegomena do filozofii przyrody inspiracji arystotelesowsko-tomistycznej*, Lublin 1969.

Mączka J., *Platonizm w matematycznych pracach Whiteheada*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXI, (1997), 32–47.

McLarty C., *Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of Functors*, w: *Architecture of Modern Mathematics*, red. J. Ferreirós, J. Grey, Oxford 2006, 187–208.

Meschkowski H., *Mathematik und Realität bei Georg Cantor*, „Dialectica" 29, (1975), 55–70.

Meschkowski H., *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967.

Mikusiński J., Mikusiński P., *Liczby naturalne i ich aksjomatyka*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne" XIX, (1976), 137–140.

Mioduszewski J., *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni Euklidesowych*, Katowice 1994.

Mioduszewski J., *Wykłady z topologii: zbiory spójne i kontinua*, Katowice 2011.

Mityushev V., Nawalaniec W., Rylko N., *Introduction to Mathematical Modeling and Computer Simulations*, Boca Raton 2018.

Moore A.W., *The Infinite*, London 1990.

Moran R., Stone M., *Anscombe on Expression of Intention*, w: *New Essays on the Explanation of Action*, red. C. Sandis, London 2009.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1994.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 2001.

Murawski R., *Główne koncepcje i kierunki filozofii matematyki XX wieku*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXXIII, (2003), 74–92.

Murawski R., *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki*, „Przestrzenie Teorii" 3–4, (2004), 253–260.

Murawski R., *Philosophical reflection on mathematics in Poland in the interwar period*, „Annals of Pure and Applied Logic" 127, (2004) nr 1–3, 325–336, doi: https://doi.org/10.1016/j.apal.2003.11.026.

Murawski R., *Rozwój programu Hilberta*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego" XXX, (1993), 51–72.

Myers D.G., *Intuicja. Jej siła i słabość*, tłum. A. Sosenko, Wrocław 2004.

Nanay B., *Unconscious mental imagery*, „Phil. Trans. R. Soc. B" 376: 20190689, (2021), doi: https://doi.org/10.1098/rstb.2019.0689.

Neumann J. von, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, „Acta Litt. ac Scientiarum r. Univ. Hung. Franc. Joseph., Sectio sc math" 1, (1923), 199–208.
Olszewski A., *O nieusuwalności podmiotu matematycznego*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XLVI, (2010), 100–117.
Oppy G., Mancosu P., Hájek A., Kenny E., *Infinity*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.
Parsons C.D., *The structuralist view o f mathematical objects*, „Synthese" 84, (1990), 303–346.
Peano G., *Giuseppe Peano, Sulla definizione di funzione*, „Atti della Reale Accademiadei Lincei" 20, (1911).
Pearson J., Naselaris T., Holmes E.A., Kosslyn S.M., *Mental imagery: functional mechanisms and clinical applications*, „Trends Cogn. Sci." 19, (2015), 590–602, doi: 10. 1016/j.tics.2015.08.003.
Perikh J., *Intuition: the new frontier of management*, Oxford UK 1994.
Piotrowska E., *Dokąd zmierza filozofia matematyki?*, „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria R. 25" 98, (2016) nr 2, 565–578.
Piotrowska E., *Obraz i wizja matematyki Davida Hilberta*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 21, (2013) nr 1, 137–151.
Platon, *Państwo*, tłum. W. Witwicki, Kęty 1997.
Poincaré H., *La science et l'hypothèse*, Paris 1900.
Poincaré H., *Science et méthode*, Paris 1908.
Polak P., *Philosophy in science: A name with a long intellectual tradition*, „Philosophical Problems in Science (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce)" (2019) nr 66, 251–270.
Polak P., *Skąd wziął się krakowski styl uprawiania filozofii przyrody?*, w: *Wyzwania racjonalności. Księdzu Michałowi Hellerowi współpracownicy i uczniowie*, red. S. Wszołek, R. Janusz, Kraków 2006, 439–449.
Polak P., *The Paradigm Shift in the 19th-century Polish Philosophy of Mathematics*, „Studia Historiae Scientiarum" 21, (2022), 217–235, doi: 10.4467/2543702XSHS.22.006.15972.
Popper K.R., *Epistemology Without a Knowing Subject (pl: A. Tonalskiei (tł.) „Literatura na świecie" 161, 1984)*, w: *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Oxford 1972.
Popper K.R., *Wiedza obiektywna*, tłum. A. Chmielewski, Warszawa 1992.
Purkert W., Ilgadus H.J., *Georg Cantor 1845-1918*, Leipzig 1985.
Reck E., *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.
Reck E., Schiemer G., *Structuralism in the Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2020.
Reck E.H., *Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense*, „Synthese" 137, (2003) nr 3, 369–419.
Reck E.H., *The Logic in Dedekind's Logicism*, w: *Logic from Kant to Russell. Laying the Foundations for Analytic Philosophy*, red. S. Lapointe, New York 2018, 171–188.
Reck E.H., Schiemer G. (red.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, New York 2020.
Resnik M.D., *Mathematics as a science of patterns: ontology and reference*, „Noûs" 15, (1981), 529–550.
Robinson A., *Non-standard analysis*, „Proceedings Royal Academy, Amsterdam" 64, (1961), 432–440.
Rolph A., Hörtner S., Heller M.P., i in., *Spacetime as a quantum circuit*, „arXiv" 2101.01185, (2021), doi: 10.1007/jhep04(2021)207.
Rotter K., *Gramatyka filozoficzna w dobie sporu o podstawy matematyki. Eseje o drugiej filozofii Wittgensteina*, Opole 2006.

Russel B., *Recent Work on the Principles of Mathematics*, „International Monthly” 4, (1901), 87–90.
Russo L., *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna*, tłum. I. Kania, Kraków 2005.
Rylko N., Tytko K., *Multidimensional potential and its application to social networks*, w: *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation, Proceedings of the 12th ISAAC Congress, Aveiro, Portugal, 2019*, red. P. Cerejeiras, M. Reissing, I. Sabadini, J. Toft, Springer Birkhäuser 2022.
Rytilä J., *Social constructivism in mathematics? The promise and shortcomings of Julian Cole's institutional account*, „Synthese” 199, (2021) nr 3, 11517–11540, doi: 10.1007/s11229-021-03300-7.
Sachse A., *Essai historique sur la representation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une serie trigonometrique*, „BulSMatAst” 15, (1880), 43–64, 83–112.
Schopenhauer A., *Świat jako wola i przedstawienie*, tłum. J. Garewicz, Warszawa 2012, t. I.
Searle J.R., *Intentionality: An Essay in the Philosophy of Mind*, Cambridge 1983.
Searle J.R., *The intentionality of intention and action*, „Cognitive Science” 4, (1980), 47–70.
Shabel L., *Kant's Philosophy of Mathematics*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, Metaphysics Research Lab, Stanford University 2021.
Shapiro L., Spaulding S., *Embodied Cognition*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2021.
Shapiro S., *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, New York 1997.
Shapiro S., *Structure and ontology*, „Philosophical Topics” XVII, (1989) nr 2, 145–170.
Shapiro S., *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford 2000.
Shotter J., *In Dialogue: Social Constructivism and Social Constructionism*, w: *Constructivism in Education*, red. L. Steffe, J. Gale, Hillsdale, NJ 1995, 41–56.
Siegel S., *The Contents of Visual Experience*, Oxford UK 2010.
Sinaceur H.B., Panza M., Sandu G., *Is Dedekind a Logicist? Why does such a question arise?*, w: *Functions and Generality of Logic. Reflexions on Dedekind's and Frege's Logicisms 37, Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, red. S. Rahman, J. Symons, Cham 2015, 1–65.
Sinaceur M.A., *La méthode mathématique de Dedekind*, „Revue d'histoire des sciences” 32, (1979) nr 2, 107–142.
Skowron B., *Część i całość. W stronę topoontologii*, Warszawa 2021.
Sochański M., *Wizualizacje w poznaniu matematycznym a kategoria intuicji przestrzennej*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 21, (2013) nr 1, 153–164.
Stein H., *Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics*, „Synthese” 84, (1990), 163–211, doi: https://doi.org/10.1007/BF00485377.
Stein H., *Logos, Logic, and Logistiké: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformations of Mathematics*, w: *History and Philosophy of Modern Mathematics*, red. W. Aspray, P. Kitcher, Minneapolis 1988, 238–259.
Stępnik A., *Poppera trzeci świat okiem życzliwego krytyka*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)” 14, (2006) nr 1, 9–29.
Stolz O., *Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen*, „Mathematische Annalen” 31, (1888), 601–604.
Stolz O., *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, „Mathematische Annalen” 22, (1883), 504–519.
Stroyan K.D., Luxemburg W.A.J., *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, New York 1976.

Strugalski Z., *O zasadzie nieoznaczoności Wernera Heisenberga*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 24, (1979) nr 2, 355–366.
Suppes P., *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, Dordrecht 1969.
Svensson V., Knaute J., Jansen K., i in., *A quantum information perspective on meson melting*, „arXiv" 2206.10528, (2022), doi: 10.48550/ARXIV.2206.10528.
Tait W., *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and its History*, Oxford 2005.
Tait W.W., *Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory*, w: *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*, red. G. Sher, R. Tieszen, Cambridge 2000, 269–290.
Tait W.W., *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number*, w: *Frege: Importance and Legacy*, red. M. Schim, Berlin 1996, 70–113.
Tennant N., *Logicism and Neologicism*, w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. N. Zalta, 2017.
Tytko K., *Modele wartości godności człowieka i kwestia sprawiedliwości*, „Logos i Ethos" 55, (2020) nr 2, 167–188, doi: http://dx.doi.org/10.15633/lie.3812.
Tytko K., *Wartość godności osoby w kontekście zależności społecznych. Modelowanie grafowe*, w: *Człowiek w relacji do... Rozważania o człowieku jako istocie relacyjnej*, red. G. Wąchol, Kraków 2020.
Urbaniec J., *Trzeci świat Karla Poppera*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" VIII, (1986), 77–84.
Veronese G., *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp*, Leipzig 1894.
Vivanti G., *Ancora sull'infinitesimo attuale*, „Rivista di matematica" 1, (1891), 248–255.
Vivanti G., *Sull'infinitesimo attuale*, „Rivista di matematica" 1, (1891), 135–153.
Walat A., *O konstrukcjonizmie i ośmiu zasadach skutecznego uczenia się według Seymoura Paperta*, „Meritum" 4, (2007), 8–13.
Warzoszczak P., *Późny Carnap a współczesne spory ontologiczne. Cz. I. Poglądy Carnapa na ontologię a fikcjonalizm*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 79, (2012) nr 3, 35–63.
Weierstrass K., *Differentialrechnung. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersemester 1861*, w: H. Schwarz, P. Dugac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Paris 1972.
Więsław W., *Matematyka i jej historia*, Opole 1997.
Wilder R.L., *The cultural basis of mathematics*, w: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Providence 1950, 258–271.
Withers B., Svensson V., Spaliński M., i in., *Hydrodynamic Gradient Expansion Diverges beyond Bjorken Flow*, „arXiv" 2110.07621, (2022), doi: 10.1103/physrevlett.128.122302.
Woźniak C., *Analiza niestandardowa w mechanice newtonowskiej punktu materialnego*, „Mechanika Teoretyczna i Stosowana" 19, (1981) nr 3, 355–374.
Wójcik W., *Filozofia matematyki na przełomie XIX i XX wieku*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 40, (1995) nr 4, 49–74.
Wójcik W., *Koncepcja dowodu a struktura rozwoju nauki*, „Studia Philosophiae Christianae" 26, (1990) nr 1, 194–202.
Wójtowicz K., *Naturalizm matematyczny Penelope Maddy: próba analizy*, „Filozofia Nauki" 9, (2001) nr 4, 39–64.
Wójtowicz K., *O hipotezie Continuum*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXII, (1998), 35–52.

Wójtowicz K., *Problem istnienia we współczesnej filozofii matematyki*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa seria R. VI" 21, (1997) nr 1, 55–78.
Wójtowicz K., *Status hipotezy kontinuum w świetle koncepcji Woodina*, „Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)" 19, (2011) nr 4, 67–82.
Wróblewski A.K., *Historia fizyki. Od czasów najdawniejszych do współczesności*, Warszawa 2007.
Yablo S., *Does Ontology Rest on a Mistake?*, „Proceedings of the Aristotelian Society" 72, (1998), 229–261, 263–283.
Zamecki S., *Na marginesie książki: Lucio Russo : Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna. Przełożył Ireneusz Kania. Kraków 2005 Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS, 469 s.*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 52, (2007) nr 1, 225–237.
Zwierżdżyński M.K., *Konstruktywizm a konstrukcjonizm*, „PRINCIPIA" LVI, (2012), 117–135, doi: 10.4467/20843887PI.11.007.0583.

Spis ilustracji