

Bielsko-Biała, 29 maja 2024 r.

dr hab. Wiesław Wójcik, profesor uczelni
Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie

**Recenzja pracy doktorskiej
mgr Karoliny Tytko**

Cantora i Dedekinda filozofie matematyki. Analiza porównawcza

W drugiej połowie XIX wieku w matematyce nastąpiły przemiany, kluczowe dla jej przyszłego rozwoju. Pojawiły się nowe teorie matematyczne, będące w dużej mierze kontynuacją wcześniejszych badań nad podstawami matematyki. Co całkiem naturalne w takiej sytuacji, wielu z twórców nowej matematyki nie stroniło od refleksji filozoficznej. Dotyczy to również dwóch wybitnych twórców matematyki tego okresu: Richarda Dedekinda i Georga Cantora. Z jednej strony nie można ich uznać za profesjonalnych filozofów, jednak ich refleksja nad matematyką może być zaliczona do jednych z najciekawszych filozofii matematyki, nie tylko tego okresu. W przypadku tych uczonych, jak i wielu innych twórców nauki, aby pełniej uchwycić ich koncepcje filozoficzne, należy nie tylko wczytywać się w ich refleksje filozoficzne, ale również analizować tworzone przez nich teorie i zawarte w nich założenia filozoficzne, jak również patrzeć na sposób uprawiania nauki (praktyka badawcza). Siłą rzeczy pojawiają się więc interpretacje tych koncepcji, czasami znacząco różniące się od siebie. Jak mówi znane powiedzenie, aby zrozumieć poglądy danego uczonego na budowane przez niego teorie, należy nie tyle patrzeć na to, co on mówi, lecz na to, co robi.

W pracy doktorskiej mgr Karolina Tytko porównuje filozofie matematyki wspomnianych uczonych, po uprzedniej rekonstrukcji tych koncepcji. W „klasycznym” podejściu często przeciwstawia się platonizm Cantora

konstruktywizmowi Dedekinda. Jednym z celów pracy było osłabienie (a zarazem przebudowa) tego radykalnego rozróżnienia i zauważenie, że „najważniejsze różnice pomiędzy filozofią matematyki obu uczonych wyrażają się na płaszczyźnie metodologicznej, a nie ontologicznej czy nawet epistemologicznej”. W tym celu poddane zostały analizie prace tych matematyków dotyczące konstrukcji liczb rzeczywistych oraz teorii mnogości. Są to prace przełomowe dla współczesnej matematyki, dobrze znane i analizowane, jednak spojrzenie p. Karoliny Tytko pozwala na głębsze spojrzenie na stosowane w tych pracach metody badawcze i w konsekwencji przybliżyć poglądy filozoficzne obu matematyków.

Praca p. Karoliny Tytko jest obszerna, liczy 355 stron i składa się z siedmiu części (rozdziałów) oraz bibliografii. Rozdział 1 zawiera omówienie celów pracy, hipotez badawczych, definiuje najważniejsze pojęcia stosowane w pracy oraz metody. Rozdziały 2, 3 i 4 doprecyzowują, odpowiednio, pojęcia konstrukcjonizmu, strukturalizmu oraz realizmu ontologicznego w kontekście prac i wypowiedzi obu matematyków. Kluczowy jest rozdział 5, w którym Doktorantka dokonuje krytycznej oceny dominujących interpretacji, w których przeciwstawia się Cantora - platonika Dedekindowi - konstruktywistom. Okazuje się, że obu matematyków łączy pragmatyczny realizm oraz konstrukcjonizm (choć te koncepcje nieco się u nich różnią), co pozwala na przekroczenie dychotomii: „odkrywanie matematyki istniejącej realnie na zewnątrz i niezależnie od podmiotu” vs. „konstruowanie matematyki przez umysł podmiotu i istnienie jej w umyśle w postaci niezobowiązującej ontologicznie” (s. 301). W rozdziale 6 znów pojawia się dokładniejsze omówienie metodologii badawczych Cantora i Dedekinda i wskazanie na różnice w tych metodologiach. Główna różnica sprowadza się do uwagi, że w ramach realizowanego strukturalizmu, Cantora charakteryzuje perspektywa wewnątrz-strukturalna, natomiast Dedekinda - ponad-strukturalna. Ponadto Cantor uważał, że teorię mnogości można stosować do zagadnień pozamatematycznych, Dedekind budował jedynie modele teoriomnogościowe, aby wyjaśniać problemy wewnątrz matematyki. A w zakończeniu pracy (rozdział 7), poza posumowaniem badań, pojawiają się ciekawe uwagi związane ze stosowanymi w pracy metodami oraz z ukazaniem perspektywy dalszych badań.

Zastosowana metoda badawcza polega na połączeniu współczesnego nurtu badań praktyki badawczej uczonych (w tym przypadku matematyków) z koncepcją „filozofii w nauce”, która realizowana jest w środowisku Michała Hellera. Korzystając z filozofii współczesnej praktyki matematycznej, Doktorantka korzysta głównie z koncepcji J. Carter zawartej w pracy *Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects*, wydanej w roku 2019. Ta koncepcja stanowi istotne narzędzie stosowane przez Doktorantkę do analizy tekstów matematycznych Cantora i Dedekinda. Pozwala to na pełniejszą rekonstrukcję poglądów obu matematyków, jak zauważa Autorka pracy. W zakończeniu pracy Doktorantka odnosi się do zarzutów wysuwanych przez S. Gandona pod adresem filozofii praktyki matematycznej (*Philosophy of Mathematical Practice*, w skrócie PMP). Przedstawia on tę filozofię jako „jako jedynie przejaw kryzysu w filozofii matematyki, nie zaś remedium na niego, a także gdy określa pracę nad case study z matematyki, jaką z reguły skazana na niedopasowanie do wypracowanych ram pojęciowych zakresu filozofii”. (s. 338-339) Jednak w badaniach Doktorantki ta metoda nie występuje samodzielnie, lecz jest istotnie powiązana z metodą „filozofii w nauce” Michała Hellera. To jest ważny element w metodologii stosowanej w tej pracy. Badamy konkretne prace matematyczne konkretnych matematyków (porównujemy z kontekstem naukowych badanego okresu dziejów), wydobywamy z nich elementy filozoficzne i porównujemy je z deklarowanymi przez tych matematyków poglądami na matematykę oraz z interpretacjami, które są im przypisywane.

Uważam, że dzięki zastosowaniu tej metody dostrzec można kluczowe podobieństwa filozofii obu matematyków (dwuwymiarowy realizm ontologiczny), a zarazem zasadnicze różnice w ich praktyce matematycznej. W przypadku Cantora mamy do czynienia z konstrukcjonizmem (poznawczo-metodologicznym) związanym z ontologicznym strukturalizmem. Precyzuje i modyfikuje on deklarowany i przyjmowany w większości interpretacji platonizm Cantora. Natomiast w przypadku Dedekinda mamy przede wszystkim postawę strukturalizmu poznawczo-metodologicznego, prowadzącą do pewnej wersji konstrukcjonizmu (poznawczego), co znów podważa przypisywany Dedekindowi konstruktywizm.

Warto zauważyć, że skrajny konstruktywizm, w którym matematyk w wolnym twórczym akcie tworzy wiedzę całkowicie oderwaną od tej już istniejącej, prowadzi do absurdalnych konsekwencji, przynajmniej w przypadku matematyki. Rozwój matematyki charakteryzuje się ciągłością, a poszczególne teorie są ze sobą treściowo powiązane. Matematyk musiałby w swoim tworzeniu odkrywać za każdym razem te długie linie rozwojowe matematyki i nieskończone powiązania wewnątrz matematyki. Dlatego konstrukcjonizm epistemiczny, proponowany przez Doktorantkę wydaje się sensownym rozwiązaniem — jest to pogodzenie „konstruowania matematyki przez indywidualnego matematyka” z jednoczesnym zachowaniem „realizmu wewnętrznego względem praktyki indywidualnej, jak również względem perspektywy społeczno-historycznej”. Dlatego skrajny konstruktywizm może występować jedynie w deklaracjach (nie do końca przemyślanych czy dopracowanych), natomiast w praktyce badawczej jest on niemożliwy u żadnego twórczego matematyka, wnoszącego wkład do wiedzy matematycznej. To łagodzenie skrajnego konstruktywizmu ma miejsce również w intuicjonizmie Brouwera (zaliczanym do skrajnego konstruktywizmu), a tym bardziej u jego uczniów.

Podobnie jest z kwestią zdroworozsądkowego czy radykalnego platonizmu, w którym świat bytów matematycznych nie ma nic wspólnego ze światem myśli, konstrukcji intelektualnych, struktur obecnych w świecie myśli i w świecie materialnych. Takiego platonizmu nie głosił Platon, jak również badany w tej pracy Cantor. Autorka formułuje pogląd Cantoro w następujący sposób: „Najistotniejsze aspekty platonizmu Cantora to istnienie każdej rzeczy (tu mamy na myśli obiektybyty matematyczne) na dwa sposoby – tak jak istnieją idee oraz tak jak istnieją pojęcia, w dwóch porządkach – intrasubiektywnym (immamentnym) i transsubiektywnym (transcendentnym”.

Uważam, że w jakimś stopniu te porządki odzwierciedlają platońską „drogę w górę” oraz „drogę w dół”, co Platon opisuje pod koniec VI księgi *Państwa*. Oczywiście w istocie chodzi o to czy konkretny matematyk tworzy całkiem nowe obiekty, które wprowadza do istniejącego już przed nim świata obiektów matematycznych (koncepcja trzeciego świata Poppera), czy jedynie poznaje i

odtworza te już istniejące. Zauważmy, że w obu przypadkach pojawia się realizm, gdyż jakieś obiekty matematyczne istnieją uprzednio. Istnieje Jeszcze trzecia możliwa interpretacja. Aby poznać te już istniejące obiekty, matematyk musi skonstruować nowe pojęcia, struktury „matematyczne”, które są jedynie narzędziem poznawania tej „prawdziwej” matematyki. I wówczas mielibyśmy połączenie platonizmu z pewną wersją konstruktywizmu za cenę zróżnicowania stopnia istnienia obiektów matematycznych. Myślę, że jest to wersja „platonizmu” występującego u Platona. Tę wersję pewnie można przypisać Dedekindowi (konstruuje modele matematyczne, aby opisać, poznać uprzednio istniejące obiekty matematyczne), a Cantorowi raczej nie?

W pracy doktorskiej mamy ominięcie tych dylematów (i wielu innych, chociaż nie do końca) poprzez przyjęcie koncepcji epistemicznego konstrukcjonizmu oraz realizmu pragmatycznego, które budują nową perspektywę patrzenia na filozoficzne różnice między Dedekindem a Cantorem i pozwalają przełamać klasyczną dychotomię „platonizm-konstruktywizm”. „O ile platonizm matematyczny kładł nacisk na niezależne od podmiotu istnienie obiektów matematycznych, o tyle konstruktywizm na wytwarzanie matematyki przez umysł (oraz w umyśle), tak proponowane zestawienie konstrukcjonizmu-realizmu wewnętrznego, bierze pod uwagę zarówno umysłowe procesy konstrukcyjne indywidualnego podmiotu, jak i pewnego rodzaju istnienie matematyki, jako niezależnego wytworu historyczno-społecznego”. W celu uchwycenia tego zagadnienia w pracy pojawia się jednak jeszcze jedno ważne pojęcie - strukturalizmu, które Autorka przypisuje obu matematykom, w tym strukturalizm epistemologiczno-metodologiczny (matematyk buduje i analizuje odpowiednie struktury poprzez porównywanie różnych teorii obiektów i badanie różnych relacji między nimi) wyłącznie Dedekindowi, a strukturalizm ontologiczny (istnieją uprzednio nie tylko podatkowe obiekty matematyczne, ale również struktury) tak jednemu, jaki drugiemu

Przywołane w poprzednim akapicie pojęcia są przez Doktorantkę stopniowo i precyzyjnie przybliżane w kontekście analizowanych prac matematyków i ich praktyki badawczej. Jest to kluczowy element pracy, rzetelnie i poprawnie wykonany przez Doktorantkę.

Kluczem w tych analizach staje się pojęcie dwuwymiarowego (lub pragmatycznego) realizmu ontologicznego.

Z jednej strony wydaje się ono całkiem proste i naturalne: ukazuje dwa wymiary obiektu matematycznego, jeden związany z praktyką indywidualną, a drugi ze społeczno-historyczną (wiedza dziedziczona). Jednak w procesie tworzenia te wymiary są ze sobą ściśle związane. Czasem niezależnie działający twórcy tworzyli (odkrywali?) te same nowe (?) struktury czy teorie (przykłady odkryć równoległych). Dopiero analiza konkretnych prac, stosowanych metod i otrzymanych wyników pozwala na dostrzeżenie tego splotu i wspomnianych wymiarów.

Na koniec chciałbym przedstawić kilka uwag, które nasunęły mi się w czasie lektury.

1. Jak wspomniałem wcześniej, przeprowadzone analizy są wykonane poprawnie, jednak często ma miejsce „kołowanie nad zagadnieniem”, wielokrotne przywoływanie tych samych kwestii, może potrzebne wobec złożoności omawianego zagadnienia, jednak utrudniający odbiór.
2. Odcinanie się od różnych metod uprawiania filozofii matematyki (Z. Król, B. Skowron, które jak sądzę wiele wyjaśniają w badanym przedmiocie; Doktorantka przyjęła jednak inną metodę i zrealizowała badania w jej ramach bardzo dobrze.
3. Interpretacja Dedekinda u Łukasiewicza w „O nauce” występuje w interesującym kontekście, czego Autorka nie zauważyła. Łukasiewicz uzasadnia, że rozumowania aprioryczne (oparte na zdaniach ogólnych i oczywistych, których więc nie trzeba udowadniać) nie prowadzą do pierwiastków twórczych, a mimo to cała dziedzina tych nauk jest twórcza, bo nauki te nie opierają się na doświadczeniu i nie są odtworzeniem faktów. („Poradnik dla Samouków”, s. XXXIII-XXXIV)
4. Użyta w mojej pracy z 1990 r. „Metody precyzacji i abstrakcji” są ściśle związane ze specyficznym rozumieniem obiektu matematycznego, na który składa się: pojęcie, twierdzenie (hipoteza) i jego dowód oraz kontrprzykłady do twierdzenia (ten pomysł był inspirowany metodą „dowodów i kontrprzykładów” opracowaną przez I. Lakatosa w kontekście jego badań przełomowych epizodów z historii matematyki). Proces uściślenia podstaw matematyki (XIX wiek) zaowocował podawaniem ścisłych definicji pojęć (a więc dodawaniem nowych właściwości, na przykład do pojęcia ciągłości). Nazwałem ten proces precyzacją zauważając, że doprowadził on do pojawienia się kontrprzykładów do twierdzenia uważanego za prawdziwe. Zmniejszył on jakby pojemność logiczną pojęć występujących w twierdzeniu i doprowadził do pojawienia się luk w dowodzie, domagających się wypełnienia nowymi pojęciami. Te nowe pojęcia były obecne *implicite* w

kontrprzykładach, ale trzeba je było odpowiednio wyabstrahować i zdefiniować (w procesie abstrakcji). Tym samym sytuacja paradoksalna, w której do prawdziwego twierdzenia mamy kontrprzykłady, została rozwiązana. Nie wiem czy pasuje ona do metody badań stosowanej przez Cantora, o której wspomina Doktorantka (s. 309—310).

5. Uważam, że kluczowe jest zwrócenie uwagi na różnicę w podejściu Cantora i Dedekinda w samym używaniu strukturalizmu: Cantora charakteryzuje perspektywa wewnątrz-strukturalna, natomiast Dedekinda - ponad-strukturalna. To zagadnienie jest bardzo dokładnie badane na przykładzie konstrukcji liczby rzeczywistych oraz podejścia do teorii mnogości obu matematyków. Autorka zauważa, że „O ile u Cantora Strukturalizm wynikało raczej bezpośrednio z jego szczegółowej pracy nad matematycznymi strukturami, o tyle podejście do the Kinda było związane ze strukturalistyczną kategorią nałożoną na jego aparat poznawczy.” (s. 323) To strukturalistyczne podejście Dedekinda jest nowym stylem uprawiania współczesnej matematyki, gdzie budowane są modele dla poszczególnych teorii matematycznych i są te modele traktowane jako narzędzia (w przypadku Dedekinda takim narzędziem była teoria mnogości, ale również konstrukcja przekrojów Dedekinda). Takie strukturalne podejście występuje ewidentnie u Bernharda Riemanna (ucznia i przyjaciela Dedekinda, który zebrał i wydał prace Riemanna, w tym filozoficzne, w których ta metoda je opisana). Zresztą metoda Riemanna jest bardziej ogólna i pasuje, jak sędzę, do obu matematyków. Metodę Riemanna badania podstaw matematyki (przykładowo, wydobywaniu nowych struktur z matematyki klasycznej poprzez analizę jej podstaw czy podawania modeli klasycznej matematyki dla nowych teorii; dobrze znany jest przykład zbudowania euklidesowego modelu dla geometrii nieeuklidesowej; wprowadzenie ogólnego pojęcia różniczkowości, gdzie poprzez wyposażenia jej w odpowiednie struktury można badać różne matematyczne teorie, na przykład geometrię różniczkową, topologię). W polskiej szkole (logicznej i filozoficznej) zaowocowało to metodą analizy i konstrukcji Jana Łukasiewicza i analogicznymi metodami u polskich matematyków.
6. W pracy zauważyłem kilka błędów językowych (no. zamiast Georg Bernhard Riemann czy krócej Bernhard Riemann jest Geirg Riemann) , co na tak obszerną pracę jest dobrym wynikiem.

Chciałem jeszcze odnieść się do propozycji podanych przez Doktorantkę w końcowej części pracy.

Poruszony w pracy problem dychotomii „odkrywanie-tworzenie”, w kontekście indywidualnej praktyki matematycznej, uruchamia wiele kategorii filozoficznych takich jak konstrukcjonizm (epistemologiczny i ontologiczny), dwuwymiarowy realizm czy strukturalizm (ontologiczny czy epistemiczno-metodologiczny) i prowadzi do wykroczenia poza tę dychotomię wprowadzając kategorię dopełniających się pojęć: „konstruowanie-istnienie”. Badania pokazują

więc w jaki sposób można poprzez badanie tekstów matematycznych i praktyki uczonych włączyć się do dyskusji na temat klasycznych zagadnień filozoficznych.

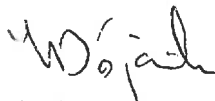
Według p. Karoliny Tytko szczególne możliwości tkwią w badaniu pojęcia nieskończoności, wspólnego dla filozofii oraz matematyki. Dla Cantora oraz Dedekinda podmiot matematyczny i jego umysł jest źródłem nieskończoności (matematycznej). Jeśli w badaniach matematyki otrzymujemy nieredukowalność świata matematyki do innych obszarów (na przykład logiki), to również podmiot byłby nieredukowalny, a sama nieskończoność mogłaby charakteryzować podmiot analogicznie do tego jak ona określa świat matematyki.

Jest to propozycja badań antropologicznych warto rozważenia. Według Doktorantki ogromne możliwości tkwią w fenomenologii matematyki, która na mocy swojej metody (perspektywa transcendentálna) mogłaby wznieść się ponad podział „odkrywanie—tworzenie”.

Chciałbym jednak zauważyć, że metoda "analizy i konstrukcji" zaproponowana przez J. Łukasiewicza i stosowana konsekwentnie w SLW też wychodzi poza podział "odkrywanie-tworzenie". Ta metoda została zastosowana do badania pojęć: przyczyny, prawdopodobieństwa, prawdy, dyskursu i wielu innych. Zasadniczo różni się od metody fenomenologicznej. Jest to tak zwane modelowe czy semantyczne podejście, które znalazło tak piękną realizację semantycznej koncepcji prawdy Alfreda Tarskiego. Stąd, między innymi, spór Ingardena ze Szkołą Lwowsko-Warszawską. Jan Łukasiewicz wprowadził tę metodę w pracy z 1908 „Analiza i konstrukcja pojęcia przyczyny”, gdzie ukazuje specyficzne połączenie realizmu epistemologicznego i konstruktywizmu. To metodologiczne podejście stało się później charakterystyczne dla SLW.

Podsumowując, stwierdzam, że praca doktorska p. Karoliny Tytko *Cantora i Dedekinda filozofie matematyki. Analiza porównawcza* w sposób szczegółowy, poprawny i interesujący omawia podejmowane zagadnienia. Korzysta z wielu ważnych i kluczowych opracowań w tym temacie, zachowując przy tym oryginalność podejścia, szczególnie poprzez opracowaną, wprowadzoną i realizowaną metodę badawczą. Jest więc pracą oryginalną i nie narusza niczyich praw autorskich.

Przyjęta metoda i odpowiedni dobór źródeł pozwoliły zrealizować założone cele pracy. Dlatego uważam, że stanowi wystarczającą podstawę do ubiegania się o stopień naukowy doktora. Wnoszę więc o dopuszczenie mgr Karoliny Tytko do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


Wiesław Wójcik