Kraków, 13.06.2024

Prof. dr hab. Andrzej Bielecki,
Katedra Informatyki Stosowanej,
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej,
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie,
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków.

# Recenzja rozprawy doktorskiej
# Pani Karoliny Tytko
# *"Cantora i Dedekinda filozofie matematyki. Analiza porównawcza."*

Niniejsza recenzja została napisana w związku z powołaniem mnie na recenzenta w przewodzie doktorskim Pani Karoliny Tytko, wszczętym w naukach humanistycznych w dyscyplinie filozofia i realizowanym pod kierunkiem dr. hab. prof. UPJPII Pawła Polaka (promotor pracy doktorskiej) oraz dr. Romana Krzanowskiego (promotor pomocniczy). Funkcję recenzenta powierzyła mi Rada Dyscypliny Filozofia Uniwersytetu Papieskiego Jana Pawła II w Krakowie na posiedzeniu w dniu 6 marca 2024 roku, o czym zostałem zawiadomiony pismem datowanym na dzień 8 kwietnia 2024, przesłanym mi przez ks. dr hab. prof. UPJPII Janusza Mączkę, Kierownika Dyscypliny Filozofia na Uniwersytecie Papieskim Jana Pawła II w Krakowie.

## Zawartość pracy

Praca składa się ze streszczenia, siedmiu rozdziałów, bibliografii i spisu rysunków. Całość liczy 354 strony.

W pierwszym rozdziale, będącym wstępem, Autorka deklaruje, że *„niniejsza praca jest próbą rozwinięcia nurtu badań praktyki matematycznej i wskazania, w jaki sposób może zostać połączony z lokalną tradycją badawczą."* Praca ta wpisuje się w intensywnie realizowany w krakowskim środowisku filozofii nauki program badawczy polegający na badaniu przez filozofów matematycznej praktyki wybitnych matematyków. Praca Pani Karoliny Tytko dotyczy badań zarówno nad wynikami prac Georga Cantora i Richarda Dedekinda, jak również metodami uzyskania tych wyników oraz filozoficznymi aspektami podejścia obu wspomnianych uczonych do problemów matematyki. Autorka wyciąga również wnioski dotyczące filozoficznych poglądów obu matematyków dotyczących fundamentów uprawianej przez nich dziedziny. Analiza dokonana przez Doktorantkę opiera się zarówno na publikacjach Cantora i Dedekinda, jak również na licznych opracowaniach filozoficznych dotyczących zarówno bezpośrednio ich twórczości, jak i bardziej ogólnych zagadnień filozoficznych, na przykład koncepcji trzech światów Poppera. Jak deklaruje Doktorantka, jej analiza ma na celu zrekonstruowanie trzech aspektów filozofii matematyki obu uczonych, mianowicie konstrukcjonizmu epistemologicznego, realizmu ontologicznego oraz strukturalizmu. Autorka specyfikuje następujące dwie główne tezy pracy:

1. Radykalne rozróżnianie platonizmu Cantora i konstruktywizmu Dedekinda nie jest jedyną możliwą interpretacją ich stanowisk filozoficznych.
2. W praktyce matematycznej Cantora i Dedekinda można zaobserwować nie tylko różnice w ich epistemicznych i ontologicznych aspektach, ale również istotne różnice w filozoficznych aspektach ich praktyki matematycznej. Mianowicie, u Cantora można zaobserwować elementy konstrukcjonizmu poznawczo-metodologicznego, związanego z ontologicznym strukturalizmem, podczas gdy u Dedekinda występują przejawy strukturalizmu epistemiczno-metodologicznego będącego przyczyną użycia elementów konstrukcjonistycznych.

W dalszej części pierwszego rozdziału Autorka definiuje najważniejsze pojęcia, w szczególności starannie rozróżnia konstruktywizm i konstrukcjonizm. W ostatniej części pierwszego rozdziału omówione są metody i założenia badawcze.

W rozdziale drugim dyskutowany jest problem konstrukcjonizmu epistemologicznego u Cantora i Dedekinda. Punktem wyjścia jest założenie, że czynności konstrukcyjne są w praktyce matematycznej niezbędne dla wprowadzenia nowych treści przez konkretnego badacza, przy czym kluczowa jest jego aktywność umysłowa związana z rozumowaniem, intuicją i intencją. Autorka nawiązuje tu do Kanta, przede wszystkim do jego sądów syntetycznych *a priori* oraz do Husserla. Podkreśla znaczenie myślenia strukturalnego w matematyce oraz intencjonalny ogląd konstruowanych struktur. W pierwszym podrozdziale drugiego rozdziału omówiony jest konstrukcjonizm Cantora. Omówiona jest konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych, przy czym Doktorantka analizuje różnice między procesem konstrukcji a podaniem definicji, która jest wynikiem oglądu. Zaprezentowana jest również koncepcja nieskończoności aktualnej, wprowadzonej przez Cantora na bazie jego liczb porządkowych i kardynalnych. Dyskutowany jest problem geometryzacji liczb rzeczywistych polegający na utożsamieniu zbioru $\mathbb{R}$ z prostą. W drugim podrozdziale omówiony jest konstrukcjonizm Dedekinda. Metodologia pracy Dedekinda zakładała podejście polegające na konstruowaniu struktur. Ilustracją tego podejścia jest wprowadzona przez niego konstrukcja liczb rzeczywistych w oparciu o przekroje zbioru uporządkowanego liniowo. Podejście Dedekinda jest zanurzone w teorii mnogości. Przy rozważaniu problemu istnienia nieskończoności w matematyce uwidacznia się, charakterystyczne dla Dedekinda, zatarcie granicy między obiektami czysto matematycznymi a analizą myślenia matematycznego.

Analogicznie, jak w rozdziale drugim, w którym Autorka porównywała konstrukcjonizm Cantora i Dedekinda, w rozdziale trzecim porównuje strukturalizm tych dwóch wielkich matematyków. Zwraca uwagę, że w przypadku Cantora ważniejsza jest strukturalna ontologia podstaw matematyki, niż metodologia. Dyskusja jest prowadzona na bazie konstrukcji liczb rzeczywistych, które Cantor definiował jako zbiór granic ciągów Cauchy'ego z relacją równoważności – dwa ciągi są w relacji, jeśli granica ich różnicy jest równa zeru. Dodatkowo, w zbiorze ilorazowym wprowadzona jest relacja porządku. W dalszej części Doktorantka omawia wprowadzone przez Cantora konstrukcje teoriomnogościowe oraz pozaskończone liczby kardynalne i porządkowe. Pierwszą część trzeciego rozdziału swojej dysertacji Autorka konkluduje wnioskiem, że chociaż strukturalizm nie był w metodzie praktyki matematycznej Cantora wyraźnie zaznaczony, to jednak może być rozpoznany w budowie konstruowanych przez niego struktur, jak również w jego umysłowych czynnościach konstrukcyjnych. U Dedekinda, z kolei, oprócz strukturalizmu ontologicznego, daje się również zauważyć strukturalizm epistemiczno-metodologiczny. Opisana jest konstrukcja liczb rzeczywistych bazująca na przekrojach w zbiorze liczb wymiernych, które to przekroje posłużyły do formalnego wprowadzenia porządku ciągłego, który przed konstrukcjami Dedekinda był przez matematyków rozumiany jedynie intuicyjnie. W analizie przeprowadzonej przez Autorkę podkreślone jest, że Dedekind jawnie specyfikował używane przez siebie matematyczne procedury. Następnie analizowane są konstrukcje wprowadzone przez Dedekinda w teorii mnogości. Rozdział trzeci skonkludowany jest wnioskiem, że o ile strukturalizm ontologiczny istnieje zarówno w podejściu Cantora, jak i Dedekinda, to strukturalizm epistemologiczno-metodologiczny jest obecny wyłącznie u Dedekinda.

Czwarty rozdział rozprawy jest poświęcony analizie realizmu ontologicznego w pracach obu matematyków, przy czym jest to ontologia rekonstruowana przez Autorkę. Cantor uważał, że odkrywa matematykę poprzez dostęp *a priori* do matematycznych obiektów. Wiedzę matematyczną uważał za całkowicie pewną *episteme*. Autorka zwraca uwagę na nie zawsze świadome przedzałożenia Cantora jako źródło jego platonizmu, niemniej uważa, że należy ten platonizm osłabić. Przedstawiając obszary matematyki, które zostały przyjęte przez Cantora jako jego założenia oraz baza praktyki matematycznej, analizuje zarówno wyniki matematyczne, procesy poznawcze matematyka uzyskującego te wyniki oraz świat, w którym ta matematyka powstawała i była stosowana. Przykładowo, analizując konstrukcję liczb niewymiernych zarówno Cantora, jak i Dedekinda, wychodzi od odkrycia, na gruncie geometrii, liczb niewymiernych przez Hippasosa z Metapontu i kryzysu w filozofii pitagorejczyków, do którego to odkrycie doprowadziło. Omawiając konstrukcję liczb niewymiernych obu matematyków doktorantka zwraca uwagę na konieczność użycia, co najmniej *implicite*, pojęcia nieskończoności w obu konstrukcjach. Realizując konsekwentnie nakreślony program badawczy polegający na badaniu również procesów poznawczych danego matematyka, Autorka analizuje związki uprawianej przez Cantora teorii mnogości z jego konstrukcją liczb rzeczywistych, w szczególności odkrycie faktu, że zbiór liczb naturalnych nie jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, co było przyczyną zapoczątkowania badań nad Hipotezą Continuum. Interesującym problemem jest również odmienny stosunek do tzw. *wielkości nieskończenie małych* u obu matematyków, między innymi w kontekście Aksjomatu Archimedesa i teorii stosunków Eudoksosa.

W piątym rozdziale dysertacji Autorka bezpośrednio weryfikuje pierwszą tezę rozprawy, wyspecyfikowaną we wstępie dysertacji deklarując, że głównym celem rozprawy jest *„osłabienie niemożliwej w pełni do utrzymania opozycji platonizm-konstruktywizm, kojarzonej w niektórych kręgach z Cantorem i Dedekindem oraz zaproponowanie dla niej alternatywy."* Doktorantka postuluje, że można zrekonstruować podobne aspekty filozofii matematyki u obu badaczy, co czyni na podstawie materiału przygotowanego w poprzednich trzech rozdziałach. Autorka analizuje deklaracje wyspecyfikowane w wypowiedziach Cantora na temat matematyki z jego praktyką związaną z konstrukcjami matematycznymi. Analizuje założenie Cantora o odkrywaniu wiedzy matematycznej i konfrontuje je z faktem, że struktury wprowadzone przez Cantora były zbyt skomplikowane, aby mogły być bezpośrednio ujęte w formie niezłożonego doświadczenia, czyli kantowskiej naoczności. Autorka dochodzi do wniosku, że na podstawie analizy działalności Cantora jako matematyka, reprezentował on raczej realizm, który nie jest tożsamy z deklarowanym przez niego platonizmem. U Dedekinda, natomiast, Autorka widzi specyficzny konstrukcjonizm. Dedekind, chociaż nie stoi na skrajnym stanowisku, że wszystko w matematyce musi być ściśle skonstruowane, w szczególności dopuszcza nieskończoności aktualne, to jednak wymaga, aby *„nic, co można udowodnić, nie było akceptowane bez dowodu."* Matematyk odwoływał się też do intuicji geometrycznych, które okazały się dobrym punktem wyjścia do sformalizowania koncepcji ciągłości liczb rzeczywistych.

Rozdział szósty poświęcony jest bezpośredniej analizie drugiej tezy dysertacji, mówiącej, że „*w praktyce matematycznej Cantora i Dedekinda możemy zaobserwować znaczniejsze i bardziej fundamentalne różnice niż w rekonstruowanych w dysertacji ich stanowiskach epistemicznych i ontologicznych.*" Analiza rozpoczyna się od wyspecyfikowania różnic w założeniach obu matematyków odnośnie źródeł wiedzy matematycznej, zakresu stosowalności tej wiedzy i jej celowości. Ponadto analizowane są różnice w stylu badań naukowych tych dwóch uczonych. W szczególności, Cantor był negatywnie nastawiony do intuicyjnego przyjmowania założeń nie tylko w matematyce, ale również w naukach przyrodniczych. Ponadto, nie akceptował stosowania w matematyce wiedzy płynącej z doświadczenia – stał na stanowisku, że matematyka dana jest umysłowi apriorycznie, jednak uważał za naturalne stosowanie w fizyce wiedzy matematycznej. Paragraf o roli przedzałożeń u Cantora Doktorantka konkluduje stwierdzeniem, że podejście Cantora do matematyki można wytłumaczyć założeniem, że źródłem wiedzy matematycznej jest zewnętrzny świat idei, natomiast w pracy matematyka źródłem jest jego umysł, umożliwiający definiowanie pojęć odpowiadających ideom. Dedekind za główną podstawę matematyki uznawał teorię mnogości – w jego ujęciu podstawową ontologię matematyki stanowiły zbiory i struktury utworzone ze zbiorów. W przeciwieństwie do Cantora, Dedekind nie unikał wykorzystywania intuicji w swoim podejściu do matematycznych problemów. W szczególności, w swojej definicji porządku ciągłego oparł się na intuicji ciągłości w geometrii, mianowicie na ciągłości linii prostej. W dalszej części rozdziału analizowane jest rozumienie celu badań matematycznych obu matematyków oraz ich podejście do zastosowań matematyki. Cantor za podstawę matematyki przyjmował teorię mnogości i rozważał możliwości redukcji matematyki do tej teorii. W szczególności, postulował taką redukcję na polu arytmetyki. W kwestii zastosowań matematyki Cantor stał na stanowisku, że podejście teoriomnogościowe jest, potencjalnie, użyteczne w fizyce. Dedekind również szczególną uwagę poświęcał teorii mnogości, traktując ją jako najbardziej fundamentalną część matematyki i swoistą perspektywę, poprzez którą dokonywał niejako oglądu problemów matematycznych. Teoria zbiorów była dla niego również narzędziem do rozwiązywania matematycznych problemów. W przeciwieństwie do Cantora, nie rozważał problemów związanych z zastosowaniami matematyki w fizyce. W końcowej części rozdziału szóstego analizowana jest specyfika perspektywy badawczej obu matematyków.

Rozdział siódmy zawiera podsumowanie i wnioski końcowe. Autorka konkluduje, że ramy filozoficzne – konstrukcjonizm i realizm – były wspólne dla obu matematyków, natomiast różnice dotyczyły postaci konstrukcjonizmu. Więcej różnic można znaleźć w bezpośrednio deklarowanych przez obu matematyków założeniach filozoficznych oraz w charakterystyce ich praktyki matematycznej. Doktorantka słusznie konkluduje, że cele pracy zostały osiągnięte, a tezy wyspecyfikowane w pierwszym rozdziale dysertacji zostały przekonywująco uzasadnione. Szkicując perspektywy dalszych badań, Autorka wskazuje na potrzebę całościowej analizy dzieł Cantora i Dedekinda oraz roli ich dokonań na tle współczesnej matematyki. Niezbędne jest również rozpatrzenie wszystkich aspektów filozoficznych, a nie tylko dychotomii: odkrywanie *versus* tworzenie obiektów matematycznych. Należy również przeanalizować fundamentalne problemy związane ze źródłem wiedzy matematycznej – czy matematyka jest jedynie wyrazem konwencji językowej, sposobu racjonalności, reprezentacją struktury umysłu człowieka, czy też reprezentacją struktury świata. Cenne byłoby również podjęcie pogłębionych analiz w dziedzinie filozofii praktyki matematycznej, jak również analizy problemu nieskończoności, leżącego na pograniczu matematyki i filozofii. Do badania tego zagadnienia Autorka proponuje użycie, między innymi, metod fenomenologii.

## Ocena pracy

W dysertacji przedstawiono analizę porównawczą poglądów filozoficznych i metod uprawiania matematyki Cantora i Dedekinda. Za szczególnie cenną uważam przyjętą metodę polegającą na porównaniu filozofii matematyki obu uczonych, w szczególności deklarowanych przez nich poglądów z ich praktyką matematyczną. Zarówno filozoficzne poglądy, jak i praktyka matematyczna jest analizowana w bardzo szerokim kontekście, zarówno na tle epoki, jak i filozofii, gdzie Doktorantka odwołuje się nie tylko do współczesnych filozofów i historyków matematyki, ale również szeroko korzysta z filozofii Kanta, Poppera, fenomenologii, zwłaszcza Husserla oraz sięga do filozofii starożytnej i starożytnej myśli matematycznej, nie ograniczając się przy tym, co w kontekście prowadzonej analizy jest oczywiste, do filozofii Platona, ale odwołuje się również do poglądów pitagorejczyków, w szczególności w swojej analizie uwzględnia geometryczne podejście do liczb u pitagorejczyków – tzw. punktualizm pitagorejski oraz odkrycie liczb niewymiernych przez Hippasosa z Metapontu, jak również do wyników Eudoksosa i Archimedesa. Przedstawiona dysertacja doktorska może być również cennym wkładem do studiów w dziedzinie psychologii matematyki – Autorka rozważa proces powstawania koncepcji matematycznych, rolę intuicji i intencji w tym procesie oraz konfrontuje artykułowane jawnie przez Cantora i Dedekinda ich poglądy filozoficzne z metodą ich pracy jako matematyków.

Dzięki temu udaje jej się odsłonić pewne jeśli nie sprzeczności, to co najmniej niekonsekwencje między poglądami jawnie przez nich deklarowanymi a wnioskami wynikającymi bezpośrednio z ich praktyki. Cenne jest korzystanie bezpośrednio z prac źródłowych obu matematyków. Na szczególne wyróżnienie zasługuje bardzo duża precyzja rozważań. W szczególności, Autorka dokładnie dyskutuje kwestie relacji między filozofią nauki a filozofią w nauce oraz wspomniane już subtelności związane z konstrukcjonizmem i konstruktywizmem. Za niezwykle cenny wkład uważam również odniesienie badań obu matematyków do stanu matematyki współczesnej. Na szczególną uwagę zasługuje koncepcja nieskończoności, zwłaszcza w kontekście Hipotezy Continuum oraz wielkości nieskończenie małych rozważanych przez obu matematyków oraz odniesienie uzyskanych przez nich wyników do współczesnej arytmetyki liczb porządkowych, arytmetyki liczb kardynalnych oraz analizy niestandardowej. Reasumując, dysertacja wyróżnia się precyzją rozważań oraz szerokim ich kontekstem.

## Uwagi polemiczne i krytyczne

Za najbardziej kontrowersyjną (ale niekoniecznie błędną!) tezę Autorki uważam jej wniosek dotyczący ontologii obiektów matematycznych. Mianowicie Doktorantka z faktu, że do poznania bytów matematycznych nie wystarcza prosty ogląd (w sensie kantowskim), tylko niezbędne są konstrukcje struktur matematycznych wyciąga wniosek, że należy osłabić deklarowany przez Cantora platonizm na rzecz koncepcji istnienia obiektów matematycznych jako bytów w zasadzie jedynie w drugim i trzecim świecie Poppera (str. 134 oraz 149-152). Ta implikacje, moim zdaniem, nie jest jednak tak jednoznaczna, jak Autorka sugeruje. Mianowicie, można przyjąć, że kreowane struktury matematyczne są odpowiednikiem procedur pomiarowych w naukach przyrodniczych lub tzw. procedur pomostowych łączących model teoretyczny z obiektem realnie istniejącym (o procedurach pomostowych w fizyce, można znaleźć np. w Olejnik R.M. (2011), *Matematyczna teoria miary a metodologiczne analizy procedur pomiarowych,* Biblos, Tarnów). Ta alternatywna możliwość powinna była zostać w dysertacji wnikliwie przeanalizowana.

Ponadto, Doktorantka nie ustrzegła się co najmniej dwóch dużych niezręczności redakcyjnych, które można by zaliczyć do błędów merytorycznych, gdyby nie fakt, że z kontekstu można się domyślić o co chodziło Autorce. Mianowicie, w przypisie 229 na stronach 109-110 czytamy: *„Nie każda przestrzeń topologiczna jest przestrzenią metryczną."* Otóż przestrzeń jest metryczna, gdy została na niej wprowadzona metryka, a metryzowalna, gdy można na niej metrykę wprowadzić. Każdy zbiór jest metryzowalny, gdyż można go zmetryzować wprowadzając, na przykład, metrykę dyskretną. Autorce najwyraźniej chodziło o to, że *nie każda przestrzeń topologiczna jest metryzowalna w sposób zgodny z jej topologią*, co jest faktem powszechnie znanym. Na stronie 158, z kolei, czytamy: *„Twierdzi się również, że jeśli Hipoteza Kontinuum byłaby prawdziwa, oznaczałoby to, że zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych może być dobrze uporządkowany*[428] *– co zresztą było przez Cantora (błędnie) zakładane."* W przypisie 428 są wyspecyfikowane uwagi na temat równoważności Hipotezy Kontinuum, Aksjomatu Wyboru oraz twierdzenia Zermelo o dobrym uporządkowaniu. Twierdzenie Zermelo mówi, że każdy zbiór można dobrze uporządkować. Autorce najwyraźniej chodziło więc o to, że zbioru liczb rzeczywistych nie da się uporządkować w sposób zgodny z arytmetyką zbioru liczb rzeczywistych, lub, być może, że nie potrafimy przedstawić konstrukcji dobrego uporządkowania zbioru liczb rzeczywistych – twierdzenie Zermelo ma jedynie charakter egzystencjalny. Powyższa niezręczność redakcyjna dziwi zwłaszcza w kontekście wspomnianego przypisu 428, który świadczy o tym, że Autorka jest świadoma wspomnianych subtelności. W pracy znalazłem również ok. 40 literówek, których listę załączam do niniejszej recenzji. Wyspecyfikowane uwagi krytyczne oraz zauważone usterki nie wpływają na moją wysoką ocenę recenzowanej rozprawy, a liczbę literówek w kontekście objętości pracy nie uważam za dużą.

**Konkluzja**

Konkludując uważam, że rozprawa doktorska Pani Karoliny Tytko spełnia wymogi Ustawy o stopniach i tytułach naukowych i w związku z tym wnioskuję o dopuszczenie Doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto, ze względu na bardzo wysoki merytoryczny poziom dysertacji oraz staranną redakcją rozprawy, wnioskuję o wyróżnienie doktoratu.

Andrzej Bielecki

*Andrzej Bielecki*