Kraków, 17.08.2024

Dr hab. Piotr Błaszczyk, prof. UKEN
Instytut Matematyki
Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Karoliny Tytko
„Cantora i Dedekinda filozofie matematyki. Analiza porównawcza"

1. Celem rozprawy jest rekonstrukcja założeń filozoficznych w pracach Richarda Dedekinda i Georga Cantora. Z dorobku Dedekinda wybrano prace o liczbach rzeczywistych i naturalnych: *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Dedekind 1872) oraz *Was sind und was sollen die Zahlen* (Dedekind 1888). W przypadku Cantora są to *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Cantor 1872) oraz artykuły z teorii mnogości. Autorka stara się podważyć powszechne w literaturze filozoficznej przekonanie o platonizmie Cantora i konstruktywizmie Dedekinda; odpowiednio przypisuje Cantorowi „konstrukcjonizm poznawczo-metodologiczny" oraz „ontologiczny strukturalizm", natomiast Dedekindowi „strukturalizm epistemiczno-metodologiczny" oraz „konstrukcjonizm". Definicje tych pojęć są zbyt ogólne i w recenzji pominiemy je. Faktyczne zestawienie stanowisk filozoficznych Cantora i Dedekinda Autorka otrzymuje porównując konstrukcje liczb rzeczywistych z (Dedekind 1872) i (Cantor 1872). W części krytycznej skupimy się na tym przykładzie.

Zasadnicza teza rozprawy jest śmiała, ale argumentacja bardzo złożona i oparta na błędnym – w opinii recenzenta – odczytaniu tekstów źródłowych. Odtworzenie toku rozumowania Autorki oraz wskazanie błędów zajmie nam sporo miejsca, co znaczy, że nie są to ewidentne pomyłki, proste odstępstwa od przyjętych w literaturze przedmiotu ustaleń.

Generalny obraz jest następujący. Cantor i Dedekind konstruują liczby rzeczywiste. Cantorowi można przypisać pogląd, że liczby rzeczywiste opisują linię prostą (kontinuum geometryczne), a kontinuum to jest *obiektem platońskim.* Autorka natomiast wykazuje, że Cantor konstruuje kontinuum geometryczne na wzór liczb rzeczywistych; pisze mianowicie: „Cantor nie korzystał z pojęcia *stricte* prostej geometrycznej, a tym bardziej z intuicji geometrycznej, a skonstruował prostą według przepisu na liczby rzeczywiste" (s. 65).

W związku z konstrukcją liczb rzeczywistych Dedekind, napisał, że liczby niewymierne są „stwarzane". Wielu komentatorów wiąże tę deklarację z konstruktywizm. Autorka natomiast pokazuje, że najważniejsza cecha liczb rzeczywistych, mianowicie ciągłość, została raczej „wydedukowana", niż stworzona: „Dedekind nie wymyślił, nie stworzył w umyśle czy też przy pomocy umysłu (a przynajmniej nie całkiem) formalnej definicji owej właściwości [chodzi o ciągłość – PB], ale w znaczny sposób ją wydedukował" (s. 122). Jak zobaczymy, Dedekind „wydedukował" ciągłość z „idealnej prostej".

Tak więc Cantor skonstruował liczby rzeczywiste, które opisują również skonstruowane kontinuum geometryczne; Dedekind konstruując liczby rzeczywiste wykorzystał własność, którą „wydedukował" z „idealnej prostej". Teza odważna, ale – zdaniem recenzenta – nie znajduje ona oparcia w tekstach źródłowych, o czym niżej w pkt. 4., przy czym najważniejsze są podpunkty 4.1 oraz 4.3.

2. Autorka dużo uwagi poświęca metodologii rozprawy sugerując, że jej interpretacja wynika z nowej metody analizy tekstu. Metoda ta polega, z jednej strony, na zaadoptowaniu koncepcji *filozofia w nauce* wypracowanej przez prof. Michała Hellera, z drugiej, na przyjęciu założeń nowego nurtu w filozofii matematyki, który funkcjonuje pod nazwą *philosophy of mathematical practice.*

Koncepcja Hellera – jak czytamy – oryginalnie opracowana w związku z interpretacją filozofii Newtona i Leibniza, została przystosowana do tematu rozprawy i Autorka tak ją charakteryzuje:

„w oparciu o wyszczególnione przez Michała Hellera zakresy badawczej problematyki, można wziąć pod uwagę poniższe kwestie

(1) wpływ deklarowanych założeń filozoficznych Cantora i Dedekinda na tworzone przez nich teorie, jak również na ich praktykę matematyczną (głównie metodologię);

(2) próby wyodrębnienia filozoficznych zagadnień z badanych zagadnień matematycznych (chodzi tutaj o podstawowe aspekty ontologii oraz epistemologii, zawartych w matematycznych treściach;

(3) aż wreszcie ogólne filozoficzne refleksje, dotyczące wybranych matematycznych założeń" (s. 32—33).

Philosophy of mathematical practice wiąże się z postulatem analizy tekstów matematycznych z uwzględnieniem kontekstu historycznego i matematycznego, z uwzględnieniem heurezy, argumentów odwołujących się do diagramów, roli symboli i języka naturalnego. Dzięki temu tekst matematyczny nie jest redukowany do twierdzenia i dowodu; twierdzenie jest traktowane jako odpowiedź na problem osadzony w kontekście historycznym i matematycznym, dowód zaś nie sprowadza się do schematów znanych z podręczników logiki matematycznej. Szeroki przegląd wyników otrzymanych tą metodą zawiera pięciotomowa edycja *Handboook of History and Philosphy of Mathematical Practice*, Springer 2024, pod redakcją Bharatha Sriramana (pozycji tej nie ma w Bibliografii rozprawy, w wersji książkowej ukazała się w połowie tego roku). W ocenianej rozprawie *philosophy of mathematical practise* jest charakteryzowane na podstawie artykułów Jessici Carter.

Faktycznie jednak, gdy dochodzi do interpretacji prac Dedekinda i Cantora założenia *philosophy of mathemtical practice* są stosowane wybiórczo. Wymienię cztery kwestie, ważne z uwagi na zasadniczą tezę rozprawy, związane kolejne z odniesieniem do historii, rysunkiem, matematyką i językiem naturalnym.

(i) Cantor i Dedekind przyjmują, że na linii prostej istnieją tylko liczby wymierne i niewymierne i nie ma trzeciej możliwości, nie ma innych liczb, na przykład nieskończenie małych. Wynika to ze szczególnej interpretacji teorii opracowanej w matematyce greckiej o odcinkach współmiernych i niewspółmiernych. W pracach (Cantor 1872) i (Dedekind 1872) założenie to jest ukryte w definicji funkcji, która przeprowadza punkty prostej na liczby wymierne (Cantor), albo liczbom wymiernych przyporządkowuje punkty (Dedekind) i gdzie dochodzi do zamiany pojęć współmierne–niewspółmierne na wymierne–niewymierne. Wyjaśniając tę kwestię można otrzymać wiele informacji o tym, jak Cantor i Dedekind rozumieli linię prostą. W rozprawie ten wątek potraktowano zdawkowo, a o funkcji, która łączy punkty z liczbami czytamy „dość oczywiste intuicyjnie przyporządkowanie".

(ii) W § 3 (Cantor 1872) zamieszczony jest rysunek. Autorka nie zbadała, jaką rolę on pełni. Czy reprezentuje linią prostą, czy liczby rzeczywiste? Czy dziedziną szeregów trygonometrycznych, o których traktuje praca Cantora jest oś przedstawiona na diagramie?

(iii) W § 2 (Dedekind 1872) opisany jest porządek punktów na prostej; czy jest on definiowany, czy jest to pojęcie pierwotne? Następnie Dedekind porównuje porządek punktów z porządkiem liczb wymiernych. Czy porządek liczb wymiernych jest definiowany, czy jest pojęciem pierwotnym? W rozprawie przeczytamy, że „Istotą porządku liczb wymiernych według Dedekinda było to, co następuje: *Różność dwóch liczb wymiernych objawia się w tym, że różnica* $a - b$ *ma albo wartość dodatnią, albo ujemną*" (s. 139). Jest to faktycznie jedno z ważniejszych zdań rozprawy Dedekinda, ale Autorka nie zbadała, jaki jest jego status, czy jest to aksjomat, twierdzenie, a może definicja? Jaki jest status tego zdania we współczesnej matematyce?

(iv) W § 3 (Dedekind 1872) podana jest definicja ciągłości porządku; w § 6 znajdujemy definicję ciągłości działań. W obu przypadkach Dedekind stosuje to samo pojęcie *Stetigkeit*. Czy wpływa to na interpretację pracy Dedekinda? Czy Autorka powtórzyłaby tezę, że to pojęcie ciągłości także zostało „wydedukowane"?

3. Rozprawa jest bardzo obszerna – liczy 355 stron; argumentacja jest podzielona na sześć rozdziałów zatytułowanych jak następuje: (rozdz. 2) *Konstrukcjonizm epistemologiczny u Cantora i Dedekinda*, (3) *Strukturalizm metodologiczno-epistemiczny oraz ontologiczny u Cantora i Dedekinda*, (4) *Zagadnienie realizmu ontologicznego u Cantora i Dedekinda*, (5) *Krytyczna ocena dominujących interpretacji: Cantor-platonik i Dedekind-konstruktywista*, (6) *Metodologie badawcze Cantora i Dedekinda*. Całość dopełniają *Wstęp* i *Zakończenie*, odpowiednio rozdz. 1. i 7.

Osobną, wyróżnioną część stanowią przypisy numerowe w sposób ciągły – jest ich 888. Niektóre z nich zawierają odrębne argumenty, inne – dopowiedzenia, jeszcze inne – odniesienia do literatury.

Wśród przypisów są też i takie, które stanowią wprowadzenia do osobnych książek. Oto przykład: „Cantor próbował bronić teoriomnogościowej tezy, w której przypisywał formalnemu znakowi wielkości aktualnie nieskończenie dużej semantyczną treść (wprowadzał pewne novum, które mogło być posądzone o kontekst intuicyjny i brak formalizmu)" (s. 299). Zdanie to opatrzone jest jeszcze przypisem: „Należy podkreślić, że Cantor miał prawo podtrzymywać paradygmat ówczesnej analizy, który wykluczał nieskończenie małe wielkości jako zbyt intuicyjne (czy w ogóle intuicyjne). Wtedy nie było jeszcze formalnie opracowanej teorii systemów niestandardowych. Pierwszy takie prace wykonał Abraham Robinson w 1961: A. Robinson, *Non-standard analysis*, „Proceedings Royal Academy, Amsterdam" 64, (1961), 432–440. Należy też zwrócić uwagę da dodatkową rzecz. Otóż nawet jeśli w problemie nieskończenie małych było coś, co przyciągało na tyle mocno intuicję Cantora, że z nimi walczył (zamiast je np. w jakiś sposób badać i uwzględniać), to poświęcił on naprawdę ogromną ilość czasu i wysiłków, aby do matematyki, mimo oporu środowiska, wprowadzić teorię zbiorów zawierającą nieskończoność aktualną (liczby pozaskończone)."

Pomijając styl i błędy, nieskończenie małe i podstawy rachunku różniczkowe to temat na odrębną książkę. W związku z zasadniczą tezą rozprawy wystarczyło jedynie pokazać, skąd pochodzi założenie, że na prostej istnieją tylko takie punkty, które odpowiadają liczbom wymiernych lub niewymiernym.

Przypisy zawierają także cytaty z oryginalnych prac Cantora i Dedekinda chociaż żaden argument nie jest oparty na oryginalnej wersji.

Bibliografia obejmuje ponad 300 pozycji w języku polskim, niemieckim, angielskim, francuskim i włoskim; odniesienia do literatury nie są zredagowane w standardzie Harvard, czy jakimś podobnym; przywołując w przypisach daną pozycję Autorka za każdym razem powtarza pełny tytuł książki lub artykułu.

Rozprawa zawiera liczne odniesienia do najnowszej literatury filozoficznej, które zwiększając objętość nie wnoszą niczego do argumentacji. Dla przykładu, Autorka opisuje rozumienie intuicji u Kanta, Brouwera, Poincare, Husserla, Anscombe, Searla i Giaquinto (ss. 36—40), chociaż z tego nie wynika, jakie rozumienie intuicji przyjęła w rozprawie.

Lektura rozprawy jest trudna z uwagi na styl Autorki, która w jednym zdaniu próbuje zamknąć gonitwę wielu myśli. Oto przykład: „Powyższe stwierdzenia [Dedekinda – PB] można odnieść zarówno do ciągłości, którą to właściwość – z pochodzenia intuicyjną i geometryczną – wprowadził jako (pewien nieformalny) aksjomat konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych, czyniąc ją warunkiem kategoryczności modelu" (122).

Mamy tu cztery tezy na temat ciągłości i trudno rozstrzygnąć, jaki jest związek między nimi. Ciągłość (i) to własność „intuicyjna", (ii) to własność „geometryczna", (iii) to „nieformalny aksjomat" konstrukcji liczb rzeczywistych, (iv) Dedekind uczynił ciągłość warunkiem kategoryczności modelu. Zdanie (iv) można skojarzyć z twierdzeniem o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych, ale Dedekind nie znał tego twierdzenia, ani pojęcia kategoryczności. Jeśli (iii) odnosi się do § 5 (Dedekind 1872), to ciągłość liczb rzeczywistych jest twierdzeniem. Zgodnie z definicją z § 3 (Dedekind 1872) ciągłość jest charakterystyką porządku liniowego, dlaczego zatem porządek uznaje Autorka za pojęcie geometryczne? A wreszcie w związku z (i) można się zastanawiać, czy są jakieś własności nieintuicyjne, czy na przykład zgodność porządku z dodawaniem, którą Dedekind niejawnie stosuje w dowodach z § 4, to własność intuicyjna czy nieintuicyjna?

Zdań tego typu jest bardzo dużo.

Praca (Cantor 1872) jest cytowana w przekładzie Jerzego Pogonowskiego bez wskazania tłumacza.

Rozprawa zawiera 13 diagramów, które w sposób syntetyczny mają opisywać konstrukcje Cantora i Dedekinda; rysunek 11 ilustrujący przekroje Dedekinda został zaczerpnięty z literatury bez wskazania autora.

Rozprawa została napisana w edytorze WORD i formuły matematyczne nie są dobrze złożone. Do edycji pracy z filozofii matematyki lepszy byłby program LaTeX.

4. W tej części omówię analizy prac (Cantor 1872) i (Dedekind 1872) przedstawione w rozprawie; są to analizy wybranych fragmentów, przedstawiane w różnych rozdziałach i w różnych kontekstach. Tym niemniej analiza prac (Cantor 1872) i (Dedekind 1872) to najciekawszy wątek rozprawy.

Nowe w stosunku do literatury przedmiotu są wyróżnione zagadnienia, na podstawie których porównywane są stanowiska filozoficzne, mianowicie:

(1) konstrukcje,

(2) liczby wymierne,

(3) linia prosta,

(4) nieskończenie małe.

Generalna uwaga do tej części jest następująca: prace Cantora i Dedeknda łatwo analizować w taki sposób, że uwzględniając kontekst historyczny bierzemy pod uwagę, jak dana kwestia jest ujmowana we współczesnej matematyce. Spojrzenie ze współczesnej perspektywy pozwala zobaczyć, które kwestie zostały rozwiązane matematycznie, a które przejęła filozofia.

4.1a Konstrukcja vs definicja liczb rzeczywistych. Tej kwestii poświęcono rozdz. 2 rozprawy. Czytamy tam: „W tym rozdziale będziemy chcieli pokazać, iż zbiór liczb rzeczywistych został przez Cantora nie tyle zdefiniowany, co skonstruowany" (s. 49).

Przeciwstawienie konstrukcji i definicji liczb rzeczywistych jest ciekawe. W literaturze filozoficznej i matematycznej nie jest ono omawiane, dlatego wymaga wyjątkowej precyzji. Rozprawie brakuje jednak odróżnienia pojęć konstrukcja i definicja; brakuje też odpowiedzi na pytanie, czy istnieje definicja liczb rzeczywistych. Czy za definicję można uznać zdanie *Liczby rzeczywiste to największe ciało archimedesowe* (Hilbert 1900), albo *Liczby rzeczywiste to ciało uporządkowane w sposób ciągły* (Birkhoff, Mac Lane 1941), albo *Liczby rzeczywiste to szczególne (przemienne + wymiar topologiczny 1) ciało topologiczne* (Pontriagin 1932)?

Autorka pisze: „konstrukcja R [liczb rzeczywistych – PB] jest zbyt skomplikowana, aby nazwać ją definicją" (s. 65). Współcześnie jednak konstrukcja liczb rzeczywistych jest przedstawiana jako zbiór ilorazowy $\mathcal{C}/_{\equiv}$ (gdzie $\mathcal{C}$ to ciągi liczb wymiernych spełniające warunek Cauchy'ego). Przyjmuje się, że to jest właśnie definicja zbioru $\mathbb{R}$ – definicja przez abstrakcję. Jaka jest zatem różnica między konstrukcją a definicją?

Za pomocą konstrukcji rozumianej jako zbiór ilorazowy można wyjaśnić słynne stwierdzenie Dedekinda o stwarzaniu liczb niewymiernych. Interpretując deklaracje Dedekinda o 'stwarzaniu' w kontekście historycznym uwzględniamy, że nie zna on konstrukcji ilorazowej. Heine, Cantor, Dedekind nie znali techniki zbioru ilorazowego, dlatego piszą, że liczba rzeczywista to znak (Heine, Cantor), albo, że liczba rzeczywista jest „stwarzana" (Dedekind). Autorka przyjmuje interpretację, że 'stwarzanie' jest czymś różnym od konstrukcji i definicji, i pisze o „pozakonstruktywnych środkach argumentacji": „W powyższym cytacie rzeczywiście po raz kolejny mamy do czynienia ze sugestią, że liczby [naturalne – P.B.] są stwarzane przez umysł. Jednakże, tak jak w przypadku „stwarzania" (*erschaffen*) liczb niewymiernych, tutaj również argumentujemy, że owo stwarzanie liczby nie jest określeniem bezpośrednim wobec tej dosłownej czynności, a raczej odwołaniem się do pozakonstruktywnych środków argumentacji" (s. 94).

4.1b Konstrukcja granicy. Czytamy: „W niniejszym podrozdziale postaramy się wskazać takie obiekty, które Cantor wprowadzał w sposób bardziej bezpośredni poprzez opisy ich konstrukcji. Pierwszym takim obiektem są granice ciągów" (s. 62).

Taka interpretacja to odstępstwo od oryginalnego tekstu. Cantor pisze: „Tę własność ciągu (1) [warunek Cauchy'ego – PB] wyrażam słowami: Ciąg (1) ma granicę b" (Cantor 2016, 170). Innymi słowy, 'ciąg spełnia warunek Cauchy'ego' i 'ciąg ma granicę' to synonimy. Ale warunek Cauchy'ego jest zadany definicją. Dlatego w miejsce 'konstrukcja' powinno być 'definicja granicy'.

Autorka komentując przytoczone zdanie Cantora przyjmuje jakieś „konstrukcyjne operacje": „Jednocześnie wielkości b stają się dla niego wielkościami liczbowymi. W tym miejscu również obserwujemy konstrukcyjne operacje, jakie były zauważalne w centrum praktyki matematycznej Cantora" (s. 63).

Uwzględniając kontekst historyczny oraz to, jak w dzisiejszej matematyce jest traktowana ta kwesta, zamiast „konstrukcyjne operacje" powiemy, że liczba jest definiowana jako klasa abstrakcji.

4.1c Konstrukcja linii prostej. Czytamy w rozprawie: „Cantor nie korzystał z pojęcia stricte prostej geometrycznej, a tym bardziej z intuicji geometrycznej, a skonstruował prostą według przepisu na liczby rzeczywiste" (s. 65).

Cantor ustala izomorfizm między prostą a liczbami rzeczywistymi i na tej podstawie możemy wnosić, co rozumie przez prostą. W związku z tym odróżniamy odwzorowanie z prostej do $\mathbb{R}$ oraz z $\mathbb{R}$ na prostą.

Odwzorowanie z prostej do $\mathbb{R}$. Zacytujemy niżej odpowiedni fragment pracy Cantora:

„Punkty linii prostej są pojęciowo określone przez to, że podaje się, w leżącej u podstaw jednostce miary, ich odcięte, ich odległości od ustalonego punktu o linii prostej, ze znakiem + lub −, w zależności od tego, czy rozważany punkt leży we (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej części prostej.

Jeśli ta odległość jest w stosunku wymiernym do jednostki miary, to będzie ona wyrażona przez wielkość liczbową z dziedziny A; w innych przypadkach, gdy punkt jest na przykład *znany* na mocy jakiejś konstrukcji, zawsze możliwe jest podanie ciągu:

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

który ma własność wyrażoną w § 1 oraz pozostaje w takim związku do rozważanej odległości, że punkty linii prostej, które otrzymują odległości $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ wraz ze wzrastającą n zbliżają się nieskończenie do owego określonego punktu" (Cantor 2016, 175).

Przypisując punktom liczby rzeczywiste Cantor przyjmuje: (1) algorytm dzielenia z resztą („jeśli ta odległość jest w stosunku wymiernym do jednostki miary", *Elementy*, ks. X, def 1, tw. 1–3), (2) wyróżniony punkt o na prostej, (3) odcinek jednostkowy 1, (4) zamienia greckie pojęcie odcinków współmiernych i niewspółmiernych na odcinki wymierne i niewymierne (wymierne lub niewymierne to współmierne lub niewspółmierne z odcinkiem jednostkowym), (5) „punkt znany na mocy jakiejś konstrukcji" można aproksymować ciągiem Cauchy'ego liczb wymiernych.

Cantor jest przekonany, że założenia te wynikają z *Elementów* Euklidesa – pisze o tym pod koniec § 1. Wiemy jednak, że założenie (3) wprowadził do matematyki Kartezjusz, a przez porównanie z odcinkiem jednostkowym zmienił się sens pojęć współmierny–niewspółmierny na wymierny—niewymierny, założenie (5) nie było powszechne.

Dedekind, gdy ustala związek miedzy liczbami wymiernymi a prostą (Dedekind 1872, § 2) przyjmuje następujące założenia: (1) twierdzenie *Elementy*, VI.9, o podziale odcinka na n części, (2) wyróżniony punkt o na prostej, (3) odcinek jednostkowy 1. Ponadto, gdy przyjmuje, że na prostej poza punktami odpowiadającymi liczbom wymiernym istnieją inne punkty, przyjmuje założenie o odcinkach współmiernych i niewspółmiernych.

W rozprawie natomiast czytamy: „W pierwszej kolejności [Cantor – P.B.] zastosował dość oczywiste intuicyjnie przyporządkowanie. Każdemu punktowi prostej przypisał jedną liczbę rzeczywistą, poprzez określenia dla każdego punktu odległości od punktu 0 (tj. od konkretnego wyróżnionego punktu)" (s. 66).[1]

Przyporządkowanie to nie jest intuicyjne, ale oparte na wskazanych założeniach. Co więcej założenia (5) nie przyjmuje Dedekind i właśnie z tym założeniem można wiązać platonizm Cantora: każdy punkt na prostej jest końcem odcinka współmiernego lub niewspółmiernego z odcinkiem jednostkowym – nie wynika to z żadnej teorii matematycznej.

Odwzorowanie z $\mathbb{R}$ na prostą. Cantor nie odpowiada na pytanie, czy na prostej są punkty inne niż „znane na mocy konstrukcji", tym niemniej przyjmuje aksjomat, że każdej liczbie rzeczywistej odpowiada punkt na prostej. W związku z tym aksjomatem w rozprawie Pani Tytko czytamy: „Pytanie, jakie się tutaj nasuwa, dotyczy tego, czy Cantor był jakoś przekonany o tej zależności między prostą geometryczną a liczbami rzeczywistymi i tylko [1] nie wiedział, jak ją udowodnić (stąd aksjomat), czy też w sposób zamierzony [2] zdefiniował prostą rzeczywistą, niemającą pod kątem matematycznym, jak i ontologicznym zbyt wiele wspólnego z prostą, określaną w aksjomatach geometrii. Jeśli przyjmiemy pierwszą wersję, można będzie Cantorowi przypisać w tym miejscu jego założenia platonistyczne, [...] Jeśli natomiast przyjmiemy drugą wersję, możemy przypisać jego praktyce pewne przesłanki dotyczące konstrukcjonizmu, [...]. Opieramy się na drugiej propozycji, ponieważ nie koliduje ona z deklarowanym, ale też jakoś zauważalnym w matematycznej praktyce Cantora, odrzucaniem intuicji" (s. 67—68).

Ad [1] Autorka powinna sprawdzić, jak współcześnie rozwiązuje się podobny problem. I tak (Birkhoff 1932) przyjmuje aksjomat, że prosta jest izomorficzna z $\mathbb{R}$; w (Borsuk, Szmielew 1972) jest to twierdzenie, przy czym do aksjomatów geometrii włączony jest aksjomat. W jednym i drugim przypadku mamy rozbudowany system aksjomatów geometrii. Cantor nie odnosi się do aksjomatów geometrii, a jedynie do *Elementów* Euklidesa .

Ad [2] Autorka nie postawiła pytania o cel artykułu (Cantor 1872); nie wzięła też pod uwagę tego, że w § 3 jest rysunek reprezentujący linię prostą.

Po co zatem Cantor konstruuje liczby rzeczywiste? Otóż chodzi o pojęcie pochodnej zbioru – zbioru punktów. Po ustanowienie bijekcji między $\mathbb{R}$ a prostą, na tej drugiej można zdefiniować pochodną zbioru. Inaczej niż we współczesnej matematyce, u Cantora prosta rzeczywista (oś liczb rzeczywistych) opisuje linię prostą. Tak, Cantor był przekonany, że liczby rzeczywiste mają opisywać linie prostą i po to zostały wprowadzone.

Artykuł (Cantor 1872) jest kontynuacją wcześniejszej pracy poświęconej szeregom trygonometrycznym. Obie prace traktują o szeregach trygonometrycznych na prostej; chociaż znano analityczne przedstawienia funkcji trygonometrycznych, to funkcje trygonometryczne wiązano z geometrią. Można więc przyjąć, że liczby rzeczywiste są konstruowane, ale 'platońskim' przedmiotem jest linia prosta; liczby rzeczywiste służą do opisu prostej. Podobnie jest z innymi pojęciami wprowadzonymi przez Cantora. Moc zbioru punktów jest kontinuum, bo to jest moc kontinuum geometrycznego, czyli linii prostej; w innej pracy Cantor dowodzi twierdzenia o typie porządkowym kontinuum, czyli linii prostej – we współczesnej matematyce jest to typ porządkowy przedziału domkniętego liczb rzeczywistych. Najwyraźniej platonizm Cantora rysuje się w założeniu, że każdy punkt prostej jest końcem odcinka współmiernego lub niewspółmiernego z odcinkiem jednostkowym, ale Autorka uznała to za „dość oczywiste intuicyjnie".

4.2 Liczby wymierne (ss. 138—147). Jest istotna różnica w podejściu Cantora i Dedekinda do liczb wymiernych: Cantor przyjmuje liczby wymierne jako dane, Dedekind charakteryzuje liczby wymierne aksjomatami; podkreśla wewnętrzność działań, nie podaje aksjomatów dotyczących elementów

[1] Podany w przypisie rozprawy cytat odnosi się do innej kwestii. Autorka cytuje mianowicie takie zdanie: „Do każdej wielkości liczbowej przynależy zatem określony punkt, jednemu punktowi jest jednak przyporządkowanych niezliczenie wiele równych wielkości liczbowych jako współrzędnych w powyższym sensie; gdyż z czysto logicznych powodów wynika, jak już to wyżej zaznaczano, że równym wielkościom liczbowym *nie* mogą odpowiadać różne punkty oraz że nierównym wielkościom liczbowym jako współrzędnym *nie* może być przyporządkowany jeden i ten sam punkt" (Cantor 2016, 173).

neutralnych; wyjątkowo dokładnie opisuje porządek jako przechodni, gęsty i taki, że każda liczba wyznacza przekrój (z tego warunku wynika prawo trychotomii). Dodatkowo pisze:

„Różność dwóch liczb wymiernych a, b widoczna jest w tym, że różnica $a - b$ ma albo wartość dodatnią, albo ujemną".

Z tego warunku także wynika prawo trychotomii, w tym przypadku jednak porządek jest związany z dodawaniem.

W rozprawie Dedekinda nie jest więc jasne, czy porządek musi być związany z działaniami. Dodajmy do tego, że Dedekind nie podaje aksjomatu zgodność porządku z mnożeniem, aksjomatu Archimedesa, czy innego warunku, z którego wynika, że liczby wymierne są najmniejszym ciałem uporządkowanym.

W rozprawie natomiast czytamy: „Istotą porządku zbioru liczb wymiernych według Dedekinda było to, co następuje:

‚Różność dwóch liczb wymiernych a, b widoczna jest w tym, że różnica $a - b$ ma albo wartość dodatnią, albo ujemną'. Jak widać, porządek w zbiorze liczb rzeczywistych łączy się u Dedekinda ściśle z określonymi na tym zbiorze działaniami. W związku z tym, strukturalistyczne podejście, spowodowało że matematyk z Brunszwiku przyjął na początku istnienie całej struktury matematycznej wraz z operacjami, które ją charakteryzują – zbiór liczb wymiernych wraz z określonym porządkiem oraz działaniami" (s. 139).

I dalej: „Tego typu praktyka matematyczna jest charakterystyczna dla Dedekinda, u którego obserwujemy skupienie na całej strukturze, i konsekwentne wprowadzanie krok po kroku wszystkich niezbędnych jej elementów" (s. 141).

Tak więc, mimo że z analizy tekstu wynika, iż Dedekind tylko częściowo opisał strukturę ciała uporządkowanego, Autorka próbuje bronić strukturalizmu Dedekinda.

W innym miejscu obrona tego stanowiska przyjmuje groteskowy wyraz: „Błaszczyk zastanawia się nad brakiem opisu własności liniowości porządku u Dedekinda, tj. jego zgodności z działaniami. Można przyjąć, iż brak potrzeby opisu tej własności przez Dedekinda może być interpretowany jako pewien argument za teorią matematyki ucieleśnionej, czy też po prostu za – ponownie – strukturalistycznym podejściem matematyka z Bruszhwiku. Dlatego, że nieujęcie przez Dedekinda pewnej ogólnej własności w teorii (co nie było równoznaczne z jej niespełnieniem przez tę teorię), mogło wynikać z tego, że w procesie abstrahowania i formalizowania pewnych aspektów intuicji po prostu o tej własności zapomniał. Mogła być ona w zbyt oczywisty sposób związana z intuicją o strukturze, którą zamierzał formalnie opisać i uporządkować (s. 140, przypis 382).

Czyli – według Autorki – Dedekind wiedział, ale zapomniał. Tak można by bronić strukturalizmu Dedekinda, gdyby w roku 1872 zgodność porządku z dodawaniem i mnożeniem były znane, ale własności te pierwszy raz zostały wprost zapisane dopiero w aksjomatach ciała uporządkowanego w pracach Hilberta *Grundalgen der Geometrie* (1899) oraz *Über den Zahlbegrieff* (1900).

4.3 Linia prosta u Dedekinda.

„Powyżej przedstawiona analiza pracy Dedekinda, mająca na celu ukazanie pewnego 'wybrakowania' zbioru liczb wymiernych, ujawnia jedną, istotną rzecz. Otóż zauważmy, iż Dedekind pokazuje częściowe podstawy i genezę swojej definicji właściwości ciągłości.·Chodzi o tę składową definicji, która wywodzi się bezpośrednio z problemu niezawierania liczb niewymiernych przez zbiór liczb wymiernych, a więc problemu specyficznego 'wybrakowania' tego zbioru. Zauważmy przy tym, iż Dedekind omija tutaj całą problematykę konstruowania liczb przy pomocy ciągów. Przyjmuje je jako gotowe, już istniejące – dotyczy to zarówno liczb wymiernych, jak i liczb niewymiernych. Podstawą jego rozważań jest gotowy zbiór liczb wymiernych, a następnie – uzupełniony o liczby niewymierne – zbiór liczb rzeczywistych. Dowodzi to, że Dedekind nie wymyślił, nie stworzył w umyśle czy też przy pomocy umysłu (a przynajmniej nie całkiem) formalnej definicji owej właściwości, ale w znaczny sposób ją wydedukował" (s. 122).

4.3a Nieciągłość liczb wymiernych. Nieciągłość liczb wymiernych jest opisywana w (Dedekind 1872) na dwa sposoby: na podstawie argumentu opartego na geometrii (§ 2—3), oraz na podstawie definicji ciągłości (§ 4). W pierwszym przypadku nieciągłość oznacza, że na prostej istnieją punkty, które nie odpowiadają liczbom wymiernym. W tym argumencie Dedekind korzysta z wielu założeń geometrycznych, a liczby wymierne nie są przedstawiane jako zbiór liniowo uporządkowany. Cantor powtarza ten argument; ponadto Dedekind i Cantor opisują ten argument skrótowo, tak iż można przyjąć, że w tamtym czasie była to wiedza powszechna. W podsumowaniu tego wątku Dedekind pisze:

„Jeśli teraz chcemy, a to właśnie jest nasze życzenie, oddać na sposób arytmetyczny wszystkie zjawiska na prostej, to liczby wymierne do tego nie wystarczą" (Dedekind 2017, 174).

W § 4 nieciągłość odnosi się do zbioru $\mathbb{Q}$ z porządkiem liniowym. Dedekind stosuje wtedy definicję ciągłości – żaden przekrój nie wyznacza luki (§ 3) – i pokazuje, że w $(\mathbb{Q}, <)$ istnieją przekroje typu luka. Ten dowód nie jest związany z geometrią. Porządek liniowy na $\mathbb{Q}$ jest wprowadzony aksjomatami w § 1. To jest całkowicie oryginalny argument Dedekinda.

Autorka łączy te dwa znaczenia nieciągłości i przyjmuje, że nieciągłość liczb wymiernych polega na tym, że liczbom wymiernym „brakuje" liczb niewymiernych oraz na tym, że w zbiorze uporządkowanym $(\mathbb{Q}, <)$ istnieją przekroje typu luka. Czytamy: „Powyżej przedstawiona analiza pracy Dedekinda [analiza § 4 rozprawy Dedekinda – PB], mająca na celu ukazanie pewnego „wybrakowania" zbioru liczb wymiernych, ujawnia jedną, istotną rzecz. Otóż zauważmy, iż Dedekind pokazuje częściowe podstawy i genezę swojej definicji właściwości ciągłości. Chodzi o tę składową definicji, która wywodzi się bezpośrednio z problemu niezawierania liczb niewymiernych przez zbiór liczb wymiernych, a więc problemu specyficznego „wybrakowania" tego zbioru"(s. 122).

Powtórzmy: problem „niezawierania liczb niewymiernych przez zbiór liczb wymiernych" wiąże się z argumentem geometrycznym, a nie technicznym znaczeniem pojęcia ciągłość. Ten błąd ma dalej idące konsekwencje.

4.3b Ciągłość prostej. W rozprawie Pani Tytko linia prosta jest przedstawiana jako wzorzec ciągłości. Po zreferowaniu (Dedekind 1872, § 4), gdzie – powtórzę – przekroje liczb wymiernych badane są bez związku z prostą – Autorka pisze: „Po bezpośrednim, ogólnym odniesieniu się do właściwości ciągłości, Dedekind porównuje do prostej (posiadającej tę własność) zbiór liczb rzeczywistych. Pokazał dzięki temu, że liczby wymierne tworzą za mały zbiór, aby posiadał własność ciągłości, tak jak posiada ją prosta" (s. 125).

4.3c Nieciągłość prostej. W (Dedekind 1872) jest wyraźna deklaracja, że prosta nie musi być ciągła: „Jeśli przestrzeń ma w ogóle jakąś realną egzystencję, to wcale nie musi koniecznie być ciągła" (Dedekind 2017, 175).

Pada ona pod koniec § 3, po wprowadzeniu definicji ciągłości, a przed dowodem, że liczby wymierne są nieciągłe w technicznym sensie. Wydaje się, że to stoi w sprzeczności z tezą Pani Tytko, że prosta jest wzorcem ciągłości.

Autorka nie odnosi się wprost do deklaracji Dedekinda, ale nie wprost traktuje o tym, następujący fragment rozprawy: „To [dowód, że istnieją przekroje $(\mathbb{Q}, <)$ typu luka – PB] obrazuje, że dla Dedekinda wystarczające było rozpatrywanie idealnej i wystarczającej zarazem (w kontekście użytkowania w matematycznej analizie) prostej posiadającej właściwość ciągłości. Dedekind używał odniesienia do wyobrażenia prostej, jednak tylko do pewnego momentu, który uznał za wystarczający do przejścia na czysto formalny poziom prac matematycznych. Dlatego też można powiedzieć, iż formułując właściwość ciągłości, Dedekind posługiwał się właściwością ciągłości prostej geometrycznej. Wykorzystał tę własność w swojej formalnej definicji, czerpiąc również z intuicji dotyczących pojęcia przekroju kontinuum punktowego" (s 125).

Tak więc Dedekind „wydedukował" ciągłość z „idealnej prostej", a nie z linii prostej, o której pisze w § 2–3.

4.3d Czym jest idealna prosta? Wydaje się, że to, co Autorka nazywa idealną prostą to definicja ciągłości. W związku z tym czytamy: „[definicja Dedekinda – PB] *Jeżeli wszystkie punkty prostej rozpadają się na dwie klasy tego typu, że każdy element pierwszej klasy leży na lewo od każdego elementu drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który tworzy ten podział wszystkich punktów na dwie klasy, czyli przekrój prostej.* Błaszczyk wskazuje, że nie jest to nic innego, jak tylko współczesna definicja ciągłości w sensie Dedekinda: „żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza ani luki, ani skoku. Z matematycznego punktu widzenia to prawda. Lecz z punktu widzenia filozoficznego pisemna wypowiedź zawiera więcej treści. Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na fakt, iż Dedekind bardzo obrazowo i oryginalnie opisał własność prostej, złożonej z punktów. Już na początku swojej konstrukcji liczb rzeczywistych odwołał się do – wręcz fizycznej – własności świata doświadczeń. Mamy tu na myśli zarówno jego [1] niewyartykułowane założenie o własności liniowości porządku (do liniowego porządku w wersji Dedekinda brakuje prawa trychotomii), jak i samą [2] nazwę ‚przekroju' (s. 118–119).

Ad [1]. Definicja podana w § 1 jest poprawna: porządek jest przechodni i spełnia prawo trychotomii (co wynika z faktu, że każda liczba, każdy punkt wyznacza przekrój).

Ad [2] Przekrój jest definiowany w terminach teorii porządku liniowego, ale Autorka widzi to inaczej: „Tak jak wcześniej zauważyliśmy, przekrój jest ściśle związany z [a] uporządkowaniem zbioru lub z wyobrażeniem „przekroju" [b] na geometrycznej prostej".

Przekrój w ogóle nie jest związany z „wyobrażaniem" geometrycznej prostej.

4.3e Idealna prosta vs prosta geometryczna. Wyżej cytowane zdanie „z punktu widzenia filozoficznego pisemna wypowiedź zawiera więcej treści" jest opatrzone następującym przypisem: „Będzie to rozwinięte jeszcze w dalszej części pracy. Jednak ogólnie chodzi o fakt, iż Dedekind, poszukując istoty własności ciągłości we własnym umyśle – w wyobrażeniu o ciągłości w połączeniu z wymaganiami, jakie stawiała analiza – odwołuje się niejako do filozofii Kanta. Nie robi tego w sposób zamierzony, jednak epistemiczny proces, podczas którego dochodzi do wykształcenia definicji ciągłości, nawiązuje do korzystania z naoczności czasu i przestrzeni, które są według Kanta narzucane na każde wrażenie (w tym przypadku – umysłowe). Dedekind łączy w jednym właściwości geometryczne z arytmetycznymi. Jego ciągła prosta nie jest prostą geometryczną co do istoty."

Autorka tłumaczy więc genezę definicji ciągłości odniesieniem do idealnej prostej.

4.3f Podsumowanie. Argument o „wydedukowaniu własności ciągłości" zakłada, że prosta idealna jest uporządkowana liniowo. Ale skąd w ogóle założenie o liniowym uporządkowaniu punktów?

Dedekind definiuje ciągłość jako własność porządku liniowego. Ale pojęcie porządku liniowego również pochodzi od Dedekinda. Do współczesnej geometrii liniowy porządek wprowadził Moritz Pasch właśnie pod wpływem Dedekinda.

Odniesienie do idealnej prostej, poza tym, że nie jest związane z tekstem (Dedekind 1872), niczego nie tłumaczy.

4.4 Nieskończenie małe. Termin ‘analiza infinitezymalna' użyty w pracach (Cantor 1872), (Dedekind 1872) oznacza rachunek różniczkowy. Liczby rzeczywiste są największym ciałem archimedesowym i nie zawierają nieskończenie małych (każde ciało niearchimedesowe zawiera nieskończenie małe, tj. elementy x spełniające warunek $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < x < \frac{1}{n})$.

Analizując ostatni paragraf pracy (Dedekind 1872) Autorka pisze: „W przypadku aktualnie nieskończenie małych wielkości u Dedekinda na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma żadnej podstawy, aby wyciągać jakieś wnioski filozoficzne. Analizując rozdział o analizie infinitezymalnej w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, możemy zauważyć fakt, iż Dedekind związał definicją ciągłości wielkości potencjalnie nieskończenie małe (wielkości zmienne, używane w analizie jako pojęcia pomocne dla definiowania granicy). Stąd można wnioskować, że zdawał sobie sprawę, iż skonstruowany przez niego zbiór liczb rzeczywistych, posiadający tę własność ciągłości, nie jest związany z wielkościami aktualnie nieskończenie małymi. Powyższe rozumowanie potwierdza strukturalistyczne podejście Dedekinda" (s. 194)

Pytanie, dlaczego w ciele skonstruowanym przez Dedekinda nie ma nieskończenie małych sprowadza się do aksjomatu Archimedesa. I Cantor, i Dedekind przyjmują, że liczby odpowiadają założeniu matematyki greckiej o odcinkach współmiernych i niewspółmiernych. Można to zobaczyć analizując, jak Cantor i Dedekind porównują linię prostą z liczbami. Ale możliwa jest tu również odpowiedź czysto matematyczna: w obu konstrukcjach liczby wymierne są gęste w skonstruowanym ciele, a gęstość ułamków w ciele uporządkowanym jest równoważna aksjomatowi Archimedesa. Można też pokazać, z których założeń konstrukcji Cantora i z których założeń konstrukcji Dedekinda wynika gęstość liczb wymiernych w ciele liczb rzeczywistych.

5. Na koniec krótka uwaga o ontologii. Na marginesie głównego wykładu Autorka kilka razy przywołuje koncepcją, jaką zaprezentowałem w książce *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen (Kraków, 2007). Stosując teorię Ingardena warstwowej budowy dzieła literackiego oraz postaci literackiej jako przedmiotu pochodnie intencjonalnego pokazałem, jak za pomocą tych pojęć można interpretować istnienie liczb rzeczywistych. Zastosowanie ontologii formalnej wiąże się z rozwiązaniem dwóch problemów: jak zinterpretować historyczność przedmiotu intencjonalnego oraz miejsca niedookreślenia. Koncepcja ta nie jest rekonstrukcją filozofii Dedekinda, ale odpowiedzią na pytanie, jak istnieje przedmiot matematyczny?

Autorka kilka razy dystansuje się wobec tej koncepcji, dlatego że wynika z niej, iż przedmioty matematyczne istnieją tak, jak dzieła sztuki; „Nie zakładamy tu jednak tej propozycji w jej szczegółach, choćby z uwagi na różnice pomiędzy matematyką a sztuką [...]" (s. 50). W kwestii istnienia przedmiotów matematycznych przyjmuje koncepcję Poppera: „przychylamy się do stanowiska, że obiekty matematyczne, wytworzone w indywidualnej praktyce matematycznej lub względem niej w abstrakcyjny sposób istniejące, stają się jednocześnie obiektywnie istniejącymi [i dalej w przypisie – PB] W takim sensie, w jakim Popper traktuje istnienie świata 3" (s. 20). Jednak w trzecim świecie Poppera postaci literackie istnieją obok teorii naukowych.

Koncepcja trzech światów to zdroworozsądkowy pogląd, że obok przedmiotów realnych i myśli istnieje jeszcze coś innego. Dzisiaj, w dobie gier video wie to każde dziecko. Ontologia formalna natomiast próbuje opisać te inne przedmioty.

Kwestii istnienia przedmiotów Autorka nie przemyślała do końca, ale – powtórzę – jest to wątek prowadzony na marginesie rozprawy.

6. Uwagi w punkcie 4 brzmią jak krytyka, ale należy przyjąć, że jest to raczej polemika. Jeśli uwzględnimy chociażby ostatnie publikacje analizujące prace (Cantor 1872) i (Dedekind 1872) takie jak (Kanamori 2021), czy (Haffner, Schlimm 2021) to – w opinii recenzenta – także i one nie radzą sobie z problemami, z którymi zderzyła się Karolina Tytko.[2]

Generalnie, w literaturze przedmiotu nie ma opracowań, które by potrafiły wyciągnąć wnioski ze związków między linią prostą a liczbami naszkicowanych przez Cantora i Dedekinda; zwłaszcza zamiana greckich pojęć współmierne–niewspółmierne na wymierne–niewymierne i związane z tym założenie, że na prostej istnieją tylko liczby wymierne lub niewymierne jest dla filozofów i historyków nieczytelna. Jedyne opracowanie tej kwestii, jakie potrafię wskazać to książka *Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway*, Kraków 2024 (w druku).

Dla przykładu Kanamorii pisze: „Once an origin o and a unit have been specified, rational numbers correlate to points according to ratio" (Kanamori 2021, 226). Zwrot *according to ratio* świadczy, że autor nie wie, na czym polega odniesienie do Księgi X *Elementów*, bo przecież nie ma prostego związku między liczbą wymierną a greckim pojęciem *ratio*. Z kolei Haffner i Schlimm tak piszą o funkcji, za pomocą której Dedekind przypisuje liczbom wymiernym punkty na prostej: „However, while the mapping between rational numbers and points is injective, Dedekind notes that it is not surjective because some cuts, e.g., (A_1, A_2), such that $A_2 = \{x \in R : x^2 > 2\}$ and $A_1 = R \setminus A_2$ are not produced by a rational number" (Haffner i Schlimm 2021, 260). To, że na

[2] Pozycji (Kanamori 2021), (Haffner, Schlimm 2021) nie ma w bibliografii rozprawy.

prostej istnieję inne punkty niż te, które odpowiadają liczbom wymiernych Dedekind przyjmuje na podstawie potocznej wiedzy – „już starożytni Grecy wiedzieli i udowodnili" – a nie na tej podstawie, że istnieją przekroju $(\mathbb{Q}, <)$ typu luka.

Biorąc pod uwagę to, co o dorobku Cantora i Dedekinda pisze się w światowej literaturze filozoficznej, uważam że mgr Karolina Tytko przeprowadziła bardzo odważną analizę prac Cantora i Dedekinda. Uważam, że rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim w zakresie filozofii i wnoszę o dopuszczenie Autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Błaszczyk

Literatura

[Birkhoff 1932] Birkhoff, G.: A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor. *Annales of Mathematics* 33(2), 329–345.

[Birkhoff Mac Lane 1941] Birkhoff, G., Mac Lane, S.: *A Survey of Modern Algebra*, MacMillan, New York.

[Borsuk, Szmielew 1972] Borsuk, K., Szmielew, W.: *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa.

[Cantor 1872] Cantor, G.: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5, 123–132.

[Cantor 2016] Cantor, G.: O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych, tłum. J. Pogonowski. *AUPC* 8, 169–177.

[Dedekind 1872] Dedekind, R.: *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig.

[Dedekind 2017] Dedekind, R.: Ciągłość i liczby niewymierne, tłum. J. Pogonowski. *AUPC* 11, 170–183.

[Hilbert 1899] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. [w:] *Festschrift Zur Feier Der Enthüllung Des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, Teubner, Leipzig 1899, 1–92.

[Hilbert 1900] Hilbert, D.: Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8, 180–184.

[Haffner, Schlimm 2021] Haffner, E., Schlimm, D.: Dedekind and Continuity, [w:] Shapiro, S., Hellman, G. (eds): *The History of Continua. Philosophical and Mathematical Perspective*, Oxford University Press, Oxford 2021, 255–282.

[Kanamori 2021] Kanamori, A.: Cantor and Continuity, [w:] Shapiro, S., Hellman, G. (eds): *The History of Continua. Philosophical and Mathematical Perspective*, Oxford University Press, Oxford 2021, 219–254.

[Pontriagin 1932] Pontriagin, L.: Über stetige algebraische Körper. *The Annals of Mathematics* 33(1), 163–174.